BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

E. PICARD.

P. APPELL.

E. BOREL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

50280 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins.

A
Math.
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, É. LACOUR, ER. LEBON, S. RINDI, P. H. SCHOUTE, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY;
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXVII. — ANNÉE 1913.

(XLVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179881
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

QA
Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci37fran

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Académie des Sciences. Procès-verbaux des séances de l'Académie *tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août* 1835, publiés conformément à une décision de l'Académie par MM. les Secrétaires perpétuels. Tome I, an IV-VII (1795-1799). Hendaye, imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1910, grand in-4°, VI-680 pages. Tome II, an VIII-XI (1800-1804), même imprimerie, 766 pages, 1912. En vente chez M. Gauthier-Villars, Paris.

Nous ne pouvons mieux faire, pour donner une idée de cette importante et utile publication, que de reproduire la Préface placée à la tête du premier Volume. Nous donnerons prochainement l'analyse des deux premiers Tomes. Er. L.

Avertissement. — Depuis longtemps déjà, les procès-verbaux des séances tenues par l'Académie des Sciences étaient considérés comme un monument des plus précieux par tous ceux qui s'occupent de l'histoire des sciences. Il ne se passait pour ainsi dire pas de semaine sans que quelque chercheur, ou quelque érudit, vînt demander à notre Commission administrative l'autorisation de les

consulter et de faire des recherches, presque toujours couronnées de succès, dans les Archives de notre Compagnie. Ces procès-verbaux étaient déposés autrefois dans le cabinet du Secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques. Pour écarter tout danger de perte ou de destruction, les Secrétaires perpétuels les avaient fait transporter à la Bibliothèque, les confiant ainsi à la garde du savant et dévoué bibliothécaire de l'Institut, M. Alfred Rebelliau. Ils ont pensé qu'il y avait mieux à faire encore, et que la publication intégrale de ces documents, d'un intérêt si exceptionnel, contribuerait à mettre en lumière les travaux de nos illustres prédécesseurs et permettrait aux historiens de la Science d'éclaircir bien des points demeurés, aujourd'hui encore, douteux ou obscurs. La tâche qu'ils avaient devant eux était immense. Les procès-verbaux des séances de l'Académie ont commencé à être tenus régulièrement depuis l'année 1666, sauf une lacune pour les années 1670 à 1674 inclus. Ils occupent 160 registres in-folio. Le nombre des rapports faits par les membres de l'Académie dépasse 10000. Ajoutons qu'il convenait d'envisager l'hypothèse où, au cours de la publication, il aurait paru nécessaire de joindre aux procès-verbaux eux-mêmes certaines pièces annexes, présentant un intérêt particulier.

Nos successeurs, nous l'espérons, ne craindront pas d'envisager cette œuvre dans son ensemble. Pour nous, à qui le temps et les moyens étaient mesurés, il nous a paru que nous devions, en quelque sorte, courir au plus pressé. Et nous avons proposé à l'Académie de commencer par publier seulement la partie de nos procès-verbaux qui s'étend depuis la fondation de l'Institut en l'an IV de la République jusqu'à cette année 1835 où a été inaugurée, grâce à l'initiative d'Arago, la belle publication des *Comptes rendus hebdomadaires des séances* de l'Académie qui comprend aujourd'hui 151 volumes in-4° et qui constitue le plus puissant moyen d'action dont dispose de nos jours une Société savante. Notre proposition a reçu de l'Académie l'accueil le plus favorable. Son exécution aura l'inappréciable avantage de faire, en quelque sorte, remonter la publication des *Comptes rendus* jusqu'à la date même de la fondation de l'Institut. Et d'ailleurs, la partie que nous avons ainsi choisie se rapporte à la plus belle époque de la Science française, celle où des hommes tels que Lagrange, Laplace, Lamarck, Cuvier, Monge, etc. faisaient partie de l'Académie.

Le premier Volume, que nous publions aujourd'hui, comprend les premières années depuis l'an IV jusqu'à l'an VII. Il commence à nous donner une idée très nette du rôle et des travaux de la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, dans sa première organisation.

La savante Compagnie se réunissait deux fois par décade. La séance s'ouvrait à $5^h 30^m$ du soir et durait le plus souvent 2 heures. A cette époque le président de chaque Classe était nommé pour six mois seulement. Le premier président élu fut Lagrange; Laplace lui succéda. C'est à Lacepède qu'échurent tout d'abord les fonctions de secrétaire.

Les membres se montraient très assidus aux séances; presque tous d'ailleurs avaient appartenu à l'ancienne Académie.

La Section I — *Mathématiques* — comprenait Lagrange, Laplace, Borda, Lacroix, Bossut, Legendre, Delambre, tous membres de l'ancienne Académie.

Monge, Le Roy, Carnot, Périer, Vandermonde qui, avec Prony, Bonaparte, Berthoud, formaient la Section II — *Arts mécaniques* — avaient également appartenu, à des titres divers, à l'Académie des Sciences.

La Section III — *Astronomie* — était uniquement composée d'anciens académiciens : Lalande, Méchain, Le Monnier, Cassini, Pingré, G. de Bory, Messier, Jeaurat.

La Section IV — *Physique expérimentale* — comprenait deux membres nouveaux, Paul Levêque et L. Lefèvre-Gineau, à côté des académiciens Charles, Cousin, Brisson, Coulomb, Rochon.

Guyton de Morveau, Berthollet, Fourcroy, Pelletier, également académiciens, formaient la Section V — *Chimie* — avec deux membres nouveaux, Bayen et Vauquelin.

La Section VI — *Histoire naturelle et Minéralogie* — comprenait d'Arcet, Haüy, Desmarets, Duhamel, à côté de deux membres nouveaux, Dolomieu et Lelièvre.

La Section VII — *Botanique et Physique végétale* — comprenait cinq membres de l'ancienne Académie : Lamarck, Desfontaines, Adanson, Laurent de Jussieu, L'Héritier, à côté d'un membre nouveau, Ventenat.

La Section VIII — *Anatomie et Zoologie* — comptait un

membre nouveau de grande illustration, Cuvier, qui, avec Richard, venait s'adjoindre à quatre académiciens : Daubenton, Lacepède, Tenon, Broussonet.

La Section IX — *Médecine et Chirurgie* — était celle qui, avec la suivante, comprenait le plus de membres nouveaux : des Essartz, Hallé, Pelletan, Lassus, à côté de Sabatier et de Portal.

Enfin la Section X — *Économie rurale et Arts vétérinaires* — comprenait deux académiciens : Thouin et Tessier, à côté de Gilbert, Huzard, Cels et Parmentier.

Cette énumération suffit à montrer qu'après deux ans d'interrègne, l'ancienne Académie renaissait toute entière pour former la *Classe des Sciences physiques et mathématiques* de l'Institut nouvellement créé. Personne du reste ne s'y trompa. On avait supprimé l'Académie des Sciences pour obéir à un principe général. On fut heureux de saisir l'occasion qui s'offrait de la rétablir.

On conçoit que la réunion de tant de savants, qui possédaient déjà des traditions académiques, dut beaucoup faciliter le travail de la Compagnie renaissante. Aussi, dès les premières séances, nous voyons les membres de la Classe discuter avec précision les propositions qui leur sont soumises, aboutir rapidement à des solutions pratiques, donner au Gouvernement les avis qu'il demande sur une foule de questions, prendre connaissance des Ouvrages qui leur sont présentés, examiner et discuter les travaux qui leur sont soumis, soit par des confrères, soit par les correspondants et les savants étrangers à l'Académie.

Plusieurs rapports étendus, insérés dans les procès-verbaux, retiendront, aujourd'hui encore, l'attention et l'intérêt du lecteur. L'Académie accueille volontiers les jeunes talents. Si les Commissaires, qu'elle choisit toujours avec l'attention la plus scrupuleuse, ont à signaler quelque défectuosité dans le Mémoire qui leur est soumis, leurs critiques, toujours inspirées par le souci de la vérité et de la rigueur, sont empreintes de la plus grande bienveillance et, le plus souvent, accompagnées d'encouragements.

Les rapports de confiance qui s'étaient établis entre les académiciens, et qui avaient été interrompus pendant la tourmente, reprennent tout naturellement. Dès qu'un membre de la Classe est souffrant, le président délègue un ou deux confrères pour aller

prendre de ses nouvelles. Les discussions se maintiennent sur le terrain purement scientifique. La Compagnie reprend, avec les savants des autres nations, les relations amicales et courtoises qui distinguaient déjà l'ancienne Académie. Elle leur fait volontiers les honneurs de ses séances. Elle a soin d'ailleurs de renommer d'abord les anciens associés étrangers de l'Académie : Joseph Banks, Priestley, Herschell, Pallas, auxquels elle ajoute deux membres nouveaux : Maskelyne et Cavendish.

La publication que l'Académie a entreprise paraîtra donc, nous l'espérons, pleinement justifiée, et nous avons confiance que cette impression se confirmera de plus en plus à mesure que paraîtront les volumes suivants. Mais elle présentait, on doit le reconnaître, des difficultés de plus d'un genre.

D'abord il fallait trouver des ressources pour une entreprise aussi étendue. Cette difficulté a été levée de deux manières. En premier lieu, l'Institut, à deux reprises différentes, nous a accordé une subvention sur les fonds Debrousse, et nous espérons qu'il voudra bien nous continuer son appui.

En second lieu, nous avons pu réduire beaucoup les frais de la publication, grâce à l'initiative qui a été prise par M. l'abbé A. Verschaffel. L'infatigable directeur de l'Observatoire que l'Académie possède à Abbadia a bien voulu mettre à la disposition de l'Académie, et dans les conditions les plus favorables, l'imprimerie qu'il a installée à côté de son observatoire et qui, depuis 8 ans, a publié neuf volumes de la belle série de ses observations méridiennes.

Une autre difficulté, plus grande qu'on ne pourrait le supposer, subsistait encore. Les procès-verbaux ont été transcrits par des employés souvent ignorants, à qui il est arrivé plus d'une fois de défigurer les noms propres, et même le sens des phrases. Heureusement, grâce au zèle et à l'activité d'un ancien employé de l'Institut, M. Maindron, auquel nous sommes heureux de rendre un hommage tardif, nos archives ont été remises en bon ordre. Elles contiennent le plus souvent les minutes du Secrétaire de l'Académie, d'après lesquelles ont été rédigés les procès-verbaux.

Il y avait là une précieuse ressource que l'on n'a eu garde de négliger. Elle a permis de procéder à une revision du texte du manuscrit et des épreuves d'imprimerie. Ce travail fort délicat a été

exécuté, sous notre direction, par M. Raveau, chargé de la rédaction des *Comptes rendus* actuels, par M. l'abbé A. Verschaffel, par son frère M. l'abbé C. Verschaffel et par M. Germain de Saint-Pierre. Je suis heureux de leur adresser, à tous, les bien vifs remercîments de l'Académie.

Gaston Darboux,

Secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques.

DUHEM (Pierre). — Traité d'Énergétique ou de Thermodynamique générale. 2 tomes gr. in-8. Tome I : *Conservation de l'énergie. Mécanique rationelle. Statique générale;* IV-528 pages. Tome II : *Dynamique générale. Déplacement de l'équilibre. Conductibilité de la chaleur. Stabilité de l'équilibre;* IV-504 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Dans de nombreux Ouvrages et Mémoires, M. Duhem a cherché, avec le succès qu'on sait, à rattacher les diverses théories de la Physique à l'Énergétique générale. Il nous offre, dans ce Traité, un exposé très approfondi des principes mêmes de cette Science. M. Duhem reste ici fidèle à la méthode purement synthétique qu'il suit habituellement et qu'il a expliquée et préconisée dans son Ouvrage : *La Théorie physique, son objet et sa structure.* Les principes fondamentaux nous apparaissent comme posés *a priori* et arbitrairement : les conséquences en sont logiquement déduites par une analyse mathématique rigoureuse, et c'est l'accord final de ces conséquences avec l'expérience qui justifie la légitimité des principes.

« Ces principes sont de purs *postulats;* nous pouvons les énoncer comme il nous plaît, pourvu que l'énoncé d'aucun d'entre eux ne soit contradictoire en soi et que les énoncés des divers principes ne se contredisent pas les uns les autres.

« Le caractère auquel on reconnaîtra que l'*ensemble* des principes ainsi formulés constitue une bonne théorie physique est le suivant : en appliquant cet ensemble de principes à des formules qui représentent des lois expérimentales exactes, on en tire de nouvelles formules qui, à leur tour, représentent d'autres lois expérimentales exactes.

« Le contrôle expérimental de l'ensemble des principes de l'Énergétique est ainsi le seul critérium de vérité de cette doctrine. »

Si une telle méthode peut paraître un peu artificielle à celui qui aborde pour la première fois l'étude de la Physique théorique, en revanche le lecteur à qui cette Science n'est pas étrangère ne pourra qu'admirer une synthèse aussi lumineuse.

Lorsqu'on veut tirer, de principes généraux, des conséquences simples et fécondes en même temps que rigoureuses, on est souvent amené à ne les appliquer qu'à certains systèmes satisfaisant à des conditions restrictives : la théorie perd ainsi en généralité ce qu'elle gagne en portée. M. Duhem ne fait les hypothèses restrictives que le plus tard possible et pour ainsi dire au fur et à mesure des besoins. Ce souci constant de la plus grande généralité possible et de la rigueur logique est un des principaux caractères de l'Ouvrage.

Il n'est pas possible d'analyser en quelques pages toutes les matières traitées dans ces deux Volumes, ni surtout de donner une idée de la discussion approfondie qui accompagne chaque question. Contentons-nous de choisir quelques points particulièrement importants et essayons de les exposer, en nous efforçant de ne pas trop les mutiler sous prétexte de les résumer.

La notion d'ÉNERGIE INTERNE d'un système est la première et l'une des plus importantes dont fait usage la Thermodynamique. Étant donné un système dans un état e et animé d'un mouvement μ, le *principe de la conservation de l'énergie* postule l'existence d'une grandeur $E(e, \mu)$, dépendant de l'état e du système et de son mouvement μ, qui garde une valeur invariable dans toute modification du système supposé *isolé dans l'espace*. La quantité $E(e, \mu)$ se nomme *énergie totale* du système : sa valeur n'est évidemment déterminée qu'à une constante additive près.

En Énergétique, le mot *mouvement* du système, désigné par la lettre μ, s'entend au sens de *mouvement général :* un système est dit en mouvement général lorsque ses propriétés physiques varient d'un instant à l'autre, alors même que toutes ses parties matérielles resteraient immobiles : ainsi un corps immobile qui voit varier la température de ses divers points est le siège d'un « mouvement thermique » ; une *phase* homogène constituée par un mélange

d'oxygène, d'hydrogène et de vapeur d'eau est animée d'un « mouvement chimique », si sa teneur en eau varie par la combinaison d'une partie des éléments, ou par la dissociation d'une certaine quantité de vapeur. On voit qu'un mouvement général peut exister sans qu'il y ait aucun mouvement de matière, au sens habituel du mot. Pour désigner ce dernier mouvement, c'est-à-dire le changement de lieu dans l'espace, on réservera les mots « mouvement local », et la lettre λ.

L'énergie totale $E(e, \mu)$ va-t-elle dépendre d'une façon quelconque de l'état du système et de son mouvement général? M. Duhem, dans cet Ouvrage, limite ses recherches aux systèmes vérifiant certaines restrictions, et en particulier la suivante :

L'énergie totale est la somme de deux termes

$$E(e, \mu) = U(e) + K(\lambda),$$

dont le premier $U(e)$ *ne dépend que de l'*ÉTAT *du système et point de son mouvement général ni local, et dont le second* $K(\lambda)$ *ne dépend que du mouvement* LOCAL *et point de l'état ni du mouvement général.*

$U(e)$ s'appellera l'*énergie interne* ou *énergie potentielle* du système; $K(\lambda)$ s'appellera son *énergie cinétique*.

Ainsi, tandis que le mouvement *local* donnera lieu à une certaine énergie $K(\lambda)$, le mouvement *général* n'en engendrera aucune. Considérons, par exemple, un corps immobile animé d'un mouvement thermique : son énergie totale E peut bien dépendre de la température $\mathfrak{T}$ de ses diverses parties, par le terme $U(e)$, mais elle ne dépendra aucunement de la vitesse $\frac{d\mathfrak{T}}{dt}$ avec laquelle varie cette température, car ni U ni K n'en dépendent.

La précédente restriction nous oblige à laisser en dehors de notre étude une foule de systèmes, et en particulier tous les systèmes *où l'électricité est en mouvement* : car le mouvement de l'électricité, même sans aucun mouvement local, donne lieu à une énergie *électrocinétique*. Il restera néanmoins nombre de systèmes intéressants, notamment ceux dont s'occupe l'Hydrodynamique, la théorie de l'Élasticité et la Mécanique chimique, qui comptent parmi les principales applications que M. Duhem ait en vue.

Que sont ces deux termes U et K dont la somme représente l'énergie totale du système? L'énergie cinétique $K(\lambda)$ se confond avec la *force vive* représentée par l'intégrale

$$K = \frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, dm,$$

où u, v, w représentent les composantes de la vitesse absolue de l'élément dm. Quant à l'énergie interne $U(e)$, c'est une fonction parfaitement déterminée de l'état du système, dont la forme est à définir dans chaque cas. Envisageons, en particulier, un système isolé S susceptible d'être lui-même subdivisé par la pensée en deux systèmes *indépendants* S_a et S_b, dont nous désignerons respectivement les états par A et B. Sans faire aucune hypothèse, nous pouvons toujours écrire l'énergie interne U(S) du système S sous la forme

$$U(S) = U_a(A) + U_b(B) + \Psi_{ab}(A, B),$$

où $U_a(A)$ et $U_b(B)$ désignent respectivement l'énergie interne du système S_a et celle du système S_b pris chacun isolément. La quantité $\Psi_{ab}(A, B)$, définie par cette égalité même, reçoit le nom d'*énergie potentielle mutuelle* des deux systèmes.

Supposons maintenant que le système total S se compose, non plus de deux, mais de n systèmes indépendants $S_1, S_2, \ldots, S_n$, dont les états sont respectivement $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Nous pouvons écrire son énergie interne U(S) sous la forme

$$U(S) = U_1(e_1) + U_2(e_2) + \ldots + U_n(e_n) + \Psi(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

$U_i(e_i)$ désignant l'énergie interne du système S_i considéré isolément. Pour l'énergie potentielle mutuelle $\Psi(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ainsi définie, on fait toujours l'hypothèse qu'elle égale la somme des énergies potentielles mutuelles de ces systèmes pris deux à deux

$$\Psi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \sum_{p,q} \Psi_{pq}(e_p, e_q).$$

C'est ainsi, par exemple, qu'en Mécanique céleste, on prend pour l'énergie potentielle mutuelle de n points matériels l'expression

$$\sum -K\frac{m_p m_q}{r_{pq}},$$

où K est une constante positive et r_{pq} la distance des deux masses m_p et m_q.

Une seconde notion capitale en Énergétique est celle de *quantité de chaleur dégagée* par un système. Envisageons une modification qui fait varier de dU l'énergie interne du système, et de dK son énergie cinétique; si, dans cette modification, les « actions extérieures » ont accompli un travail $\mathfrak{T}$, la quantité

$$Q = \mathfrak{T} - dK - dU$$

définit la *quantité de chaleur* dégagée par le système en la modification considérée.

Ceci a trait à une modification *réelle*. Prenons maintenant une modification *virtuelle*, dans laquelle l'énergie interne varie de δU; désignons par $\mathfrak{T}$ le travail virtuel des actions extérieures, et par

$$\tau = -\int \left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) dm$$

le travail virtuel des *actions d'inertie*. Par définition, la quantité

$$Q = \mathfrak{T} + \tau - \delta U$$

représente la *quantité de chaleur* dégagée par le système en la modification *virtuelle* considérée. Cette définition concorde avec la précédente, puisque, lors d'une modification réelle, le travail τ des actions d'inertie égale la diminution $-dK$ de la force vive.

Appliquons, en particulier, cette définition à un système formé d'un ensemble de corps solides invariables et libres, tels que ceux qu'étudie la Mécanique rationnelle. Écrivant qu'en toute modification virtuelle d'un tel système la quantité de chaleur dégagée est nulle, nous obtenons l'équation

$$\mathfrak{T} + \tau - \delta U = 0.$$

L'énergie interne U du système de corps se réduisant à leur énergie potentielle mutuelle, nous reconnaissons là l'*équation générale de la Dynamique*, celle que les Traités de Mécanique rationnelle déduisent habituellement, avec Lagrange, de la combinaison du principe de d'Alembert avec celui des vitesses virtuelles. Tout le corps de doctrine de la Mécanique rationnelle apparaît ainsi comme une branche très particulière de l'Énergétique générale.

Parmi les grandeurs qui servent à définir l'état d'un système, la *température* joue un rôle tout particulier. Tout d'abord, tant qu'on n'a pas défini, comme W. Thomson l'a fait le premier, ce qu'il faut entendre par *température absolue*, cette grandeur n'apparaît pas comme susceptible d'être *mesurée*, mais plutôt cotée ou *repérée :* d'une façon générale, on peut représenter la température par un nombre algébrique θ satisfaisant aux seules conditions suivantes : 1° en deux points également chauds il a la même valeur ; 2° en deux points inégalement chauds, il a des valeurs différentes, la plus grande correspondant au point le plus chaud.

Il est clair que toute fonction

$$\mathfrak{T} = f(\theta)$$

uniforme, continue et *croissante* peut, tout aussi bien que θ, permettre de repérer les températures. On conçoit donc l'existence d'une infinité d' « échelles thermométriques » pouvant servir à définir la température $\mathfrak{T}$. On fera, une fois pour toutes, choix d'une de ces échelles.

Le rôle tout spécial qui incombe, en Énergétique, à la température amène à l'importante notion de DÉFINITION NORMALE de l'état d'un système. Pour plus de simplicité, supposons qu'il s'agit d'un système dont toutes les parties sont portées à une même température $\mathfrak{T}$, et dont l'état puisse être représenté par un nombre limité de variables *indépendantes*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \mathfrak{T},$$

parmi lesquelles figure la température. L'ensemble des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, constitue ce que M. Duhem appelle l'*état abstraction faite de la température*. La modification virtuelle la plus générale du système résulte d'un changement d'état (abstraction faite de la température) accompagné d'un changement de température sans changement d'état.

On dit que le système est NORMALEMENT DÉFINI *lorsqu'un changement de température sans changement d'état n'entraîne aucun travail des actions extérieures.*

Lorsqu'on aura donné la définition d'un système, on devra toujours énoncer explicitement si l'on suppose que cette définition

est normale, car c'est là, en effet, une hypothèse d'où découlent pour le système d'importantes conséquences.

Les variables qui donnent d'un système une définition normale sont dites *variables normales*.

C'est ainsi que, pour le *fluide homogène* qu'étudie la Thermodynamique élémentaire, les deux variables « température, volume » sont des variables normales ; il n'en est pas de même des deux variables « température, pression ». En effet, pour un pareil fluide, un changement de température sans changement de volume n'amène aucun travail extérieur, tandis que ce travail n'est pas nul si la température varie à pression constante. De même, pour une *phase* telle que l'étudie la Mécanique chimique, les variables « température, volume » jointes aux variables qui définissent sa composition chimique donnent une définition normale.

Prenons un système normalement défini par sa température $\mathfrak{T}$ et par d'autres variables normales. Imposons-lui une modification virtuelle qui se réduit à un simple changement de température $\delta\mathfrak{T}$, sans changement d'état. Dans cette modification, le système dégage une quantité de chaleur qu'on peut écrire

$$Q = -c\delta\mathfrak{T};$$

le coefficient c se nomme *capacité calorifique normale* du système.

Un postulat fondamental, dû à Helmholtz, énonce que *toute capacité calorifique normale est essentiellement positive*. M. Duhem insiste sur ce point que c'est là un postulat autonome qui ne découle pas forcément du principe de Carnot, comme Helmholtz semble l'avoir pensé.

Voici une très importante propriété des systèmes dont la définition est normale. Soit S un système formé de deux parties indépendantes S_a, S_b. Son énergie interne $U(S)$ est, nous l'avons vu, la somme de trois termes

$$U(S) = U_a(A) + U_b(B) + \Psi_{ab}(A, B);$$

si les états A et B des systèmes S_a et S_b ont reçu tous deux une définition normale, *l'énergie potentielle mutuelle* Ψ_{ab} *de ces deux systèmes ne dépend pas de leurs températures et ne dépend que de leur état abstraction faite des températures.*

Bien entendu cette propriété fondamentale s'étend à un système S formé d'un nombre quelconque de parties indépendantes.

Considérons un système qui décrit un *Cycle de Carnot*, c'est-à-dire qui subit une modification *réversible* fermée, composée de deux modifications adiabatiques et de deux modifications isothermiques accomplies aux températures $\mathfrak{T}_0$ et $\mathfrak{T}_1$ ($\mathfrak{T}_0 < \mathfrak{T}_1$).

Soient Q_0 la quantité de chaleur dégagée par le système à la température $\mathfrak{T}_0$, et Q_1 celle dégagée à la température $\mathfrak{T}_1$. Le rapport

$$\rho = \frac{Q_0 + Q_1}{Q_1} = 1 + \frac{Q_0}{Q_1}$$

porte le nom de *coefficient économique* du cycle.

Le « théorème de Sadi Carnot » nous apprend que *tous les cycles de Carnot décrits entre les mêmes températures limites* $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$ *ont même coefficient économique*. M. Duhem fait découler ce théorème célèbre de deux postulats *distincts* auxquels il donne le nom de *postulat de R. Clausius* et de *postulat de W. Thomson*.

Le coefficient ρ ne dépendant que des températures $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$, on peut écrire

$$\frac{Q_1}{-Q_0} = f(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1);$$

si l'on remarque que la fonction $f(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1)$ est de la forme

$$f(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1) = \frac{T_1}{T_0},$$

où le numérateur T_1 ne dépend que de la température $\mathfrak{T}_1$ et où le dénominateur T_0 ne dépend que de la température $\mathfrak{T}_0$, on est conduit, avec W. Thomson, à l'importante notion de *température absolue*. La température absolue se trouve ainsi complètement définie à un facteur constant arbitraire près : l'usage est de déterminer ce facteur de telle manière que l'échelle des températures absolues soit *centigrade*, c'est-à-dire de telle façon que les nombres qui mesurent les températures absolues de la « glace fondante » et de l' « eau bouillante » diffèrent de 100 unités.

L'emploi de l'échelle absolue, dont nous ferons, dorénavant, constamment usage, permet de donner du théorème de Carnot l'énoncé définitif suivant : *Pour tout cycle de Carnot décrit entre les températures absolues* T_0 *et* T_1, *on a l'égalité*

$$\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} = 0.$$

Imaginons que, dans un pareil cycle, les deux températures T_0, T_1 tendent vers une même limite T, les deux modifications adiabatiques tendant à se réduire à zéro : nous obtenons, à la limite, un *cycle isothermique réversible*, parcouru tout entier à la température T, et ramenant le système à son état initial. Le théorème de Carnot nous apprend que, dans un tel cycle, la quantité totale de chaleur dégagée par le système est nulle : il en est par suite de même du travail τ des actions extérieures, équivalent à cette quantité de chaleur.

Un procédé de démonstration bien connu permet de déduire de là qu'*en une modification isothermique réversible* (non fermée) *faisant passer le système d'un état* 0 *à un état* 1, *le travail extérieur* τ *est égal à la variation d'une fonction* $\mathcal{G}$ *ne dépendant que de l'état du système*. Si le système est *normalement* défini par sa température absolue T et par son état e abstraction faite de la température, nous écrirons

$$\tau = \mathcal{G}(e_1, T) - \mathcal{G}(e_0, T),$$

ou, pour une modification élémentaire,

$$\tau = \delta_T \mathcal{G},$$

l'indice T de la lettre δ rappelant qu'il s'agit d'une modification *isothermique*.

Si à cette modification isothermique, qui consiste en une variation δe de l'état abstraction faite de la température, nous superposons, dans le but d'obtenir la modification la plus générale, une variation δT de la température, cela n'amène aucun nouveau travail extérieur, *parce que le système est normalement défini*. L'expression de ce travail extérieur reste donc

$$\tau = \delta_T \mathcal{G} = \delta \mathcal{G} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} \delta T.$$

Cette égalité montre qu'à la fonction $\mathcal{G}(e, T)$ on peut toujours ajouter une fonction arbitraire $\psi(T)$ de la température, car, en posant

$$\mathcal{F}(e, T) = \mathcal{G}(e, T) + \psi(T),$$

on obtient

$$(1) \qquad \tau = \delta_T \mathcal{F} = \delta \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \delta T.$$

Cette équation (1) détermine le travail accompli par les actions extérieures en une modification virtuelle réversible absolument quelconque : elle est donc la *condition d'équilibre du système normalement défini*. Son analogie avec l'équation fondamentale de la Statique rationnelle conduit à donner à la fonction $\mathcal{F}$ le nom de POTENTIEL THERMODYNAMIQUE INTERNE du système.

La fonction $\psi(T)$ est, jusqu'ici, tout à fait arbitraire. Il convient de la choisir de façon à faire acquérir au potentiel thermodynamique interne $\mathcal{G} + \psi$, de nouvelles propriétés intéressantes.

Faisant décrire au système un cycle de Carnot dont les deux isothermes T et $T + dT$ correspondent à des températures infiniment voisines, l'application à ce cycle du théorème de Carnot conduit à cette importante conclusion : *la quantité*

$$U - \mathcal{G} + T\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} = \varphi(T) \tag{2}$$

ne dépend que de la température T *du système.*

On détermine alors la fonction $\psi(T)$ par l'équation

$$\varphi(T) = \psi(T) - T\psi'(T), \tag{3}$$

ce qui, d'après l'égalité (2), donnera pour expression de l'énergie interne $U(e, T)$

$$U = \mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}. \tag{4}$$

En une modification virtuelle élémentaire issue d'un état d'équilibre, la quantité de chaleur dégagée par le système est

$$Q = \mathcal{E} - \delta U;$$

les égalités (1) et (4) nous montrent que cette quantité de chaleur est connue dès que l'on connaît le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$. Comme, d'autre part, on sait écrire aussi la condition d'équilibre (1), on peut dire que, si l'on connaît la forme du potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}(e, T)$ du système *normalement défini*, l'étude mécanique et calorimétrique de ce système en équilibre est achevée. A ce titre, le potentiel thermodynamique interne mérite le nom de FONCTION CARACTÉRISTIQUE du système, nom qui lui a été donné par F. Massieu.

L'énergie interne U n'est définie qu'à une constante additive

près A : il en est donc de même de la fonction $\varphi(T)$ définie par l'égalité (2) ; l'égalité (3) nous montre alors qu'à $\psi(T)$ on peut toujours ajouter une fonction linéaire $A + BT$: on voit, par suite, que le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ n'est défini qu'à une fonction linéaire près (d'ailleurs arbitraire) de la température absolue.

Posons

$$S(e, T) = -\frac{\partial \mathcal{F}(e, T)}{\partial T}. \tag{5}$$

Cette dérivée partielle (changée de signe) de $\mathcal{F}$ par rapport à la température absolue, *la définition du système étant normale*, est une fonction bien déterminée de l'état de ce système qui reçoit le nom d'ENTROPIE. L'égalité

$$Q = \bar{\mathcal{C}} - \delta U,$$

qui donne la chaleur dégagée dans une modification virtuelle réversible, devient, en tenant compte de (1), de (4) et de (5),

$$Q - T\,\delta S = 0, \tag{6}$$

et la relation (4) elle-même devient

$$\mathcal{F} = U - TS.$$

Dans une modification réversible quelconque faisant passer le système d'un état 0 à un état 1, l'égalité (6) permet d'écrire

$$\sum_1^0 \frac{Q}{T} = S(e_0, T_0) - S(e_1, T_1); \tag{7}$$

et, pour un cycle réversible fermé, on aura l'égalité de Clairaut

$$\sum \frac{Q}{T} = 0. \tag{8}$$

Les égalités (7) et (8) n'ont été établies qu'en supposant que le système a reçu une définition normale : elles ne sont donc applicables à un système que s'il est susceptible d'une telle définition ; mais s'il remplit cette condition, on peut les lui appliquer lors même qu'on le supposerait défini de quelque autre manière.

Considérons deux systèmes indépendants que nous désignerons

respectivement par les indices (1) et (2); ces deux systèmes sont portés à une même température T, et constituent par leur ensemble un système unique auquel nous appliquerons l'indice (1, 2). Nous supposons que chacun de ces systèmes a reçu une définition normale. L'énergie interne U_{12} du système (1, 2) peut s'écrire

$$U_{12} = U_1 + U_2 + \Psi_{12};$$

comme les systèmes sont normalement définis, le potentiel mutuel Ψ_{12} des deux systèmes partiels (1) et (2) *ne dépend pas de la température* T. Si l'on pose

$$\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 - \Psi_{12},$$

on reconnaît aisément que cette quantité $\mathcal{F}_{12}$ peut être prise comme potentiel thermodynamique interne du système (1, 2). L'entropie du système total (1, 2)

$$S_{12} = -\frac{\partial \mathcal{F}_{12}}{\partial T} = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T}$$

peut alors s'écrire

$$S_{12} = S_1 + S_2;$$

elle est la somme des entropies des systèmes (1) et (2).

Appliquons les principes précédents à un système holonome dont la définition *normale* soit donnée par $n+1$ variables *indépendantes*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad T,$$

au nombre desquelles figure la température. Le potentiel thermodynamique interne est une fonction uniforme de ces variables

$$\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T).$$

En une modification virtuelle élémentaire issue d'un état d'équilibre, le travail extérieur est susceptible de la forme

$$\mathfrak{T} = A_1\,\delta\alpha_1 + A_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + A_n\,\delta\alpha_n.$$

A_i désignant, par définition, l'*action extérieure* relative à la variable α_i; il n'y a pas, dans $\mathfrak{T}$, de terme en δT puisqu'une variation de la seule température n'amène aucun travail extérieur, les variables étant normales.

L'équation (1) fournit une autre expression du même travail extérieur

$$\mathfrak{T} = \delta_T \mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n} \delta\alpha_n.$$

L'identification conduit aux *équations d'équilibre du système*

$$(9) \qquad A_1 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1}, \qquad A_2 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_2}, \qquad \ldots, \qquad A_n = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n},$$

qui fournissent les valeurs des actions extérieures capables de maintenir le système en équilibre dans l'état $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T)$.

Considérons, outre l'état $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T)$ du système, deux autres états *voisins* de celui-là

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1 + d\alpha_1, & \alpha_2 + d\alpha_2, & \ldots, & \alpha_n + d\alpha_n, & T; \\ \alpha_1 - \delta\alpha_1, & \alpha_2 + \delta\alpha_2, & \ldots, & \alpha_n + \delta\alpha_n, & T; \end{array}$$

la température étant la même dans ces trois états; désignons par

$$\begin{array}{llll} A_1 + dA_1, & A_2 + dA_2, & \ldots, & A_n + dA_n; \\ A_1 + \delta A_1, & A_2 + \delta A_2, & \ldots, & A_n + \delta A_n \end{array}$$

les actions capables de maintenir le système en équilibre dans les deux nouveaux états. Les équations (9) différentiées donnent n équations de la forme

$$dA_i = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_2} d\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_n} d\alpha_n.$$

Multipliant ces n équations respectivement par $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_n$ et ajoutant, on voit immédiatement que le second membre est *symétrique par rapport aux lettres d et δ*. Cela permet d'écrire

$$dA_1 \delta\alpha_1 + dA_2 \delta\alpha_2 + \ldots + dA_n \delta\alpha_n = \delta A_1 d\alpha_1 + \delta A_2 d\alpha_2 + \ldots + \delta A_n d\alpha_n.$$

Cette égalité traduit la *loi de réciprocité*, énoncée sous sa forme générale par Lord Rayleigh, et dont les applications sont nombreuses. Envisageons, par exemple, un cylindre homogène étiré et tordu ; supposons que la torsion du cylindre diminue lorsqu'on augmente le poids tenseur sans faire varier le couple qui le

tord ; inversement le cylindre se raccourcira si, maintenant le poids tenseur invariable, on augmente le couple de torsion.

A partir d'un état d'équilibre $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T)$ du système imposons-lui une modification virtuelle quelconque $(\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_n, \delta T)$ et écrivons la quantité de chaleur dégagée sous la forme

$$Q = -(\rho_1 \delta\alpha_1 + \rho_2 \delta\alpha_2 + \ldots + \rho_n \delta\alpha_n + c\,\delta T).$$

Les coefficients ρ_i et c, se nomment les *coefficients calorifiques normaux* du système ; le coefficient c n'est autre que la capacité calorifique normale : celle qui, d'après le postulat de Helmholtz, est toujours positive. L'identification de cette valeur de Q avec l'expression précédemment écrite [équation (6)]

$$\begin{aligned} Q &= -T\delta S \\ &= \quad T\delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \end{aligned}$$

fournit les valeurs suivantes des coefficients calorifiques :

$$\rho_i = -T\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha_i\,\partial T}, \qquad c = -T\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}.$$

D'après les équations d'équilibre (9), le coefficient ρ_i peut encore s'écrire

$$\rho_i = -T\frac{\partial A_i}{\partial T};$$

si ce coefficient est nul, $\frac{\partial A_i}{\partial T}$ l'est également. On peut donc énoncer ce théorème : *Si la chaleur dégagée lorsque la variable α_i varie seule est nulle, l'action A_i correspondante ne dépend pas de la température.* Par exemple, un fil élastique dont l'allongement à température constante n'est accompagné d'aucun dégagement (ou absorption) de chaleur, est indilatable par une élévation de température.

Lorsque tous les coefficients ρ_i sont nuls, le système est dit *isothermo-isentropique*, parce que, dans toute modification isothermique réversible ($\delta T = 0$), on a $Q = 0$ et, par suite, $\delta S = 0$. Pour un système isothermo-isentropique, toutes les actions extérieures A_i sont indépendantes de la température.

Tout ce qui précède fait ressortir l'importance de la *définition*

normale d'un système. Lorsque les variables ne sont plus normales, il ne suffit plus, en général, de connaître *une seule* fonction de ces variables, pour pouvoir achever l'étude mécanique et calorimétrique du système. Toutefois certaines variables *non normales* jouissent de cette importante propriété : telles sont, en particulier, les variables

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad T,$$

les A_i étant les actions extérieures, liées aux variables normales par les équations d'équilibre (9). Avec ces variables, dites *variables inverses*, le rôle de fonction caractéristique est joué par la fonction suivante

$$\mathcal{H}(A_1, A_2, \ldots, A_n, T) = \mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T) - A_1\alpha_1 - A_2\alpha_2 - \ldots - A_n\alpha_n.$$

Reprenons un système défini par les variables normales (α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, T$) et maintenu en équilibre par les actions extérieures ($A_1, A_2, \ldots, A_n$). Supposons que ces actions éprouvent, à température T constante, des variations ($dA_1, dA_2, \ldots, dA_n$), qui seront appelées *actions perturbatrices*.

Il en résultera pour les variables normales des variations ($d\alpha_1$, $d\alpha_2, \ldots, d\alpha_n$), dont l'ensemble peut être appelé une *perturbation* de l'état d'équilibre. La quantité

$$t = dA_1\, d\alpha_1 + dA_2\, d\alpha_2 + \ldots + dA_n\, d\alpha_n$$

se nomme le *travail perturbateur* relatif à cette perturbation.

On dit qu'un système vérifie la *loi du déplacement isothermique de l'équilibre* lorsque toute perturbation, effectuée à température constante, fait prendre au travail perturbateur une valeur, infiniment petite du second ordre, qui soit *positive*.

Il ne serait pas exact de regarder la loi du déplacement isothermique de l'équilibre comme une loi générale de la nature, assimilable par exemple à la loi de Lenz pour l'induction électrodynamique. Et, en effet, il peut se faire qu'un même système vérifie cette loi lorsqu'il a reçu une certaine définition normale, et qu'il ne la vérifie plus lorsqu'il a reçu *une autre* définition normale. C'est ainsi, par exemple, qu'un gaz homogène qui suit la loi de Mariotte se conforme à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre s'il est défini par les variables normales « température,

volume spécifique » ; il ne la vérifie plus si ce sont les variables normales « température, densité » qui servent à le définir.

Quoi qu'il en soit, la loi du déplacement isothermique de l'équilibre est très souvent vérifiée par les systèmes qu'étudie le physicien, et elle entraîne d'intéressantes conséquences. L'une des plus importantes est la *loi du déplacement de l'équilibre par variation de température*, qu'on peut formuler ainsi : On fait varier de dT la température d'un système en maintenant invariables les actions qui le maintiennent en équilibre; ce système éprouve un certain changement d'état; si ce même changement d'état se produisait à température constante, il lui correspondrait un dégagement de chaleur de signe contraire à dT.

Par exemple, si un fluide homogène se dilate par une élévation de température à pression constante, la chaleur de dilatation de ce fluide est positive, et inversement.

D'autres corollaires de la loi du déplacement isothermique de l'équilibre sont fréquemment utilisés en Mécanique chimique : les *lois du déplacement de l'équilibre chimique sous volume constant*, ou *sous pression constante*, ou *par variation de pression* ont une importance capitale.

Nous nous sommes, jusqu'ici, exclusivement préoccupés de l'*équilibre* des systèmes. Abordons maintenant l'étude de leur *mouvement*, en envisageant tout d'abord le cas simple d'un *système de température uniforme :* la température T, variable d'ailleurs d'un instant à l'autre, sera supposée la même en tous les points du système. Nous supposons toujours que les $n+1$ variables

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad T$$

définissent normalement le système, dont $\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \ldots, T)$ représente le potentiel thermodynamique interne. La condition générale d'équilibre du système s'obtient, nous le savons, en écrivant qu'en toute modification virtuelle l'égalité

$$(1) \qquad \mathfrak{T} = \delta\mathcal{F} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T}\delta T$$

est satisfaite. Cette égalité (1) résume toutes les lois de l'équilibre ;

peut-on l'étendre de manière à obtenir une formule qui résumerait de même toutes les lois du mouvement?

En Mécanique rationnelle, le *Principe de d'Alembert* permet de passer ainsi de la Statique à la Dynamique : il consiste à remplacer, dans l'équation générale d'équilibre, le travail virtuel $\mathfrak{T}$ des actions extérieures, par la somme $\mathfrak{T} + \tau$ du travail virtuel $\mathfrak{T}$ des actions extérieures et du travail virtuel τ des actions d'inertie.

Le même procédé va-t-il réussir ici? Obtiendrons-nous les lois du mouvement en écrivant qu'en toute modification virtuelle l'égalité

$$\mathfrak{T} + \tau = \delta\mathcal{F} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T}\delta T \tag{10}$$

est vérifiée? Il n'en est ainsi que pour des systèmes très particuliers dits *sans viscosité*. Mais pour la plupart des systèmes cette égalité (10) ne peut être conservée comme loi générale du mouvement; elle doit être modifiée. On lui substituera l'égalité

$$\mathfrak{T} + \tau + \mathcal{R} = \delta\mathcal{F} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T}\delta T. \tag{11}$$

dans laquelle le terme complémentaire $\mathcal{R}$ prend le nom de *travail virtuel de la viscosité*.

Quelle forme convient-il de donner à ce terme $\mathcal{R}$? On fait à ce sujet une série d'hypothèses dont voici les principales.

Tout d'abord le travail de viscosité $\mathcal{R}$ est supposé fonction linéaire et homogène des quantités qui définissent la variation virtuelle :

$$\mathcal{R} = f_1\,\delta\alpha_1 + f_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + f_n\,\delta\alpha_n,$$

équation où l'on n'a pas mis de terme en δT, la viscosité étant supposée n'effectuer aucun travail dans un simple changement de température sans changement d'état. Les coefficients f_i se nomment *actions de viscosité;* ils dépendent de l'état $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T)$ du système et de ses « vitesses générales » $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n, T')$:

$$f_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n, T');$$

ils ne dépendent pas de la position absolue que le système occupe dans l'espace, et s'annulent si toutes les « vitesses générales » sont nulles. Le travail de viscosité $\mathcal{R}$ est nul dans toute modification virtuelle se réduisant à un déplacement d'ensemble. Enfin *ce*

travail de viscosité $\mathcal{R}$ *est négatif ou nul dans toute modification* RÉELLE.

Aux précédentes hypothèses, Lord Rayleigh en ajoute une autre, en admettant l'existence d'une *fonction dissipative* $\mathfrak{Z}$, dépendant de l'état du système et de ses vitesses générales, et telle qu'on ait

$$f_i = -\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \alpha'_i}.$$

L'équation générale (11) contient d'une façon linéaire et homogène les n quantités infiniment petites $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_n$. Elle doit être vérifiée quelles que soient ces variations. L'identification conduit donc à n équations différentielles qui sont les *équations de mouvement* du système : comme ces n équations renferment $n+1$ inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, T, elles ne suffisent pas, à elles seules, pour déterminer entièrement le mouvement général à partir de conditions initiales données : il faut leur adjoindre une *relation supplémentaire* qui consistera par exemple à se donner la température T en fonction du temps, ou encore à se donner une relation entre les variables T, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Moyennant l'adjonction d'une telle relation supplémentaire, le problème du mouvement se trouve entièrement déterminé.

Par définition, la quantité de chaleur dégagée par le système en une modification virtuelle a pour expression

$$Q = \mathfrak{T} + \tau - \delta U.$$

En tenant compte des égalités (4), (11) et (5), cette égalité se transforme en la suivante

$$Q = -T\,\delta S - \mathcal{R},$$

où S représente l'entropie.

Comme en toute modification réelle $\mathcal{R}$ est essentiellement *négatif ou nul*, nous concluons qu'en toute modification réelle on a

$$Q + T\,dS \geqq 0,$$

d'où l'on déduit, avec Clausius, que pour un système *isolé*, ou plus généralement pour un système dont toute modification réelle ne dégage aucune chaleur, *l'entropie ne peut jamais décroître.*

Jusqu'ici la température de notre système a été supposée uniforme, et il y a lieu de s'affranchir de cette restriction. Une première généralisation consiste à considérer un système $\mathcal{S}$ formé de plusieurs parties indépendantes $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, ..., $\mathcal{S}_l$ dont chacune est portée à une température uniforme T_a, T_b, ..., T_l, ces températures variant d'ailleurs d'un des systèmes partiels à l'autre, et variant avec le temps. Donnant aux quantités relatives à chaque système le même indice qu'à ce système lui-même, nous appelons e_a, e_b, ..., e_l, les états abstractions faites des températures des systèmes $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, ..., $\mathcal{S}_l$, supposés normalement définis. Ces états e_a, e_b, ..., e_l définissent pour le système $\mathcal{S}$ un état e abstraction faite des températures de ses parties.

Nous savons que l'énergie interne U du système $\mathcal{S}$ est donnée par l'égalité

$$(12)\qquad \begin{aligned} &U(e, T_a, T_b, \ldots, T_l) \\ &\quad = U_a(e_a, T_a) + U_b(e_b, T_b) + \ldots + U_l(e_l, T_l) + \Psi(e), \end{aligned}$$

l'énergie potentielle mutuelle Ψ ne dépendant que de l'état e et nullement des températures T_a, T_b, ..., T_l.

On est alors conduit à prendre, pour potentiel thermodynamique interne du système $\mathcal{S}$, la quantité

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{F}(e, T_a, T_b, \ldots, T_l) \\ &\quad = \mathcal{F}_a(e_a, T_a) + \mathcal{F}_b(e_b, T_b) + \ldots + \mathcal{F}_l(e_l, T_l) + \Psi(e). \end{aligned}$$

Et alors il viendra l'équation fondamentale généralisée, remplaçant l'équation (11),

$$(14)\qquad \mathfrak{T} - \tau + \mathfrak{R} = \delta\mathcal{F} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T_a}\delta T_a + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T_b}\delta T_b + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T_l}\delta T_l,$$

dans laquelle

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_b + \ldots + \mathfrak{R}_l$$

désigne le travail total de viscosité du système.

Nous définissons l'entropie du système total comme étant la somme des entropies des systèmes partiels

$$(15)\qquad S(e, T_a, T_b, \ldots, T_l) = S_a + S_b + \ldots + S_l = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T_a} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T_b} - \ldots - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T_l}.$$

Les expressions

$$Q_a = -T_a \delta S_a - \mathcal{R}_a,$$
$$Q_b = -T_b \delta S_b - \mathcal{R}_b,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

des quantités de chaleur dégagées par les diverses parties du système conduisent, pour la quantité totale de chaleur dégagée par le système entier, à l'égalité

$$\begin{aligned} Q &= Q_a + Q_b + \ldots + Q_l \\ &= -T_a \delta S_a - T_b \delta S_b - \ldots - T_l \delta S_l - \mathcal{R}_a - \mathcal{R}_b - \ldots - \mathcal{R}_l. \end{aligned}$$

Pour un système qui subit une modification *réelle adiabatique* ($Q = 0$), tous les $\mathcal{R}$ sont négatifs ou nuls : il vient donc l'inégalité, généralisant celle de Clausius,

$$T_a\, dS_a + T_b\, dS_b + \ldots + T_l\, dS_l \geqq 0;$$

on ne peut plus affirmer que l'entropie totale

$$S = S_a + S_b + \ldots + S_l$$

ne décroît jamais.

Lorsque les systèmes partiels s_a, s_b, ..., s_l, toujours portés chacun à une température uniforme, ne sont plus indépendants mais sont soumis à des *liaisons* qui les obligent à rester en contact entre eux, les choses sont un peu moins simples. Moyennant certaines hypothèses, on peut encore définir, pour le système total, une énergie interne, un potentiel thermodynamique interne, une entropie, par des égalités analogues à (12), (13) et (15). On écrira de même une équation générale du mouvement analogue à (14); mais, dans cette équation, le terme $\mathcal{R}$ contiendra, en outre du travail des actions de « viscosité intrinsèque » des diverses parties, le travail des actions de « viscosité aux divers contacts ».

On sait ce qu'il faut entendre par *quantité de chaleur dégagée* par le système en une modification virtuelle. Mais un point fort délicat se présente lorsqu'il s'agit de définir *la quantité de chaleur dégagée par* CHACUNE DES PARTIES *du système :* on peut, de cette quantité, donner *deux définitions différentes*, dont l'une est due à M. Duhem et dont l'autre a été proposée par M. Jouguet.

Celle de M. Duhem offre cet avantage que la quantité de

chaleur dégagée par le système total est la somme des quantités dégagées par les systèmes partiels. Il n'en est pas de même dans la définition de M. Jouguet qui localise, *sur les contacts mêmes*, une portion de la chaleur totale dégagée. Par contre, la méthode de M. Jouguet permet une généralisation plus complète des inégalités de Clausius. Au reste, les deux définitions coïncident toutes les fois que le travail des actions de « viscosité aux contacts » est nul, ce qui arrive en particulier si les parties en contact ne glissent pas les unes sur les autres.

Si l'on suppose que chacun des systèmes partiels $S_a, S_b, \ldots, S_l$ devient infiniment petit, leur nombre devenant infiniment grand, on peut, par un passage à la limite, aborder l'étude d'un système *continu* dans lequel la température varie d'un point au point voisin. Une discussion approfondie et certaines hypothèses sont alors nécessaires pour prouver que les intégrales définies en lesquelles se transforment les seconds membres des égalités (12), (13) et (15) ont un sens bien déterminé et peuvent servir à définir l'énergie interne, le potentiel thermodynamique interne et l'entropie du système continu.

Ces définitions une fois justifiées, M. Duhem écrit l'équation fondamentale qui, pour les systèmes continus, généralise l'équation (14), et, par une élégante analyse ressortissant au calcul des variations, en déduit les équations aux dérivées partielles du mouvement : la méthode fournit du même coup les « équations indéfinies » et les « équations aux limites ».

Lorsqu'il s'agit de définir la *quantité de chaleur dégagée par* UNE PARTIE *du système*, on retrouve, bien entendu, l'ambiguïté déjà signalée. Toutefois les deux définitions, celle de M. Duhem et celle de M. Jouguet, coïncident pour toute partie infiniment petite du système qui ne touche *aucune surface de discontinuité :* une telle partie, en effet, ne *glisse* pas sur les parties voisines, et il n'y a aucun « travail de viscosité au contact ». Pour les portions infiniment petites qui touchent à une surface de discontinuité le long de laquelle il y a glissement, il n'y a que « quasi-équivalence » des deux définitions, M. Jouguet localisant une partie du dégagement de chaleur *sur* la surface même de discontinuité, tandis que M. Duhem la localise tout entière *dans* les éléments de volume voisins de cette surface.

Dans l'étude d'un système de température uniforme, nous avons vu que les équations de mouvement déduites de l'équation fondamentale (11) ne suffisent généralement pas à elles seules pour déterminer complètement le mouvement général du système, et qu'il faut leur adjoindre une *relation supplémentaire*. Dans le cas d'un système formé de parties à des températures différentes, il faut autant de relations supplémentaires qu'il y a de températures distinctes; et, pour un système où la température varie d'une façon continue, il en faut une infinité.

Il est un cas intéressant où l'on sait écrire, au moins d'une manière formelle, ces relations supplémentaires, c'est celui où *la chaleur se propage uniquement par conductibilité*. Bornons-nous ici au cas classique, étudié par Fourier, du problème de l'équilibre et du mouvement de la température sur un corps invariable de forme et de position : les relations supplémentaires, qui deviennent alors les seules équations du problème, sont :

1° En chaque point intérieur, l'équation « indéfinie » des températures, qui est l'équation aux dérivées partielles de Fourier;

2° En chaque point de la surface frontière, la « condition aux limites » qui correspond au problème particulier envisagé.

Sous la condition qu'une certaine forme quadratique soit définie positive, ce problème admet une solution unique et bien déterminée, à partir de conditions initiales données. M. Duhem étudie avec détails la *stabilité* de cette solution.

Ce problème, relativement simple, de la stabilité de l'équilibre et du mouvement thermiques amène naturellement l'Auteur à aborder l'étude, beaucoup plus complexe, de la *stabilité de l'équilibre* en général, étude à laquelle il consacre les trois derniers Chapitres de son Ouvrage.

Pour les systèmes de la Mécanique rationnelle, on connaît une condition qui *suffit* à assurer la stabilité de l'équilibre : cette condition est donnée par le théorème bien connu énoncé par Lagrange et démontré avec rigueur par Lejeune-Dirichlet.

La recherche de conditions *nécessaires* pour la stabilité est beaucoup plus ardue. Les théorèmes les plus précis et les plus étendus à ce sujet sont dus à MM. A. Liapounoff et J. Hadamard.

Lorsqu'un système, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, se trouve en *équilibre relatif*, trois critères,

auxquels M. Duhem donne les noms de W. Thomson, H. Poincaré et A. Liapounoff, permettent d'affirmer, sous certaines conditions, la stabilité de cet équilibre relatif.

Ces théorèmes et ces critères de stabilité d'un système mécanique s'appliquent-ils aux systèmes plus généraux qu'étudie la Thermodynamique? Dans quelle mesure peut-on les étendre à la stabilité des systèmes *continus* dont l'état ne peut pas être défini au moyen d'un nombre limité de variables? A ces questions, M. Duhem répond d'une façon aussi complète que possible, en prenant toujours soin d'énoncer rigoureusement toutes les hypothèses et restrictions qu'exige chaque généralisation pour être légitime.

L'aperçu qui précède aura peut-être donné une idée de la variété et de l'importance des questions qu'expose le *Traité d'Energétique*. Encore ai-je dû me borner à n'indiquer que les grandes lignes, sans m'arrêter aux détails. Or, les détails, ainsi que la minutie et la rigueur, ne sont pas une des moindres qualités d'un Ouvrage où tous les principes de la Science énergétique sont soumis à une sévère critique. C'est qu'en effet le Livre tout entier est consacré bien plus à l'étude et à la discussion approfondie des *Principes* qu'à leurs applications à l'Hydrodynamique, à l'Élasticité, ou à la Mécanique chimique. Les applications de ces principes et leurs conséquences, M. Duhem nous les a d'ailleurs fait connaître dans de précédents Ouvrages.

Il convient, en terminant, de signaler la grande clarté d'exposition et la façon lumineuse dont sont présentées les questions les plus ardues. Le lecteur est toujours reconnaissant à l'auteur qui lui épargne l'effort d'une lecture pénible.

H. Vergne.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

THE METHOD OF ARCHIMEDES RECENTLY DISCOVERED BY HEIBERG. A Supplement to *The Works of Archimedes* 1897. Edited by Sir Thomas L. Heath. 1 vol. in-8°, 52 pages. Cambridge : at the University Press, 1912.

Tout le monde connaît la découverte faite en 1906, dans la bibliothèque de Jérusalem, par M. J. L. Heiberg, d'un précieux palimpseste où le savant érudit danois a pu déchiffrer plusieurs traités d'Archimède. Parmi les fragments ainsi retrouvés, se rencontrait, à côté d'ouvrages déjà connus du grand Syracusain, une pièce infiniment précieuse ; nous voulons parler du texte presque entier du *Traité des corps flottants*, du Περὶ ὀχουμένων, dont on ne connaissait, jusqu'ici, que la traduction latine, faite à la fin du XIIIe siècle par Guillaume de Moerbeke, et impudemment plagiée, au XVIe siècle, par Nicolò Tartaglia. Mais plus importante encore que la découverte du Περὶ ὀχουμένων était celle d'un livre, entièrement inconnu jusqu'ici, dont le titre était : Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημά τῶν πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος.

Ce *Traité de la méthode relative aux démonstrations mécaniques* qu'Archimède adresse à Ératosthène est, pour la connaissance de la Logique mathématique des Grecs, d'une importance sans égale ; il nous donne, en effet, des exemples de ces démonstrations qu'un géomètre accompli regardait comme suffisantes pour parvenir à la découverte de la vérité, mais comme insuffisantes pour en établir la certitude avec une entière rigueur. Aussi les mathématiciens de tous pays se montrèrent-ils avides de pouvoir lire, en leur propre langue, l'œuvre exhumée par M. Heiberg.

En juin 1907, la *Bibliotheca mathematica*, que M. G. Eneström dirige avec tant d'activité et d'érudition, en publiait, la première [1], une traduction allemande pour laquelle M. Heiberg

---

[1] J. L. HEIBERG und H. G. ZEUTHEN, *Eine neue Schrift des Archimedes* (*Bibliotheca mathematica*, 3te Folge, VII. Band, 4. Heft, p. 321-342, 27 juin 1907).

s'était associé l'illustre historien des Mathématiques de Copenhague, M. H. G. Zeuthen. M. Zeuthen était l'auteur du savant commentaire ([1]) qui suivait cette traduction.

La Revue générale des Sciences pures et appliquées ne demeura pas longtemps en arrière de la *Bibliotheca mathematica* ; en novembre et décembre 1907, elle donna, du traité *Des théorèmes mécaniques ou de la méthode*, une traduction française due à M. Th. Reinach ([2]) ; cette traduction était précédée d'une pénétrante Introduction due à M. Paul Painlevé ([3]).

En outre, quelques mois plus tard, la *Revue scientifique* publiait, sur le *Traité de la méthode d'Archimède*, une étude de M. G. Milhaud ([4]). Avec quelle finesse et quelle précision le délicat disciple de Paul Tannery a su pénétrer, jusqu'en ses replis les plus détournés et les plus cachés à la raison moderne, l'esprit géométrique des Grecs, on le sait de reste. Nul ne pouvait mieux dire par quoi le Traité nouvellement découvert se rattachait à l'œuvre déjà connue d'Archimède, par quoi, dans cette harmonieuse symphonie, il faisait entendre un accord nouveau ; et nul ne l'a mieux dit.

Les Anglais ont voulu, à leur tour, lire en leur langue le *Traité de la méthode*. Sir Thomas L. Heath vient d'en donner une traduction qui servira de supplément à l'édition anglaise des *Œuvres d'Archimède*, publiée en 1897.

Cette traduction est précédée d'une intéressante Introduction. Comme M. Milhaud, qu'il ne cite point, l'Auteur de cette introduction, Sir Thomas L. Heath, attire l'attention du lecteur sur cette phrase du Traité d'Archimède : « Les théorèmes dont Eudoxe a, le premier, découvert la démonstration, à savoir que le cône est le tiers du cylindre, la pyramide le tiers du prisme qui ont même base et même hauteur, il faut en attribuer une bonne part de

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 34-36.

([2]) Th. Reinach, *Un Traité de Géométrie inédit d'Archimède* (**Restitution d'après un manuscrit récemment découvert**). **Des théorèmes mécaniques ou de la méthode.** (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 18e année, n° 22 et 23, 30 novembre et 15 décembre 1907, p. 913-918 et 954-961.)

([3]) Paul Painlevé, *loc. cit.*, numéro du 30 novembre 1907, p. 911-912.

([4]) G. Milhaud, **Le Traité de la Méthode d'Archimède** (**Revue scientifique**, octobre 1908). — Réimprimé dans : G. Milhaud, *Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique*. Paris, 1911, p. 135-154.

mérite à Démocrite qui, le premier, a énoncé, sans démonstration, les propositions relatives à ces figures. » Elle est bien digne de remarque, en effet, cette phrase, car elle nous laisse deviner que la méthode des indivisibles, mère du calcul intégral, était déjà pratiquée par les atomistes hellènes.

PIERRE DUHEM.

BACHELIER (LOUIS). — CALCUL DES PROBABILITÉS. Tome I. 1 vol. in-4°, VII-518 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

M. Bachelier est un fervent du Calcul des Probabilités : dès 1900, dans sa Thèse de Doctorat sur la *Théorie de la Spéculation*, il s'efforçait de dégager la loi de probabilité à laquelle obéit, sans s'en douter, le marché de la Bourse à un moment donné, et ses conclusions supportaient la confrontation avec la réalité; en 1906, il développait sa théorie des probabilités continues (1), dont l'idée lui fut suggérée par la précédente étude; en 1908, il étendait ses vues à la probabilité des causes (2); en 1910, il obtenait l'autorisation d'exposer ses conceptions dans un cours libre à la Sorbonne; enfin aujourd'hui, pour propager davantage encore une doctrine qui lui est chère, il publie un énorme in-4° et nous en laisse espérer plusieurs autres.

Le présent Volume comprend deux Parties distinctes :

La première Partie contient cinq Chapitres consacrés aux probabilités discontinues et dans lesquels on reconnaît l'influence de l'enseignement de Poincaré : cet exposé de questions classiques permet cependant à l'Auteur d'apporter des simplifications ou des développements utiles à des solutions bien connues.

La seconde Partie, personnelle à M. Bachelier, est la plus étendue; elle comprend dix-huit Chapitres en lesquels se présente systématiquement la doctrine des probabilités continues. Bien entendu, la notion de probabilité continue qui s'introduit par l'hypothèse d'une série d'épreuves en nombre indéfiniment croissant,

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906, p. 259-327.
(2) *Ibid.*, 1908, 395-445.

en sorte que la succession de ces épreuves puisse être regardée comme continue, et que chaque épreuve soit considérée comme un élément, — cette notion, dis-je, n'est pas nouvelle, mais elle n'avait été utilisée que pour certaines questions spéciales. M. Bachelier s'est proposé de l'exploiter avec méthode. La théorie dont elle est le point de départ, dit-il, « ne dépend pas des probabilités discontinues, elle est mathématiquement exacte et ne procède pas par approximations. L'emploi direct et immédiat, pour toutes les questions, du calcul infinitésimal, beaucoup plus simple que le calcul des quantités finies, permet de résoudre des problèmes qui, par leur difficulté et leur complication, seraient inabordables avec les méthodes ordinaires. Le premier mérite de la théorie consiste dans le nombre des résultats nouveaux qu'elle a permis d'obtenir et dans le degré de difficulté des questions qu'elle a étudiées. Un autre avantage... est de résoudre effectivement les problèmes en donnant pour solutions, non des formules pratiquement incalculables, mais des formules facilement réductibles en nombres. »

Les Chapitres VI et XI sont consacrés à l'étude des probabilités continues, uniformes et non uniformes, des divers genres, simples ou connexes, et à la théorie des épreuves répétées qu'elles comportent. Ils forment l'introduction théorique à la théorie de la spéculation, exposée au point de vue abstrait dans les Chapitres XII à XV, et concernant, en quelque sorte, la statique du marché financier. La théorie du rayonnement de la probabilité d'un cours vers un cours voisin, qui occupe le Chapitre XVI est un acheminement vers la dynamique de la Bourse.

Les questions traitées jusqu'ici n'exigeaient que la considération des probabilités continues à un paramètre. L'Auteur envisage maintenant l'extension des propriétés rencontrées au cas de deux ou d'un plus grand nombre de paramètres (Chap. XVII et XVIII) en vue des applications qui suivent et qui concernent les problèmes classiques des probabilités géométriques (Chap. XIX) et les questions plus récentes posées par les probabilités mécaniques (Chap. XX et XXI).

M. Bachelier termine son Volume en montrant que les formules des probabilités discontinues peuvent, à l'aide de l'égalité asymptotique de Stirling, conduire aux formules des probabilités conti-

nues (Chap. XXII), et en étudiant les probabilités des causes (Chap. XXIII).

L'Auteur, tenant à ne pas faire œuvre d'analyste, a soigneusement banni tout développement mathématique inutile ; par contre, pour se mettre à la portée du plus grand nombre, il n'a pas redouté d'être taxé de prolixité. Si aucun nom n'est cité, c'est que les questions historiques et philosophiques sont réservées pour les Volumes ultérieurs.

Au total, ce Livre est une production intéressante d'un autodidacte et d'un convaincu : il recevra un accueil sympathique.

A. Boulanger.

GUILLEMIN (Auguste). — Tables de logarithmes a 3 quatrades et nombres correspondants avec 12-13 chiffres. *Système normal*. 1 vol. in-8°. XXI + 102 + 26 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Les Tables de M. Guillemin occupent 100 pages in-8°. Elles ont pour arguments les *quatrades*, c'est-à-dire les groupes de quatre chiffres, successives Q depuis 0000 jusqu'à 9999. Elles donnent alors pour chaque quatrade Q :

1° Le nombre N dont le logarithme vulgaire admet Q pour première quatrade de sa partie décimale ou mantisse;

2° Le logarithme du nombre α, tel que le logarithme de $1 + \alpha$ soit égal à 0,0000 Q.

Les nombres N sont donnés avec 13 chiffres significatifs jusqu'à Q = 7000, avec 12 seulement au delà de cette limite.

Les nombres $\log\alpha$ sont donnés avec 8 chiffres décimaux.

Des indications appropriées, affectant le dernier chiffre, fixent les valeurs de ces nombres à moins de $\frac{1}{8}$ de l'unité du dernier chiffre.

Il est dès lors facile de comprendre l'application des Tables à la résolution des deux problèmes fondamentaux qui se présentent dans l'usage des Logarithmes.

I. Soit à trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné.

Si la partie décimale du logarithme se compose d'une seule quatrade Q, on a immédiatement le nombre N correspondant.

Si la quatrade Q est suivie d'une seconde quatrade Q_1 et si α correspond à Q_1, le nombre cherché est

$$N_1 = N(1 + \alpha) = N + N\alpha;$$

or, la Table donne $\log\alpha$, et la quatrade Q fait connaître le logarithme de N; on a donc immédiatement $\log N\alpha$ et l'on est ramené au même problème.

Si l'on se borne à chercher les nombres avec 8 ou 9 chiffres, la Table fournit immédiatement le nombre qui correspond à $N\alpha$, et l'on obtient N_1 par une simple addition.

Si l'on veut trouver les nombres avec 12 ou 13 chiffres, on continue l'application des mêmes principes en observant que si $1 + \beta$ est le nombre qui admet pour logarithme 0,0000. 0000 Q, on a

$$\log\beta = \log\alpha - 4 - \frac{1}{2}\,0,0000\,Q.$$

On obtient d'abord $N\alpha$ et par suite N, avec 8 ou 9 chiffres comme plus haut; puis, si Q_2 est la troisième quatrade du logarithme donné et que β lui corresponde, le nombre cherché est

$$N_2 = N_1(1 + \beta) = N_1 + N_1\beta,$$

et la Table fournit immédiatement $N_1\beta$.

II. Soit à trouver le logarithme qui correspond à un nombre donné.

En appliquant les mêmes principes en sens inverse, on résout facilement la question; toutefois, si l'on veut 12 chiffres, et non seulement 8 au logarithme, l'opération se complique.

L'Ouvrage est précédé d'une Introduction et suivi d'une Note complémentaire relative à des projets de calcul d'autres Tables, en particulier de Tables trigonométriques logarithmiques.

L'idée fondamentale de l'auteur est ingénieuse : mais il ne semble pas que ses Tables offrent de telles facilités qu'elles soient destinées à remplacer dans la pratique celles qui existent actuellement à 8 décimales, ou pour les calculs de précision à 20 décimales et plus.

L'Introduction ne dit pas assez clairement comment les Tables ont été construites, et il ne paraît pas que M. Guillemin ait fait de l'interpolation l'usage qu'il aurait fallu. La marche indiquée dans la Note complémentaire pour calculer une Table des log sin et log tang est singulièrement laborieuse. Pour construire une telle Table, les logarithmes des nombres sont à peu près inutiles, et il est permis de contester l'affirmation de M. Guillemin quand il dit que ses Tables projetées pour les logarithmes des fonctions circulaires seraient les plus complètes qu'on ait jamais possédées.

H. Andoyer.

LECAT (Maurice). — Leçons sur la Théorie des Déterminants a n dimensions, avec Applications a l'Algèbre, a la Géométrie, etc. 1 vol. in-4°, xix-223 pages. Gand, Ad. Hoste, 1910.

1. M. Lecat déplore que la théorie des déterminants à n dimensions, peu connue des mathématiciens, soit tombée dans un oubli presque absolu. Il pense que cela tient à ce qu'il n'existe aucun Traité sur ce sujet, et il a voulu combler cette lacune. Il débute par une Notice historique d'où il résulte que c'est à L. Gegenbauer que l'on doit, dans cette théorie, les résultats les plus intéressants.

Vient ensuite un exposé comparé des notations employées par les divers auteurs. Puis, dans son Introduction, M. Lecat a réuni toutes les définitions dont il a besoin dans le cours de son Traité. Lire toutes ces définitions à la suite les unes des autres, il n'y faut pas songer. M. Lecat lui-même avertit le lecteur de ne pas le faire, et l'engage à passer de suite au Livre I, quitte à revenir à l'Introduction chaque fois qu'il faudra. Il eût été, à mon avis, bien préférable de donner les définitions dans le texte, au fur et à mesure que cela aurait été nécessaire. Mais je n'insiste pas sur ce détail de la rédaction.

2. Considérons un système de p^n *éléments* $b_{i_1,\ldots,i_n}$ où chaque indice, i_k, peut prendre les valeurs $1, \ldots, p$; on les suppose placés dans un espace à n dimensions rapporté à des axes orthogo-

naux aux points de coordonnées $i_1, \ldots, i_n$: ce système s'appelle une *matrice* de *classe* n, et d'*ordre* p.

L'indice i_k est dit de *rang* k.

Choisissons p éléments de manière que les indices de même rang constituent une permutation des p premiers nombres entiers, et cela, pour chaque rang, et effectuons le produit de ces p éléments; il existe P_p^{n-1} pareils produits ($P_p = 1.2\ldots p$). Leur somme est appelée *permanent* de classe n et d'ordre p.

Si, dans chaque produit, on dispose les facteurs par ordre de grandeur croissante des indices d'un rang déterminé, appelé *rang fixe*, et qu'on affecte le produit du signe $+$, ou du signe $-$, suivant que la somme des nombres d'inversions dans toutes les rangées variables est paire ou impaire, la somme algébrique de tous les termes affectés de signes ainsi obtenus est la valeur du *déterminant* de classe n et d'ordre p.

Si, dans l'élément $b_{i_1, \ldots, i_{\sigma-1}, \lambda, i_{\sigma+1}, \ldots, i_n}$, tous les indices sont fixes, sauf λ, qui prend les valeurs $1, 2, \ldots, p$, on a ce qu'on appelle une *file de rang* σ ; si le rang σ est le rang fixe, on dit que la file est *normale*.

Une *tranche* est l'ensemble des éléments où les indices d'un certain rang sont donnés, les autres indices étant variables. On appelle *strate* une tranche d'éléments perpendiculaires aux files normales.

3. Ces définitions posées, énonçons quelques propriétés. La *parité de la classe* joue un rôle important. Ainsi un déterminant de classe *paire* conserve sa valeur absolue, mais change de signe quand on échange entre elles deux tranches parallèles quelconques, de sorte qu'il est nul si les éléments correspondants de deux tranches parallèles sont égaux ; la même propriété a lieu pour un déterminant de classe impaire, *excepté si l'on échange entre elles deux strates*, auquel cas le signe n'est pas changé : il en résulte que deux ou plusieurs strates pourront être identiques sans que le déterminant soit nul.

De même, un déterminant de classe paire ne change pas quand on permute dans tous les termes deux rangées d'indices : pour un déterminant de classe impaire, la propriété n'a lieu que si les deux rangées permutées sont à indices variables; le déterminant change

de valeur si une rangée variable est permutée avec la rangée fixe.

Un déterminant général de classe impaire n a donc n valeurs différentes correspondantes aux n manières de choisir la rangée fixe.

4. Tout déterminant à n dimensions d'ordre p est égal à une somme algébrique de $P_p^{n\ c}$ déterminants à c dimensions et d'ordre p. Mais on peut aussi développer les déterminants par abaissement de l'ordre, au lieu d'abaisser la classe, et généraliser la règle de Laplace. Il en résulte que, si dans un déterminant ou permanent quelconque on multiplie par k tous les éléments qui, au même rang, ont un indice égal, le déterminant ou le permanent est multiplié par k. De même, tout déterminant (ou permanent) dans lequel les éléments d'une tranche sont chacun une somme algébrique de t termes peut se décomposer en une somme algébrique de t déterminants (ou permanents) de même classe et de même ordre, à éléments monomes.

Un déterminant de classe paire conserve sa valeur si, aux éléments d'une tranche on ajoute les éléments correspondants d'autres tranches parallèles, multipliés respectivement par des facteurs constants; mais pour un déterminant de classe impaire, la valeur sera changée si l'on opère comme on vient de l'indiquer sur les strates.

Un déterminant de classe supérieure à 2 est nul si, dans au moins deux tranches T parallèles autres que des strates, tous les éléments sont égaux sur chacune des p^{n-2} files parallèles à l'une des p^{n-1} directions appartenant à la tranche T.

Ajoutons que, si l'on appelle *éléments principaux* les éléments $b_{\alpha\alpha\ldots\alpha}$, et terme principal le produit des éléments principaux, la dérivée d'un déterminant (ou d'un permanent) dont les éléments sont des fonctions de x, s'obtient en prenant la dérivée du terme principal considéré comme produit. Chaque terme du développement est alors le terme principal d'un des déterminants (ou permanents) composants.

5. Le produit de deux déterminants, l'un de classe n_1, l'autre de classe n_2, peut se mettre sous la forme d'un déterminant de classe

$n_1 - n_2 - 2$ dont les éléments sont des polynomes ayant un nombre de termes égal à l'ordre commun des trois déterminants ; il peut se mettre aussi sous la forme d'un déterminant de classe $n_1 + n_2 - 1$ à éléments monomes.

6. Un Chapitre est consacré à l'étude de déterminants spéciaux. Par exemple, on appelle déterminants *isomères*, les déterminants de classe impaire qui ont toutes leurs strates identiques. Un déterminant isomère d'ordre p est égal à P_p fois celui de classe immédiatement inférieure formée par une strate.

On généralise, en considérant des déterminants dont un certain nombre de strates sont identiques sans qu'elles le soient toutes.

Sans pouvoir tout énumérer, mentionnons les déterminants à n dimensions dont les éléments sont des déterminants ordinaires (quadratiques, c'est-à-dire à deux dimensions). On démontre que le produit d'un nombre n pair de déterminants quadratiques d'ordre n, peut, à un facteur numérique près, être mis sous la forme d'un déterminant à n dimensions et de même ordre, dont les éléments sont des déterminants quadratiques d'ordre n.

On étudie ensuite les déterminants dans lesquels un certain nombre d'éléments sont nuls, par exemple, ceux d'une diagonale, en tout ou en partie ; on cherche le nombre de leurs termes, etc.

7. L'ensemble des éléments $b_{i_1 \ldots i_n}$ où les indices i peuvent prendre les valeurs $-q, \ldots, 0, \ldots, p$ forment une matrice de classe n et d'ordre $p + q + 1$; si p et q augmentent au delà de toute limite, on a un déterminant ou un permanent *d'ordre infini*. Si la valeur du déterminant ou du permanent tend vers une limite, quand p et q croissent au delà de toute limite, on dit qu'ils sont *convergents*.

La théorie des déterminants d'ordre infini à n dimensions est la généralisation de celle des déterminants d'ordre infini à deux dimensions. Ainsi, la valeur d'un déterminant convergent ne dépend pas de l'élément diagonal pris comme origine. Si l'on permute deux tranches d'un déterminant convergent, sa valeur change de signe, à moins que ce soit un déterminant de classe impaire et que les tranches permutées soient des strates.

On appelle *normale* toute matrice (déterminant ou permanent)

d'ordre infini, telle que la somme des éléments non diagonaux et le produit des éléments diagonaux soient absolument convergents. Toute matrice normale est convergente; si, dans une matrice normale, on remplace les éléments d'un nombre fini de tranches par une infinité de nombres finis arbitraires, la matrice reste convergente.

L'Auteur étudie les développements des déterminants d'ordre infini et, notamment, d'un déterminant normal; puis il s'occupe de la multiplication des déterminants d'ordre infini. Il démontre que le produit de deux déterminants normaux de classes n_1 et n_2 peut se mettre sous la forme d'un déterminant normal de classe $n_1 + n_2 - 1$ à éléments monomes, ou sous la forme d'un déterminant normal de classe $n_1 + n_2 - 2$ dont les éléments sont des séries.

8. Le Livre second est consacré aux applications, à l'Algèbre, à la Géométrie et à l'Arithmétique.

En Algèbre, il s'agit de la théorie des invariants des formes; certains invariants de ces formes ou de systèmes simultanés de formes, peuvent se représenter par des déterminants à n dimensions

Le déterminant $\Delta(f) = |b_{i_1, \ldots, i_n}|_p$ d'une forme

$$f = \sum_{i=1}^{p} \left[b_{i_1, \ldots, i_n} \prod_{\xi=1}^{n} (x_{i_\xi}) \right],$$

quand n est pair, est un invariant d'indice égal au degré n de la forme, c'est-à-dire que $\Delta(F) = \theta^n \Delta(f)$, θ étant le déterminant de la substitution.

De même, le déterminant

$$\Delta(f_\alpha) = |b_{\alpha, i_1, \ldots, i_n}|_p$$

d'un système de p formes

$$f_\alpha = \sum_{i=1}^{p} \left[b_{\alpha, i_1, \ldots, i_n} \prod_{\xi=1}^{n} (x_{i_\xi}) \right] \qquad (\alpha = 1, \ldots, p)$$

est un invariant simultané de ces formes, de degré p, et dont l'indice est égal au degré n des formes.

La notion du hessien peut être généralisée et l'on constate, par exemple, que tout hessien de classe paire d'une forme est un covariant de la forme ; que si une forme se réduit à une puissance d'une forme linéaire, tous ses hessiens sont nuls à partir de la classe 2, etc.

Le déterminant à $n+1$ dimensions et d'ordre p, des dérivées d'ordre n de p covariants d'une forme à p variables, est un nouveau covariant de la forme primitive, d'indice égal à la somme des indices des covariants, augmentée de n.

Le $k^{\text{ième}}$ composé de deux formes binaires est un déterminant de classe $k+1$ et de deuxième ordre.

Le Chapitre se termine par l'étude d'une méthode pour la formation d'invariants et de covariants et par l'application des déterminants cubiques à un système spécial d'équations ; c'est la seule application à la théorie des équations des déterminants à n dimensions.

9. Les applications à la Géométrie sont assez pauvres. Je ne vois guère que la généralisation du théorème de Ptolémée concernant deux systèmes de points en ligne droite et caractérisé par la formule $AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$. Si dans le plan on envisage trois systèmes de points numérotés 1, 2, 3, et qu'on désigne par $C^2_{i_1, i_2, i_3}$ l'aire du triangle, ayant pour sommets les points i_1, du premier système, i_2 du second, i_3 du troisième, on a $|C^2_{i_1, i_2, i_3}|_3 = 0$, quel que soit l'indice fixe.

Au contraire, si l'on considère quatre systèmes de quatre points dans l'espace à trois dimensions, on aura

$$|C^{(3)}_{i_1, i_2, i_3, i_4}|_4 = -P_4, C_1, C_2, C_3, C_4, \qquad P_4 = 24,$$

C_k étant le volume du tétraèdre formé par le $k^{\text{ième}}$ système de points.

On généralise avec n systèmes de n points dans l'espace à $n-1$ dimensions.

10. Le Chapitre des applications à l'Arithmétique est entièrement fondé sur les recherches de L. Gegenbauer, dont l'Auteur n'expose que le résumé. Il s'agit de la généralisation des théorèmes de Smith, de Hammond, de Césaro, etc. Les énoncés des proposi-

tions envisagées sont déjà assez compliqués pour que je renonce à les mentionner ici.

En résumé, les applications n'ont pas l'importance justifiant l'effort exigé pour édifier la théorie. Mais les recherches ne sont pas épuisées, et c'est de ce côté, sans doute, qu'il faudrait les diriger.

11. Il est bien clair que ce qui précède n'est qu'une indication sommaire de ce qu'on peut trouver dans le Livre de M. Lecat. En parcourant l'Introduction, on peut déjà s'en rendre compte ; il y est question de matrices symétriques, hémisymétriques, pseudosymétriques, pseudohémisymétriques, pansymétriques, panhémisymétriques, centro et cyclosymétriques, dichocyclosymétriques, dichopanactinosymétriques, diasymétriques, actinopolymorphes, zygomorphes, etc., etc.

De nombreux exemples illustrent les définitions et les théorèmes. M. Lecat prend soin d'indiquer les cas particuliers intéressants et aussi les propriétés des déterminants ordinaires dont les propositions établies sont des généralisations.

On observera que la théorie des déterminants ordinaires est née avec celle des équations linéaires et des formes linéaires, ce qui explique l'importance que les déterminants ont prise en Mathématiques.

Avec les déterminants à n dimensions, rien de pareil. On peut dire que l'instrument a été créé ici avant qu'on sache à quoi il pourrait servir. Cela explique peut-être l'indifférence que déplore M. Lecat, indifférence que son Traité contribuera sans doute à secouer.

R. Le Vavasseur.

M. Maurice Lecat a publié aussi un *Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions avec de nombreux exercices.* (1 vol. in-4°, XVI-156 pages. Gand, Ad. Hoste, 1911.)

Ce second Ouvrage est moins étendu et plus élémentaire que le premier.

ROUCHÉ (Eugène) et COMBEROUSSE (Ch. de). — Traité de Géométrie. 8e édition. *Première Partie :* Géométrie plane. 1 vol. in-8°, XLII-546 pages. *Deuxième Partie :* Géométrie dans l'espace. 1 vol. in-8°, XVIII-664 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Cet Ouvrage date de 1864. Les 6 premières éditions ont été rédigées par MM. E. Rouché et Ch. de Comberousse. La 7e édition, publiée en 1900, a été revue et augmentée par M. E. Rouché, et la 8e est conforme à la 7e. L'Ouvrage est imprimé en deux espèces de caractères. La partie imprimée en gros caractères contient le développement des programmes officiels de l'Enseignement secondaire. La partie imprimée en petits caractères contient d'utiles développements du texte destinés aux Candidats aux Écoles spéciales. Enfin des *Appendices* sont consacrés à l'exposition des nouvelles méthodes. L'élève studieux les lira à son aise sans se préoccuper de la nécessité de retenir immédiatement tous les détails; il y puisera une profonde admiration pour la Science dont les limites lui apparaîtront si lointaines, un goût des spéculations mathématiques qui donnera à son esprit plus de rectitude et de fermeté; et, à mesure que son avoir gagnera en étendue, par une réaction inévitable, les matières exigées, éclairées par ces nouvelles connaissances, perdront pour lui leur difficulté première.

Le succès des éditions successives de ce Livre a donné pleinement raison aux idées que les Auteurs ont suivies pour rédiger leur remarquable Ouvrage. Ils se sont appliqués sans cesse à compléter peu à peu leur travail.

Privé de la collaboration si précieuse de son ami Charles de Comberousse, E. Rouché a dû s'occuper seul de la 7e édition, assumant ainsi une tâche fort lourde. Toutefois, quoiqu'il fût seul, il est parvenu à tenir ce Traité au courant des progrès accomplis. Voici les additions ou les améliorations les plus importantes apportées dans la 7e édition, ou dans la 8e :

Les Notions historiques ont été notablement développées.

Un Chapitre sur la Symétrie a été introduit à la fin du premier Livre.

La Théorie des cercles isogonaux a été développée dans la première Partie pour le cas du plan.

Des Notes sur des sujets importants terminent chaque Volume.

A la fin du Premier Volume se trouvent 4 Notes :

1° Une Note *Sur la Mesure des grandeurs.*

2° Une Note *Sur l'impossibilité de la quadrature du cercle :* La rédaction de cette Note diffère dans la 7e édition ou dans la 8e, de celle qui se trouve dans les précédentes éditions. A la démonstration exacte, mais compliquée de M. Lindemann, E. Rouché a substitué la preuve plus facile de M. Hilbert (*Mathematische Annalen*, 1893).

3° Une Note *Sur la Géométrie récente du triangle :* Cette Note, qui se trouvait dans la 6e édition, est due à M. Neuberg. « Nul n'a, d'ailleurs, plus que lui contribué à l'institution de cette théorie », a écrit E. Rouché dans son *Avertissement.*

4° Une Note *Sur la Géométrographie :* Comme un assez grand nombre de personnes ont exprimé à E. Rouché le désir de trouver dans ce Traité des notions sur la *Géométrographie*, l'Auteur s'est adressé à l'inventeur, M. Lemoine, qui a bien accueilli sa demande.

A la fin du Second Volume se trouvent aussi 4 Notes :

1° Une Note *Sur l'application des déterminants à la Géométrie.*

2° Une Note *Sur la Géométrie non euclidienne :* Cette Note, qui diffère de celle qui se trouvait dans la 6e édition, consiste en une belle Étude que le regretté Henri Poincaré a eu l'obligeance de composer pour ce Traité et qui sera certainement fort appréciée des lecteurs. Elle occupe 19 pages.

3° Une Note *Sur les transformations linéaires et quadratiques, les coniques associées à un triangle et les systèmes de trois figures directement semblables.* Les Chapitres de cette Note très intéressante ont pour titres: *Formes perspectives.— Transformations linéaires. — Transformations quadratiques. — Inversion triangulaire; hyperboles équilatères circonscrites à un triangle. — Transformation par points réciproques; ellipses de Steiner. — Figures affixes superposées. — Système de deux figures semblables superposées. — Système de trois figures directement semblables.* Elle est suivie de 29 Exercices.

4° Une Note *Sur la Géométrie récente du tétraèdre.*

Les divers Livres, en lesquels les matières du *Traité de Géométrie* sont distribuées, sont terminés chacun par un *Appendice* (en petits caractères) qui contient le développement de questions souvent publiées en Ouvrages, sous les titres de *Géométrie moderne; Géométrie récente; Géométrie projective*, etc. Les élèves des Classes de Mathématiques supérieures et de Mathématiques spéciales étudieront avec le plus grand fruit ces questions qui sont une très bonne *Introduction* à l'étude des Mathématiques élevées.

Enfin, chaque Livre est suivi d'un grand nombre d'Exercices gradués à résoudre; plusieurs Problèmes présentent de sérieuses difficultés. Le Traité contient 1090 Exercices.

Ce *Traité* est le plus complet des Ouvrages publiés en France sur la Géométrie; il a toujours été tenu au courant des résultats des recherches les plus nouvelles. Il n'est donc pas surprenant qu'il ait joui d'un aussi grand succès. Je suis persuadé que l'Éditeur ne manquera pas, pour la prochaine édition, de consulter quelque géomètre qui saura, comme les regrettés Auteurs, mettre ce *Traité* en harmonie avec les progrès en Géométrie.

Er. L.

JORDAN (CHARLES) et FIEDLER (RAYMOND). — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COURBES CONVEXES FERMÉES ET DE CERTAINES COURBES QUI S'Y RATTACHENT. 1 vol. in-8, xv-73 pages. Paris, Hermann, 1910.

MM. Jordan et Fiedler représentent les courbes qu'ils étudient en les considérant comme enveloppes de droites ayant pour équation

$$(1) \qquad x \sin \alpha - y \cos \alpha - p = 0,$$

p étant une fonction de α. On sait que le rayon de courbure ρ s'exprime par

$$\rho = p + p'',$$

p'' étant la dérivée seconde de p par rapport à α. Les variables ρ et α

constituent un système de coordonnées *intrinsèques* des courbes en question.

Cela posé, les Auteurs étudient les courbes qu'ils appellent *courbes* Π, et qui correspondent au cas où, dans l'équation (1), p est une fonction uniforme de α, de période 2π. Ces courbes sont fermées et convexes, c'est-à-dire que, si l'on joint deux points situés dans la région intérieure à l'une de ces courbes par un segment de droite, tous les points du segment sont dans cette région intérieure.

Les courbes Π correspondent par dualité à des courbes fermées, sans point multiple, ayant une tangente déterminée en chaque point.

Les courbes Π_0 sont des courbes Π correspondant à une fonction p telle que

$$p(\alpha) + p(\alpha + \pi) = 0.$$

On appelle *centrique* de la courbe correspondant à une équation de la forme (1), la courbe obtenue en remplaçant dans cette équation $p(\alpha)$ par $\frac{1}{2}[p(\alpha) + p(\alpha + \pi)]$; il est facile de reconnaître que cette courbe admet un centre de symétrie.

On appelle tangentes *opposées* des tangentes dont la direction diffère de π; les points de contact de ces tangentes sont les points *opposés;* on appelle *diamètre* la droite qui joint ces points; on appelle *médiale* d'une courbe le lieu des milieux des diamètres de cette courbe.

MM. Jordan et Fiedler étudient les propriétés des *centriques* et des *médiales* des courbes Π ou Π_0 ainsi que les développantes, développées, polaires, etc., de ces courbes. Inversement ils déterminent les courbes ayant une *centrique* ou une *médiale* donnée, les courbes qui sont leurs propres *centriques*, etc.

Les Auteurs ont eu l'excellente idée de donner, à la fin de leur Ouvrage, un résumé des propositions concernant les courbes qu'ils ont étudiées; ce résumé, avec les renvois qu'il indique aux différents paragraphes, est très commode pour le lecteur qui veut retrouver un théorème ou une définition.

Je crois devoir insister sur certains résultats, très intéressants, qui semblent peu connus, bien qu'on les retrouve dans un Mémoire d'Euler, sur les courbes triangulaires, datant de 1778. Quelques

auteurs appellent *largeur* d'une courbe, qui admet deux tangentes parallèles à une direction donnée, la distance de ces deux tangentes. Si l'on cherche les courbes de largeur constante $2a$, on trouve que les points de contact de deux tangentes parallèles sont sur une même perpendiculaire à ces tangentes, et que la longueur de chacune de ces courbes est $2\pi a$. On serait tenté de croire que le cercle est la seule courbe de largeur constante; or il y en a d'autres. Des courbes de ce genre sont utilisées dans le mécanisme connu sous le nom d'*excentrique à cadre*. Il est vrai que ces courbes sont ordinairement construites au moyen de deux courbes, dont l'une est quelconque, pourvu qu'elle soit un arc convexe limité par une corde qui est normale à ses deux extrémités; l'autre étant obtenue en portant sur les normales à la première, dans le sens de la concavité, une longueur égale à la corde limite. Mais Euler a montré que les développantes de courbes triangulaires donnent des courbes de largeur constante, et MM. Jordan et Fiedler donnent une solution générale; il suffit de prendre une fonction continue $f(\alpha)$ telle que l'on ait, pour toute valeur de α,

$$f(\alpha) + f(\alpha + \pi) = 0.$$

L'enveloppe de la droite

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha) + a$$

donne, lorsque a est supérieur à un maximum qui dépend de $f(\alpha)$, une courbe convexe de largeur $2a$. Par exemple, si l'on prend

$$f(\alpha) = \sin(2p+1)\alpha,$$

on doit prendre

$$a \geqq \tfrac{1}{4}p(p+1).$$

Ch. Bioche.

MASSON (Mlle Renée M.). — Du roulement et des épicycloïdes en Géométrie non euclidienne. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève, pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences mathématiques.* 1 vol. grand in-8°, 59 pages. Genève, Albert Kündig, 1912.

Dans le plan euclidien, lorsqu'un cercle mobile roule sur un cercle fixe, tout point invariablement lié au cercle mobile décrit

une courbe *cycloïdale*. Il y a trois genres de courbes cycloïdales : la cycloïde, l'épicycloïde et l'hypocycloïde, lesquelles peuvent être allongées, normales ou raccourcies.

Passant au plan non euclidien, on désigne par courbe cycloïdale toute courbe engendrée par le roulement de deux *cycles* l'un sur l'autre. Le plan de Riemann, comme celui d'Euclide, n'admet qu'une seule espèce de cycle, le *cercle*, mais celui de Lobatchewski en admet trois, savoir : le *cercle*, l'*équidistante*, et l'*horicycle*. Chaque combinaison de deux de ces cycles fournit alors une espèce de courbe cycloïdale.

On sait que l'on peut faire correspondre au plan riemannien la sphère de l'espace euclidien, et de même au plan lobatchewskien la pseudo-sphère de l'espace euclidien. A ce point de vue, on pourra se représenter les courbes cycloïdales non euclidiennes, comme engendrées par le roulement l'un sur l'autre de deux cycles tracés, soit sur une même sphère, soit sur une même pseudo-sphère.

C'est à l'étude de ces courbes qu'est consacré le travail de Mlle R. Masson. Celle-ci établit les formules relatives à leur arc, à leur aire, à leur courbure, en commençant par les déduire, comme cas particuliers, de formules s'appliquant à des courbes beaucoup plus générales. Mlle Masson montre ensuite comment les courbes cycloïdales peuvent être étudiées directement, et notamment comment on peut obtenir, par des considérations cinématiques et géométriques, leur équation polaire différentielle. Les formules relatives aux deux géométries sont assez symétriques : les fonctions trigonométriques circulaires qui figurent dans le cas du plan de Riemann sont remplacées, dans le cas du plan de Lobatchewski, par les fonctions hyperboliques.

H. Vergne.

SALOMON (C.). — L'ÉTOILE MAGIQUE A 8 BRANCHES ET LES ÉTOILES HYPERMAGIQUES IMPAIRES (*Essais de Magie arithmétique polygonale*). Une brochure grand in-8°, 23 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Les 8 côtés de l'octogone régulier étoilé se coupent en 24 points. Est-il possible de placer à chacun de ces 24 points d'intersection

l'un des 24 premiers nombres entiers consécutifs, de manière que la somme des nombres inscrits sur chaque côté soit constante et égale à 6 fois le nombre moyen $\frac{1+24}{2}$ ou 75?

M. C. Salomon résout ce problème par la superposition de deux abaques préalables : aux 24 sommets d'une première étoile, il inscrit d'une certaine façon les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, chacun se trouvant répété 3 fois; aux 24 sommets d'une seconde étoile, il inscrit d'une certaine façon les multiples de 8, c'est-à-dire 0, 8, 16, chacun de ces nombres étant répété 8 fois. Superposant ces deux abaques étoilés et écrivant sur chaque sommet la somme des chiffres correspondants des deux abaques, il obtient l'étoile magique à 8 branches.

Un procédé analogue fournit des étoiles impaires.

La méthode, on le voit, rappelle celle qui fut employée par De la Hire pour l'obtention des carrés magiques, bien que les deux problèmes soient différents.

H. Vergne.

VUIBERT (H.). — Les Anaglyphes géométriques. 1 vol. in-8°, 32 pages. Paris, H. Vuibert, 1912.

Les anaglyphes ont été imaginés par Ducos de Hauron pour permettre la vision directe du relief sans le secours du stéréoscope. Imaginons, tracées sur un même Tableau, deux figures F_G et F_D qui soient les projections d'un même corps F, faites respectivement de l'œil gauche et de l'œil droit d'un observateur. Il résulte de la théorie de la vision binoculaire qu'un observateur S regardant F_G et F_D aura l'impression de voir le corps F lui-même, à condition que l'œil gauche de S ne puisse apercevoir que F_G, l'œil droit n'apercevant que F_D. Le stéréoscope permet de réaliser cette dernière condition; on peut y arriver encore en figurant F_G et F_D en rouge et en vert respectivement, et en munissant l'œil d'un lorgnon formé d'un écran vert pour l'œil gauche, d'un écran rouge pour l'œil droit.

L'ensemble des figures F_G et F_D s'appelle alors un *anaglyphe;* observé à travers le lorgnon bicolore il produit l'impression complète du relief.

On conçoit qu'un tel procédé, moins parfait sans doute que la stéréoscopie sous le rapport de la facilité et de la netteté de la vision, lui est très supérieur au point de vue de la vulgarisation; sa simplicité même lui promet un large champ d'expansion dans une foule de questions, dans l'enseignement de la Géométrie, par exemple : il est permis d'espérer que beaucoup d'élèves, qui ont tant de difficultés à *voir* dans l'espace, se familiariseront plus vite avec les démonstrations, lorsque toutes les figures nécessaires auront été réduites en anaglyphes. C'est ce qu'ont pensé MM. H. Richard et H. Vuibert, en publiant une première série de trente figures anaglyphiques se rapportant à la Géométrie dans l'espace, à la Descriptive, à la Cristallographie et à la Physique. Elles ont été très judicieusement choisies pour faire apprécier les avantages des anaglyphes; dessinées d'une façon correcte et précise, elles produisent sur l'observateur le moins prévenu une impression saisissante. Espérons que MM. H. Vuibert et H. Richard pourront, comme ils l'annoncent, donner de nombreux suppléments à leur premier Recueil; ils ne rendraient pas seulement de grands services à l'enseignement, ils procureraient aussi un réel plaisir aux géomètres en leur représentant, par exemple, les quadriques, le cylindroïde, les surfaces de Plücker et de Kummer, les surfaces cyclides et les principales surfaces de la Géométrie infinitésimale.

R. Garnier.

STOLZ (Otto) et GMEINER (J. A.). — Theoretische Arithmetik. I Abteilung : *Allgemeines; die Lehre von den rationalen Zahlen.* Zweite Auflage umgearbeitet von J. Anton Gmeiner. (*Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*, mit *Einschluss ihrer Anwendungen*, Band IV[1].) 1 vol. in-8°, avec 8 figures, VI-148 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

Le *Bulletin* a rendu compte précédemment de la première édition de l'Ouvrage de MM. O. Stolz et J. A. Gmeiner ([1]); ce dernier vient de publier une seconde édition de la première Partie

([1]) T. XXV, 1901, p. 35; t. XXVIII, 1903, p. 117; t. XXIX, 1905, p. 153.

de la *Theoretische Arithmetik*, en utilisant les notes et indications laissées par O. Stolz. On y retrouvera cette même recherche de l'enchaînement logique des théories, ce même souci de la rigueur et de la précision qui caractérisaient déjà l'édition précédente.

Voici les principaux points où la nouvelle édition diffère de la première :

Dans la première Partie (Introduction, concepts de grandeur et de nombre) les axiomes de l'égalité ont été présentés sous un ordre nouveau; le nombre des axiomes relatifs à l'inégalité a été réduit à deux.

Dans la deuxième Partie (les nombres naturels), le nombre des propositions fondamentales auxquelles M. Peano ramène la théorie des nombres naturels a été diminué de un, tandis que la soustraction, la division, l'élévation aux puissances et les théorèmes fondamentaux de la théorie des nombres ont été plus largement traités.

La troisième Partie (Théorie analytique des nombres rationnels) a été scindée en deux, la première exposant d'une façon nouvelle la théorie générale des lois du calcul, la seconde étant consacrée à l'introduction analytique des nombres rationnels.

Enfin, dans la quatrième et dernière Partie (Théorie synthétique des nombres rationnels, fractions systématiques), l'addition des fractions précède cette fois la multiplication, tandis que la représentation géométrique des nombres naturels et la théorie de leurs opérations fondamentales sont exposées avec plus de détails que dans l'édition précédente.

R. Garnier.

MÉLANGES.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME CONCERNANT LES SURFACES DE RIEMANN;

PAR le Prof. M. TIKHOMANDRITZKY.

I.

Une surface de Riemann étant donnée, trouver une équation algébrique

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0 \tag{1}$$

relative à cette surface, c'est-à-dire une équation qui définirait une fonction algébrique uniforme sur la surface de Riemann donnée; voilà le problème dont je vais indiquer ici la résolution.

C'est un problème indéterminé, car toute fonction rationnelle $z = R(x, y)$ de x et y sera, elle aussi, uniforme sur la même surface de Riemann, mais sera liée à x par une autre équation, notamment

$$\Phi(\overset{m'}{x}, \overset{n}{z}) = \prod_{i=1}^{n} [z - R(x, y_i)] = 0,$$

du même degré n par rapport à z, si elle est irréductible [1], mais d'un degré m' par rapport à x, en général différent de m. C'est pourquoi nous nous restreindrons à trouver l'équation (1) dans le cas où m a la moindre valeur possible.

Le discriminant de l'équation cherchée (1) se décompose en

---

[1] *Voir* le paragraphe 10 de mes *Éléments de la théorie des intégrales abéliennes*, Saint-Pétersbourg, 1911.

deux facteurs, l'un essentiel et l'autre non essentiel ([2]) :

$$\Delta = V.W \tag{2}$$

de degrés N et 2A respectivement, liés par l'équation

$$N - 2A = 2m(n-1), \tag{3}$$

où N est le nombre de tous les lacets binaires, se rapportant à tous les points de ramification, situés au fini et à l'infini, de la surface de Riemann donnée, et par conséquent est connu. L'équation (3) contient deux inconnues : m et A, d'où l'on aperçoit aussi l'indétermination de notre problème en général ; mais, après la restriction ajoutée par rapport à la valeur de m, on n'a qu'à chercher la plus petite valeur de A pour laquelle $N - 2A$ devient divisible par $2(n-1)$.

Par exemple, pour la surface de Riemann donnée sur la figure I, à la fin de nos *Eléments*, où $n = 3$, en ajoutant les nombres des lacets binaires aux points de ramification a, b, c, ∞, on a

$$N = 1 + 2 + 1 + 2 = 6;$$

l'équation (3) sera donc

$$6 - 2A = 4m;$$

la plus petite valeur de A, pour laquelle le côté gauche sera divisible par $2(n-1) = 4$, est $= 1$; par conséquent, on aura $m = 2$.

Ayant trouvé m, on pourra écrire l'équation (1) avec les coefficients indéterminés, ensuite calculer son discriminant par la méthode connue. S'il y a des points de ramification à l'infini, on égalera à zéro autant des premiers coefficients du discriminant développé suivant les puissances descendantes de x qu'il y a d'unités dans la somme des lacets binaires relatives à ces points de ramification, ensuite on divisera ce qui en restera par le produit des facteurs de V qui se rapportent aux points de ramification situés au fini, en arrêtant la division au moment où l'on arrive à un reste du degré moindre que ce produit ; on égalera ensuite tous les coefficients du reste à zéro. Le quotient devant être un

---

([2]) *Ibid.*, § 57, p. 58-59.

carré parfait, on en déduira de nouvelles conditions pour les coefficients indéterminés en (1).

Dans le cas de notre figure I, on devra égaler à zéro deux premiers coefficients du discriminant, et diviser ce qui en restera après cela par le produit des facteurs de V se rapportant aux points a, b, c, c'est-à-dire par

$$(x-a)(x-b)^2(x-c);$$

puis égaler à zéro les quatre coefficients du reste. Le quotient sera du deuxième degré; la condition d'être un carré parfait donnera encore une condition; on aura de cette manière

$$2+4+1=7,$$

conditions entre $3\times 4=12$ coefficients indéterminés. Mais comme les facteurs de W ne peuvent être différents de ceux de V, on aura de là, en général, de nouvelles conditions. Dans le cas de notre figure I, le quotient doit être égal au carré de $x-a$, ou de $x-b$, ou de $x-c$; c'est ce qui ajoute encore une condition; donc après cela il restera encore quatre coefficients indéterminés. Mais il faut encore qu'autour des points a, b, c, les racines de l'équation (1) se permutent dans l'ordre indiqué sur la figure, c'est ce qui donnera encore quatre conditions dans le cas de notre figure I.

S'il arrivait que toutes ces conditions ne soient pas compatibles, on devrait alors augmenter A d'une unité et recommencer les calculs pour la nouvelle valeur de m qui en résulterait.

II.

Il ne sera pas inutile d'illustrer la méthode précédente par un exemple simple.

1. Soit donnée une surface de Riemann à trois feuillets, avec deux points de ramification : $x=+1$, avec la substitution (y_1, y_2), et $x=-1$, avec la substitution (y_2, y_3), et les deux lignes de passage $+1, \ldots, +\infty$ et $-1, \ldots, -\infty$:

qui se rencontrent sur la sphère de Riemann au point O′, qui sera aussi celui de ramification avec la substitution $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, comme on le vérifie aisément, par conséquent du deuxième ordre. Le nombre total N des lacets binaires sera donc

$$N = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Le nombre des feuillets étant $n = 3$, la formule de Riemann [1] nous donnera pour le genre de la surface

$$p = \frac{1}{2} N - n + 1 = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Pour le degré du discriminant de l'équation cherchée, nous aurons [2]

$$N + 2A = 4 + 2A = 2m(n-1) = 4m;$$

cette formule donne la valeur minima de m pour $A = 0$, notamment $m = 1$; l'équation cherchée, relative à la surface de Riemann donnée, aura donc la forme

$$(1) \qquad (ax+b)y^3 + (cx+d)y^2 + (ex+f)y + (gx+h) = 0.$$

En calculant son discriminant par une des méthodes connues, on trouvera

$$\begin{aligned}(2) \quad \Delta(x) = {} & [4ae^3 - c^2e^2 - 18aceg + 27a^2g^2 + 4c^3g]x^4 \\ & + [12ae^2f + 4be^3 - 2cde^2 - 2c^2ef \\ & \quad - 18(adeg - bceg + aceh + acfg) \\ & \quad + 54(abg^2 + a^2gh) - 12c^2dg + 4c^3h]x^3 \\ & + [12acf^2 - 12be^2f - d^2e^2 - 4cdef - c^2f^2 \\ & \quad - 18(bdeg + adeh + bceh + adfg + bcfg + acfh) \\ & \quad - 27(b^2g^2 + 4abgh + a^2h^2) + 12gcd^2 + 12c^2dh]x^2 \\ & + [4af^3 + 12bef^2 + 2d^2ef + 2cdf^2 \\ & \quad + 18(bdeh + bdfg + adfh + bcfh) \\ & \quad + 54(b^2gh + abh^2) + 4d^3g + 12cd^2h]x \\ & \quad + [4bf^3 - d^2f^2 - 18bdfh + 27b^2h^2 + 4d^3h] = 0.\end{aligned}$$

Un point de ramification du second ordre étant à l'infini, le

---

(1) *Voyez* mes *Éléments*, p. 60, formule (19).

(2) *Ibid.*, p. 71, formule (17).

degré de cette équation doit s'abaisser de deux unités; pour cela, posons égaux à zéro les deux premiers coefficients et nous aurons les deux équations de condition suivantes :

$$[1] \qquad 4ae^3 - c^2e^2 - 18aceg + 27a^2g^2 + 4c^3g = 0;$$

$$[2] \qquad 12ae^2f + 4be^3 - 2cde^2 - 2c^2ef - 18(adcg + bceg - aceh + acfg) + 54(abg^2 + a^2gh) + 12c^2dg + 4c^3h = 0.$$

L'équation (2) se réduira par cela à la forme

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

qui doit être divisible par $x^2 - 1$; donc le reste de la division

$$Bx + (A + C)$$

doit être identiquement égal à zéro; par conséquent, on doit avoir $B = 0$ et $A + C = 0$, ce qui nous donne les deux équations suivantes :

$$[3] \quad 4af^3 + 12bef^2 - 2d^2ef - 2cdf^2 - 18(bdeh + bdfg + adfh + bcfh) + 54(b^2gh + abh^2) + 4d^3g + 12cd^2h = 0;$$

$$[4] \quad 12aef^2 + 12be^2f - d^2e^2 - 4cdef - c^2f^2 - 18(bdeg + adeh + bceh + adfg + bcfg + acfh) + 27(b^2g^2 + 4abgh + a^2h^2) + 12gcd^2 + 12c^2dh + 4bf^3 - d^2f^2 - 18bdfh + 27b^2h^2 + 4d^3h = 0.$$

2. Le discriminant n'ayant pas facteur non essentiel à cause de $A = 0$ (¹), nous pouvons profiter de cette circonstance, qui nous laisse quelques indéterminées à notre disposition, pour simplifier notablement les équations que nous avons déjà trouvées et celles que nous avons encore à trouver. Comme $p = 0$, le nombre minima $p + 1$ des infinis que nous pouvons choisir à volonté (²) se réduit à 1; donc nous pouvons supposer que tous les infinis de la fonction y, définie par l'équation (1), se trouvent à l'infini; cela veut dire que la fonction cherchée y est une fonction algébrique entière; mais alors le coefficient de y^3 doit se réduire à une constante; par conséquent, nous devons poser

$$(3) \qquad a = 0 \quad \text{et} \quad b = 1.$$

(¹) *Ibid.*, p. 59.
(²) *Ibid.*, p. 92.

Ces valeurs de a et b réduisent l'équation [1] à celle-ci :

$$(4cg - e^2)c^2 = 0.$$

De ses solutions différentes, choisissons la plus simple

$$c = 0. \tag{4}$$

Ces valeurs de a, b, c réduiront l'équation [2] à celle-ci :

$$4e^3 = 0;$$

donc on aura

$$e = 0. \tag{5}$$

Mais alors l'équation [3] deviendra

$$2g(-9df + 27h + 2d^3) = 0.$$

Maintenant on ne peut plus poser $g = 0$, car alors la variable x disparaîtra de l'équation (1) et y sera une constante; donc on doit poser

$$-9df + 27h + 2d^3 = 0. \tag{6}$$

En vertu de (3), (4), (5) et (6), l'équation [4] se réduira à celle-ci

$$27g^2 + 4f^3 - d^2f^2 - 27h^2 = 0. \tag{7}$$

3. Les valeurs (3), (4) et (5) de a, b, c, e réduisent l'équation (1) à cette forme

$$y^3 + dy^2 + fy + (gx + h) = 0, \tag{8}$$

avec quatre indéterminées d, f, g, h, liées par les deux équations (6) et (7). Il faut donc avoir encore deux équations; elles nous seront données par les points de ramification $x = +1$ et $x = -1$.

On peut simplifier l'équation (8) en posant

$$y = y' - \frac{1}{3}d, \tag{9}$$

car la nouvelle fonction y', étant une fonction rationnelle de y, aura les mêmes points de ramification. On aura, au lieu de l'équa-

tion (8), cette équation

$$(10) \qquad y'^3 + \left(f - \frac{1}{3}d^2\right)y' + gx = 0,$$

la nouvelle valeur du dernier coefficient se réduisant à zéro en vertu de l'équation (6). Cette équation aura deux racines égales pour $x = \pm 1$, lorsqu'on aura

$$(11) \qquad 27g^2 + 4\left(f - \frac{1}{3}d^2\right)^3 = 0.$$

Nous avons donc une même condition pour les deux points de ramification, au lieu de deux; cela rend une indéterminée à notre disposition. Posons donc

$$(12) \qquad d = 0,$$

cela donnera $y' = y$, en réduisant les équations (8) et (10) à une même :

$$(13) \qquad y^3 + fy + gx = 0,$$

car, en vertu de (6), on aura, en même temps que (12),

$$(14) \qquad h = 0.$$

Par ces valeurs de d et de h, les deux équations (7) et (11) se réduisent à une même équation qui est

$$(15) \qquad 27g^2 + 4f^3 = 0,$$

tandis que l'équation (6) devient une identité. Nous pouvons donc, dans la proportion suivante qui se déduit de l'équation (15) :

$$(16) \qquad \frac{g^2}{4} = -\frac{f^3}{27} = k,$$

prendre $k = 1$, et ensuite

$$(17) \qquad g = +2, \qquad f = -3,$$

par quoi l'équation (13) deviendra définitivement celle-ci :

$$(18) \qquad y^3 - 3y + 2x = 0 \quad (^1).$$

---

(1) C'est l'Exemple I du Chapitre III de la *Théorie des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet, 2e édition, Paris, 1875, p. 57-59.

Elle aura pour $x = 0$ trois racines : $y = 0$, $y = \pm\sqrt{3}$, et pour $x = +1$: $y = +1$ (double), $y = -2$; pour $x = -1$: $y = -1$ (double), $y = +2$.

La dérivée

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3(y^2-1)} \tag{19}$$

sera positive pour celle des trois racines qui s'annule au point $x = 0$, et négative pour les deux autres au même point $x = 0$, qu'elle conserve de $x = -1$ à $x = +1$. Donc c'est la première des racines qui est croissante dans cet intervalle, tandis que les autres sont décroissantes ; par conséquent, on pourra les ranger de cette manière :

$$\begin{array}{llll}
x = -1, & y_1 = +2, & y_2 = -1, & y_3 = -1, \\
x = 0, & y_1 = -\sqrt{3}, & y_2 = 0, & y_3 = -\sqrt{3}, \\
x = +1, & y_1 = +1, & y_2 = +1, & y_3 = -2.
\end{array}$$

par quoi on aperçoit de suite qu'autour des points de ramification, elles se permutent conformément à la surface donnée de Riemann.

Gatschina, 19/4 novembre 1912.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

KRIEGER'S (Joh. Nep.). — *Mond-Atlas*. Nach seinen an der Pia-Sternwarte in Triest angestellten Beobachtgn. unter Zugrundelegg. der hinterlassenen Zeichngn. u. Skizzen bearb. u. m. Unterstützg. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien aus den Mitteln der Treitl-Stiftg. hrsg. v. *Rud. König*. Neue Folge. 2 Tle. (32, 5-26, 5). Texte : XVIII-376 p. avec 31 fig. et 1 portrait. Atlas : 58 planches en phototypie et 1 planche en couleur avec 8 p. de texte. Wien, E. H. Mayer. Relié : 65 m.

LACROIX (S.-F.). — *Éléments de Géométrie*, 26e édit. rev., avec 220 fig. In-8. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

LA VALLÉE-POUSSIN (L. DE). — *Cours d'Analyse infinitésimale*. Tome II, 2e édit. Volume de IX-464 p. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

LEWENT (Leo). — *Konforme Abbildung.* Hrsg. v. *E. Jahnke.* Mit e. Beitrag v. *Wilh. Blaschke.* (*Mathematisch-physikalische Schriften f. Ingenieure u. Studierende.* Hrsg. v. *E. Jahnke.*) VI-118 p. avec 40 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 2 m. 80; relié, 3 m. 20.

WEBER (Heinr.) et WELLSTEIN (Jos.). — *Encyklopädie der Elementar-Mathematik.* Ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende. (In 3 Bdn.) 3. Bd. Angewandte Elementar-Mathematik. II. Tl. : Darstellende Geometrie, graph. Statik, Wahrscheinlichkeitsrechng., polit. Arithmetik u. Astronomie. Bearb. v. *Jos. Wellstein*, *Heinr. Weber*, *Heinr. Bleicher u. Jul. Bauschinger.* 2. Aufl. gr. in-8, XIV-671 p. avec 271 fig. Leipzig, B. G. Teubner. Relié, 14 m.

PFEIFFER (F.). — *Experimente m. dem Prandtlschen Kreiselapparat.* Nach Angaben v. Prandtl zusammengestellt. Abhandlung zu dem Modell Serie XLI, Nr. 1. (Sonderdr.) (*Mathematische Abhandlungen*, aus dem Verlage mathematischer Modelle von Martin Schilling in Leipzig. Nr. 9. Neue Folge). Gr. in-8, p. 337-354 avec 17 fig. Leipzig, M. Schilling. 1 m. 20.

GEBHARDT (Mart.). — *Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands. Dargestellt vor allem auf Grund alter u. neuer Lehrbücher u. der Programmabhandlgn. höherer Schulen.* (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.* III. Bd. 6. Heft.). In-8, VII-157 p. Leipzig, B. G. Teubner. 4 m. 80.

PENNDORF (B.). — *Rechnen u. Mathematik im Unterricht d. kaufmännischen Lehranstalten.* (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.* IV. Bd. 2. Heft.). In-8, VI-100 p. Leipzig, B. G. Teubner. 3 m.

LIETZMANN (Walth.). — *Stoff u. Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht.* (*Abhandlungen üb. dem mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.* V. Bd. 6. Heft.). In-8, VIII-88 p. avec 38 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 2 m. 80.

BURKHARDT (Heinr.). — *Funktionentheoretische Vorlesungen.* I. Bd. 2. Heft. Einführung in die Theorie der analyt. Funktionen e. komplexen Veränderlichen. 4. durchgesch. Aufl. gr. in-8, XII-262 p. avec fig. Leipzig, Veit et Co. 7 m.; relié 8 m.

FEIJTES (J. J.). — *Verhandlung der allgemeinen Auflösung des Theorems Fermats.* Gr. in-8, III-49 p. avec fig. 'S-Gravenhage, G. C. T. van Dorp et Co. 3 m.

Hilbert (Dav.). — *Grundzüge e. allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* (*Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien.* Hrsg. v. *Otto Blumenthal.* N° 3). Gr. in-8, xxvi-282 p. Leipzig, B. G. Teubner. 11 m.; relié, 12 m.

Neumann (Ernst Rich.). — *Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie. Gekrönte Preisschrift.* (*Preisschriften, gekrönt u. hrsg. v. der fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig.* XLI.). In-8, xxiii-188 p. avec 11 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 11 m.

Möbius (W.). — *Zur Theorie des Regenbogens an Kugeln von* 1-10 *Lichtwellenlängen Durchmesser.* (*Preisschriften, gekrönt u. hrsg. v. der fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig.* XLII.). In-8, 31 p. avec 11 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 2 m.

Krause (Arth.). — *Definitive Bahnbestimmung des Kometen* 1846 *VII* Gedruckt auf Kosten des v. A. F. Lindemann zur Bahnberechng. älterer Kometen gestiffeten Fonds. (*Publikation der astronomischen Gesellschaft.*) $31^{cm},5 \times 24^{cm}$, 35 p. Leipzig, W. Engelmann. 3 m.

Schmid (Thdr.). — *Darstellende Geometrie.* (*Sammlung Schubert.*) 1. Bd. In-8°, vi-279 p. avec 170 fig. Berlin, G. J. Göschen. Relié, 7 m.

Meyer (W. Frz.). — *Differential- u. Integralrechnung.* 1. Bd. Differentialrechnung. 2., durchgesen. u. erweit. Aufl. (*Sammlung Schubert.*) In-8, xv-418 p. avec 13 fig. Berlin, G. J. Göschen. Relié, 9 m.

Liebmann (Heinr.). — *Nichteuklidische Geometrie.* 2., neubearb. Aufl. (*Sammlung Schubert.*) In-8, vi-222 p. avec 39 fig. Berlin, G. J. Göschen. Relié, 6 m. 50.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bdn. V. Bd. : Physik. (In 3 Tln.) Red. v. *A. Sommerfeld.* 1. Tl. V. Heft. In-8, 615-945 p., avec figures et 5 pl. Leipzig, B. G. Teubner. 10 m. 40.

Kayser (H.). — *Handbuch der Spectroscopie.* 6. Bd. In-8, vi-1067 p. avec 1 planche. Leipzig, S. Hirzel. 60 m.; relié, 64 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BERETNING OM DEN ANDEN SKANDINAVISKE MATEMATIKERKONGRES I KJÖBENHAVN 1911. *udgiven af* NIELS NIELSEN, Kongressens Præsident. 1 vol. in-8 jésus, XVI-192 pages. Kjöbenhavn, Kristiania, Gyldendalske Boghandel, 1912.

Je tiens tout d'abord à remercier vivement M. le Professeur Dr Niels Nielsen, Président du Congrès, d'avoir bien voulu me procurer les Analyses succinctes, rédigées en français, des Conférences, rédigées en danois, en norvégien ou en suédois, qui sont dans l'Ouvrage, dont le titre peut être ainsi traduit : *Compte rendu du deuxième Congrès des Mathématiciens scandinaves, tenu à Copenhague en* 1911.

Beaucoup de ces Analyses ont été rédigées en français par les Lecteurs des Conférences. M. Niels Nielsen a bien voulu traduire en français les analyses rédigées en danois.

1. ZEUTHEN (H. G.). — *Sur la création de la Mathématique de précision de Pythagore à Euclide.*

Occupé alors de la rédaction de l'Article sur la Mathématique de l'Antiquité et du Moyen-Age qui vient de paraître dans le Volume mathématique de la *Kultur der Gegenwart*, l'Auteur profite de l'occasion pour en exposer brièvement une partie fondamentale, qui présente plusieurs points de vue nouveaux. Après la découverte de l'existence des quantités irrationnelles, déjà les Pythagoriciens commençaient à se servir d'une représentation géométrique également applicable aux quantités rationnelles et irrationnelles. Mais seulement les amis de Platon, les premiers parmi eux, Eudoxe et Théétète, constituaient un usage exact et bien systématique de cette représentation, qui remplace, dans la Mathématique antique, nos formules algébriques. Les différents Livres des Éléments d'Euclide rappellent les étapes du développement dont ils sont le fruit mûr et dont M. Zeuthen rend compte.

2. Nielsen (Niels). — *Sur le développement des fonctions analytiques en séries de fonctions hypergéométriques.*

L'Auteur, reprenant ses recherches du Chapitre XIII de son Livre intitulé *Théorie des fonctions métasphériques* (Paris, Gauthier-Villars, 1911) et généralisant sa méthode, démontre en particulier deux théorèmes généraux dont voici les cas les plus simples.

Soit $f(x)$ une fonction analytique quelconque de la variable complexe $x = \alpha + i\beta$, régulière aux environs de $x = 0$. On a les deux développements

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma - n, x),$$

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A'_n x^n F(\alpha - n', \beta + n, \gamma - n, x), \\ f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A''_n x^n F(\alpha - n'', \beta + n, \gamma - n, x), \end{cases}$$

où F désigne la fonction hypergéométrique ordinaire et où il faut dans les équations (2) déterminer les nombres entiers n' et n'' par les conditions

$$\frac{n}{2} = n' = \frac{n+1}{2} = n'' = \frac{n+2}{2}.$$

Les séries en question sont convergentes aux environs de $x = 0$ et les domaines de convergence sont l'intérieur de deux courbes fermées.

Le domaine de convergence d'une série de Burmann indiqué par V. Puiseux peut être plus étroit que le domaine véritable.

Les recherches de M. Niels Nielsen paraîtront *in extenso* dans les *Annales scientifiques de l'École Normale*.

3. Oseen (C. W.). — *Sur les équations intégrales de l'Hydrodynamique.*

L'Auteur propose l'hypothèse que les mouvements irréguliers d'un fluide visqueux et incompressible, auxquels il a été amené dans ses recherches antérieures, sont identiques aux mou-

vements turbulents. Pour vérifier cette hypothèse, il étudie la nature des singularités qui peuvent naître. Il réussit à montrer que les singularités sont des tourbillons. Or, pour arriver à ce but, il faut abandonner les équations différentielles de Navier et de Stokes et opérer directement sur les équations intégrales qui sont l'expression immédiate des hypothèses physiques fondamentales. Les dérivées du second ordre disparaissant de cette manière des calculs, on obtient une simplification mathématique importante, les recherches pénibles sur l'existence de ces dérivées devenant inutiles au point de vue de la Physique mathématique.

4. Bjerknes (V.). — *Sur l'algèbre graphique et sur le calcul différentiel et intégral graphique.*

La Conférence de M. Bjerknes est extraite de son Ouvrage intitulé : *Dynamic Meteorology and Hydrography;* Part. II : *Kinematics.* Washington, 1911.

5. Smith (O. A.). — *Théorème de l'équation différentielle homogène et linéaire du second ordre, dont les coefficients sont des polynomes entiers du second degré.*

L'Auteur prend pour point de départ l'équation

$$f(t)\mathrm{T}^{(2)} + \varphi(t)\mathrm{T}^{(1)} + \psi(t)\mathrm{T} = 0, \tag{1}$$

où $f(t)$, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions analytiques, régulières dans un domaine commun. Considérons ensuite l'intégrale définie

$$y = \int_\alpha^\beta e^{tx}\,\mathrm{T}\,\Phi(t)\,dt;$$

il s'agit de déterminer les nombres α et β et la fonction $\Phi(t)$, indépendants de x, de sorte que l'équation différentielle obtenue pour y devienne la plus simple possible.

A cet effet, il faut supposer

$$\Phi(t) = \frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)}\,e^{\int \frac{\varphi(t)}{f(t)}dt}.$$

Le cas particulier, où l'équation (1) est de la forme

$$(a_2t^2 + a_1t + a_0)\mathrm{T}^{(2)} + (b_2t^2 + b_1t + b_0)\mathrm{T}^{(1)} + (c_2t^2 + c_1t + c_0)\mathrm{T} = 0$$

présente un intérêt particulier, pourvu que $|a_2| > 0$. Soient α et β les racines de l'équation

$$a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0,$$

l'équation obtenue pour y devient

$$(a_2 x^2 + b_2 x + c_2) y'' + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) y' + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0) y = 0$$

Cette transformation est réciproque.

La méthode est avantageuse dans l'intégration des équations différentielles linéaires à l'aide des intégrales définies.

6. Jensen (J. L. W. V.). — *Recherches sur la théorie des équations.*

La traduction en français de la Conférence de M. Jensen se trouve dans le Tome XXXVI des *Acta mathematica*, 1912.

7. Hjelmslev (J.). — *Recherches nouvelles sur le fondement de la Géométrie.*

Pour établir la Géométrie projective plane, l'Auteur propose plusieurs hypothèses. Deux points différents déterminent une droite et une seule. Il existe un groupe de transformations collinéaires (déplacements, égalités), contenant ses transformations inverses et doué des propriétés suivantes : A toute droite d correspond biunivoquement une symétrie, c'est-à-dire un déplacement non identique laissant fixe tout point de d; A tout point P d'une droite d correspond univoquement un déplacement non identique de la droite en elle-même, laissant le point P invariant; Lorsqu'il existe un déplacement d'une droite AB en elle-même, qui change A en B, alors il existe un déplacement, qui change A en B et B en A; Lorsque deux ponctuelles égales, situées sur deux droites différentes ont un point correspondant, commun, il existe une symétrie qui change l'une des ponctuelles en l'autre.

8. Heegaard (Poul). — *Un problème d'*Analysis Situs.

La Conférence de M. Heegaard est une Communication provisoire. L'Auteur se réserve de publier plus tard les résultats de ses recherches.

9. MALMQUIST (J.). — *Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par une équation différentielle algébrique du premier ordre.*

En s'appuyant sur certains résultats de M. P. Boutroux concernant la croissance des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre, l'Auteur démontre le théorème suivant :

Si l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = a_0 y^p + a_1 y^{p-1} + \ldots + a_p$$

ne se transforme pas en une équation de Riccati par une transformation de la forme

$$z = \frac{y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{y^{n-p+1} + \beta_1 y^{n-p} + \ldots + \beta_{n-p+1}},$$

les coefficients étant des fonctions rationnelles de x, toute intégrale à un nombre fini de branches est nécessairement une fonction algébrique.

10. MOLLERUP (JOHANNES). — *Sur l'identité du déterminant de M. Fredholm et d'un déterminant infini de M. von Koch* (1).

En résolvant l'équation intégrale homogène

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\varphi(t)\,dt$$

par des équations avec un nombre infini d'inconnues, on trouve comme déterminant des équations un déterminant infini de M. von Koch

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \ldots \\ -\lambda a_{12} & -1 - \lambda a_{22} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

ou

$$a_{ji} = \int_a^b \int_a^b K(st)\beta_j(t)\beta_i(s)\,ds\,dt,$$

$\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$, ... formant un système orthogonal complet.

(1) Cette Conférence est publiée dans le *Bull. des Sciences math.*, t. XXXVI$_1$, 1912, p. 130.

En se servant d'une formule intégrale

$$\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(s_1 s_2) K(s_2 s_3) \ldots K(s_n s_1)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_n$$
$$= \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_n i_1},$$

les $i_1, i_2, \ldots, i_n$ parcourant indépendamment tous les nombres de la suite 1, 2, 3, ..., on démontre que

$$\Delta(\lambda) = D_{\lambda K}.$$

$D_{\lambda K}$ étant le déterminant de Fredholm pour le noyau $\lambda K(st)$.

De ce théorème découlent des théorèmes sur le genre du déterminant de Fredholm.

11. Charlier (C. V. L.). — *Sur la résolution analytique du problème concernant la détermination des orbites.*

La Conférence de M. Charlier est imprimée dans les *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London* (December 1910, March 1911).

12. Juel (C.). — *Sur les surfaces algébriques et les surfaces non algébriques.*

Étant donnée une surface réelle, analytique et, sauf en des points isolés, partout régulière, une surface *simple*, on peut se demander sous quelles conditions la surface est nécessairement algébrique.

En s'appuyant sur le théorème suivant :

Une surface simple coupée par une droite arbitraire en trois points réels au plus contient au moins trois droites, l'Auteur démontre d'abord qu'*une surface simple coupée par une conique en six points au plus est généralement algébrique*.

Les cas d'exception où sa démonstration est en défaut sont :

1° Ceux où toutes les droites de la surface sont développables;

2° Ceux où la surface est gauche.

Il démontre ensuite qu'*une surface simple coupée par un cercle en quatre points au plus est généralement algébrique*.

Le cas d'exception est celui où toutes les lignes de courbure de la surface sont circulaires.

Dans les cas spéciaux cités, il n'est pas encore certain que les théorèmes soient vrais.

13. Pleijel (H.). — *L'équation des télégraphistes.*

L'Auteur s'est occupé, dans cette Conférence, de la question de déterminer le régime variable entrant lors de l'intercalation d'une force électromotrice d'une forme quelconque dans un circuit télégraphique ou téléphonique, relié avec des dispositifs de résistance, de self-induction et de capacité. La solution de ce problème est obtenue sous la forme d'une série finie, chaque terme de la série représentant une onde sortant ou une onde réfléchie. Chaque terme est, dans la règle, composée de deux parties, l'une donnant une onde amortie mais sans détorsion, et l'autre donnant une onde déformée. Se basant sur la solution ainsi obtenue, l'Auteur discute enfin les principes généraux du régime variable sous des conditions différentes.

14. Bohr (Harald). — *Sur les valeurs possibles de la fonction $\zeta(\sigma + it)$ de Riemann dans le demi-plan $\sigma > 1$.*

L'Auteur démontre le théorème suivant :

Dans le demi-plan $\sigma > 1$, la fonction $\zeta(\sigma + it)$ de Riemann peut avoir une valeur quelconque différente de zéro; de plus, l'équation

$$\zeta(\sigma + it) = a,$$

où a est différent de zéro, mais quelconque du reste, admet une infinité de racines situées dans le demi-plan $\sigma > 1$.

La démonstration est fondée sur une méthode arithmético-analytique qui applique d'une manière caractéristique le théorème que l'entier positif m ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule façon. Elle sera plus tard, sous une forme plus détaillée, publiée dans les *Göttinger Nachrichten*.

15. Brodén (T.). — *Sur un système des postulats dans la Géométrie euclidienne.*

Il s'agit, pour la Géométrie euclidienne, d'un système de postulats dans lequel on n'admet comme idées fondamentales que la notion du point et celle de l'égalité des distances de deux points

d'un même plan (AB = AC). En outre, ce système est essentiellement fondé sur des rapports de symétrie. Déjà en 1890, l'Auteur avait exposé ce système dans une forme un peu différente (voir *Jahrbuch ü. d. Fortschritte d. Math.*, J. 22, p. 522, et *Encyklop. d. Math. Wiss.*, t. III, p. 18). Les postulats se partagent entre les groupes suivants, à savoir :

1° Postulat fondamental (AC = AD, si AC = AB, AD = AB);

2° Postulats qui conduisent à la notion générale AB = CD;

3° Postulats pour l'individualisation de la ligne droite et du plan;

4° Postulats de symétrie;

5° Postulats de continuité;

6° Postulat de parallélisme.

On fait aussi quelques remarques sur l'indépendance des postulats entre eux et sur la portée du système exposé.

16. Schou (E.). — *Recherches sur quelques classes de fonctions harmoniques à trois variables.*

Dans cette Conférence, qui est le résumé de sa thèse de Doctorat à l'Université de Copenhague, l'Auteur s'est proposé de déterminer toutes les paires de fonctions ρ_1, ρ_2 satisfaisant à l'équation de Laplace à trois variables, ayant la propriété que, parmi les fonctions de ρ_1 et ρ_2, $f(\rho_1, \rho_2)$, il s'est trouvé une infinité satisfaisant également à l'équation de Laplace.

Comme point de départ, l'Auteur démontre que, parmi les systèmes de surfaces $\rho = C$ appartenant à la congruence $\rho_1 = C_1$, $\rho_2 = C_2$, il se trouve un ou deux systèmes satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Il suit de là que l'on peut déterminer *toutes* les congruences en question, et, par là, le problème est réduit à la solution de certaines équations linéaires, à dérivées partielles du second ordre et à deux variables. Dans certains cas, la solution se trouve sous forme explicite [1].

---

[1] Dans son résumé, M. E. Schou ajoute les remarques suivantes : « La

17. Bjerknes (V.). — *Les champs de force dans les milieux continus.*

En donnant la solution explicite du problème sur le mouvement de corps sphériques dans un fluide parfait, C. A. Bjerknes est arrivé à une analogie remarquable entre les phénomènes du champ hydrodynamique et les phénomènes du champ électrique ou magnétique. M. V. Bjerknes montre comment on peut démontrer l'existence de cette analogie d'une manière tout à fait générale. Par une transformation très simple, on peut donner aux équations hydrodynamiques la forme des équations qui définissent les propriétés des champs électriques ou magnétiques correspondants. L'analogie est directe en tout ce qui concerne les propriétés géométriques, inverse en tout ce qui concerne les propriétés dynamiques des champs.

18. Lindelöf (Ernst). — *Sur une méthode proposée par le linguiste danois Karl Verner pour l'analyse des courbes périodiques.*

Pour calculer les coefficients du développement de Fourier d'une courbe périodique, donnée par l'expérience,

$$y = f(x),$$

dont on a mesuré un certain nombre n d'ordonnées équidistantes, Verner avait proposé d'appliquer les formules bien connues à l'expression

$$\frac{f(x-\Delta)+2f(x)+f(x+\Delta)}{4},$$

où Δ signifie la période de la courbe divisée par $2n$. L'Auteur montre que ce procédé apporte en effet une simplification notable des calculs et qu'elle permet, d'autre part, de réduire l'influence des erreurs commises dans la mesure des ordonnées.

---

même question a été traitée antérieurement par M. Levi Civita (*Memorie della reale Accademia delle Scienze di Torino*, 2e série, t. XLIX, 1900), par une méthode différente et seulement pour les fonctions réelles. Outre les solutions trouvées par M. Levi Civita, il existe plusieurs classes de fonctions imaginaires en général, mais comprenant, dans certains cas, des individus réels. »

19. Block (H.). — *Equations différentielles linéaires aux dérivées partielles avec des caractéristiques multiples.*

Il s'agit d'une déduction de la solution fondamentale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^p z}{\partial x^p} = \frac{\partial^q z}{\partial y^q},$$

où p et q ($p > q$) sont deux nombres sans facteurs communs. On trouve que la solution fondamentale est de la forme $(\eta - y)^{q-1-\frac{q}{p}}$, multipliée par une fonction entière de $\frac{z - x}{(\eta - y)^{\frac{q}{p}}}$. Cette fonction entière est différente dans les régions $y < \eta$ et $y > \eta$. Pour $q = 1$, on ne doit considérer qu'une de ces deux régions.

Les conditions initiales qui, dans la théorie réelle, doivent remplacer celles de Cauchy sont également déduites. Pour $q > 1$, on doit se donner les valeurs de certaines quantités le long d'un contour fermé, tandis que, pour $q = 1$, le contour doit être ouvert.

Les résultats donnés dans cette Conférence sont exposés en détail dans l'*Arkiv för Mathematik*, t. VII, nos 13 et 21.

20. Mattson (Ruben). — *Sur une classe de fonctions entières à croissance irrégulière.*

Il s'agit de la construction de fonctions entières à croissance irrégulière à l'aide de facteurs primaires de Weierstrass. L'Auteur donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'irrégularité de la croissance de la fonction entière la plus simple admettant pour zéro un ensemble de points donné. La nature des fonctions obtenues est montrée par la fonction suivante, la première des fonctions données par l'Auteur :

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{x}{k^{\nu}} \right)^{k^{\nu}} \right| \qquad (k \text{ entier}).$$

21. Neovius (E. R.). — *Sur quelques surfaces minima non considerées par Riemann et dont la frontière est formée par trois droites.*

M. Neovius attira l'attention sur le fait qu'il existe des surfaces minima, contenant trois droites, qui ne sont pas déterminées par les formules de Riemann (*Œuvres*, p. 304). Si, par exemple, aucune des droites ne rencontre les deux autres, il existe une surface à connexion double avec trois segments hélicoïdaux. Les formules de Riemann conduisent à considérer le cas où la surface a un plan asymptotique passant par une des droites. En admettant cette possibilité, on est conduit à plusieurs surfaces nouvelles. Il existe des surfaces sur lesquelles jusqu'à deux des droites peuvent être des lignes doubles. (M. Neovius montra des modèles de ces surfaces.)

22. Johansson (Severin). — *Sur la convergence des séries θ de Poincaré de la dimension* —2 *relatives aux groupes linéaires possédant un cercle fondamental.*

On sait que, pour les groupes linéaires à cercle fondamental qui sont engendrés par un nombre fini de substitutions, les séries θ de Poincaré de la dimension — 2 divergent ou convergent suivant que ledit cercle est pour le groupe un cercle limite ou non. L'Auteur montre que ce résultat ne subsiste plus pour les groupes engendrés par un nombre infini de substitutions, et donne des exemples où les séries en question convergent, bien que le cercle fondamental soit pour le groupe un cercle limite.

Niels Nielsen et Er. L.

WINTER (Maximilien). — La Méthode dans la Philosophie des Mathématiques (*Bibliothèque de Philosophie contemporaine*). 1 vol. in-16, III-200 pages. Paris, Félix Alcan, 1911.

Ce Livre, édité dans la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine*, possède avant tout un grand avantage : son auteur est très au courant des théories mathématiques. Or, en matière de critique philosophique, un écrivain ne saurait trop bien connaître

l'objet de son étude. Cet objet, M. Winter nous l'indique lui-même dans sa Préface : rechercher « quelle est la méthode qui, à l'heure actuelle, présente des garanties suffisantes pour aborder l'examen critique des principes fondamentaux de la Science mathématique ».

Après avoir fait la critique de la *méthode métaphysique*, l'auteur cherche à délimiter le domaine de la *logistique*, puis il applique à deux théories particulières, l'Arithmétique et l'Algèbre supérieures, la *méthode historico-critique*, qui lui semble la plus légitime et la plus féconde. Il y a donc, dans cet Ouvrage, trois Parties, dans lesquelles sont développées les idées que nous allons exposer.

I. M. Winter n'aime pas la Métaphysique : il s'attache à justifier cette opinion chaque fois qu'il en rencontre l'occasion; et celle-ci se présente souvent.... Cette idée apparaît, en quelque sorte, comme le *leit-motiv* de son Ouvrage, au moins dans les deux premières Parties. La question qu'il se pose est la suivante : « la critique des principes peut-elle être élaborée par des savants en dehors de tout système philosophique, ou bien, au contraire, est-elle liée, par sa nature même, à certaines questions de Métaphysique concernant l'origine et la nature des notions élémentaires »? Il y a donc deux attitudes parmi les savants : certains, comme M. Hilbert, partent d'un petit nombre d'axiomes ou idées primitives, sans chercher à déterminer la nature des principes métaphysiques qui peuvent leur servir de base. D'autres, allant plus loin, s'attaquent précisément à ce dernier problème; l'auteur se demande s'ils ne s'abusent pas sur la valeur de ces principes rationnels qui ne seraient, en somme, que les notions vagues et confuses de la conscience vulgaire, dont les idées claires de la Science constitueraient une détermination supérieure, et cela sans élaboration métaphysique intermédiaire. Au moyen des définitions par postulats et par abstraction, on peut réduire les axiomes fondamentaux « à des combinaisons de concepts mathématico-logiques bien définis, qui déterminent les notions vulgaires en vue de leur usage scientifique... Si les formes du discours grammatical, si les notions de la pensée commune avaient constitué un instrument suffisant pour la connaissance scientifique de l'univers, la Mathématique n'aurait pas été créée ».

Une critique réellement fondée sera ainsi constituée : étude des des éléments grammatico-logiques, c'est-à-dire étude du discours, nécessaire mais de rôle modeste ; détermination des principes élémentaires dans chaque branche de la Science à une époque déterminée ; histoire de ces principes.

Ainsi sera substituée à la causalité *métaphysique*, hors du temps, la causalité *historique*, dans le temps, et dans cette étude, comme dans l'élaboration des théories techniques de la Science, le même esprit devra régner.

Pour justifier son point de vue, l'auteur fait la critique du système kantien ou néo-kantien, qui, parmi toutes les métaphysiques de la Science, se rapproche le plus de la véritable critique scientifique. Kant distinguait la logique formelle, qui n'envisage que la forme logique des connaissances dans leur rapport entre elles, et la logique transcendantale, qui détermine leur origine, leur étendue et leur valeur objective. Celle-ci a été élaborée principalement par les continuateurs de Kant, notamment par Natorp, qui a mis à la base de son système une cause première appelée *Prinzip des Ursprungs*. Or, dit M. Winter, puisque de ce principe on n'a pu déduire *a priori* aucune propriété intéressante, ce n'est qu'une définition verbale exprimant un truisme : l'affirmation de la spontanéité de la pensée.

Par une analyse analogue, l'auteur montre comment la critique scientifique des postulats de la Géométrie s'est développée complètement en dehors de la théorie kantienne de l'espace, qui est sans utilité pour la Géométrie. Cependant Natorp discute la validité des conclusions empiristes de Gauss, Riemann, etc., et veut leur substituer une métaphysique rationnaliste : les géométries non enclidiennes seraient conformes à la logique pure, mais non à la *logique de l'existence*. A cette conception apriorique, M. Winter oppose celle de M. H. Poincaré, dont les critiques s'adressent aussi d'ailleurs à la Philosophie empiriste. En fait, les géomètres avaient surtout en vue de perfectionner l'instrument mathématique. Ce qui a pu paraître lié à la théorie de la connaissance, c'est la question du rapport des postulats avec l'expérience : à ce sujet Poincaré n'a fait que constater le degré d'approximation que comportait l'expérience et le rôle de l'expérience séculaire dans la formation des Sciences.

En ce qui concerne le temps, le néo-kantisme, suivant en cela la Physique newtonienne, donne comme premier caractère fondamental du temps son unicité. Les théories récentes de Lorentz et d'Einstein sur le temps local semblent opposées à cette conception. Et cependant, d'après Natorp, pas plus que la Géométrie non euclidienne ou à *n* dimensions, elles ne changent rien au fondement logique des déterminations purement mathématiques du temps et de l'espace. M. Winter observe à ce sujet que, si l'on retranche de l'étude des notions fondamentales toutes les théories nouvelles de la Science, « le résidu, qui constituera l'objet propre de la Philosophie, ne sera plus qu'un ensemble de lieux communs ». La théorie kantienne serait donc tellement générale que la plupart des transformations de la Science ne l'atteindraient pas.

Le rôle de la Philosophie à système, dit M. Winter, est terminé : la méthodologie scientifique qu'on lui substitue a une fécondité qui prouve son objectivité. Le point de vue historico-critique aura de plus l'avantage de contribuer au travail *d'élémentarisation* et de simplification des notions, qui s'impose parallèlement au travail d'accroissement.

II. Chercher à déterminer les caractères précis de l'intuition et ses rapports avec la pensée est un problème qui, posé en termes scolastiques, ne comporte pas de solution : « l'existence de la logistique ne dépend pas plus des controverses sur la nature de l'esprit, que la légitimité de la Physique n'est liée aux discussions sur l'essence intime de la matière ». Une conception restreinte de la logistique sera conforme à l'évolution des Sciences : on créera ainsi une branche des Mathématiques, dont il importe de limiter le champ d'application.

La logistique doit avoir des bornes dans le sens de l'abstraction métaphysique (limite supérieure) et dans le sens des applications (limite inférieure). Elle est un calcul comprenant à la fois les êtres numériques et non numériques ; mais l'étude des rapports de la réalité avec les règles et symboles substitutifs est un problème qui n'a pas de sens : aussi l'auteur s'occupe plus particulièrement de la limite inférieure du champ de la logistique.

En dehors de l'analyse des raisonnements, aura-t-elle une partie commune avec les Mathématiques ? M. Winter montre

que, chaque fois que la logistique a voulu reprendre le travail des Mathématiques, elle a été complètement inutile. Elle doit se borner à étudier les notions grammatico-logiques, considérées comme des faits donnés, à établir les lois et les combinaisons qui leur sont propres et les rapports qui les unissent à la Mathématique; celle-ci garde son autonomie.

C'est ainsi que la définition logistique des nombres rationnels n'apporte aucun secours pour la détermination des caractères distinctifs des nombres incommensurables, algébriques, ou transcendants. La logistique ne possède pas non plus de principe général restrictif permettant de reconnaître si chaque entité nouvelle qui se rencontre dans le développement des Mathématiques est réductibles aux êtres déjà connus ; elle ne saurait rien décider dans les contestations qui se sont élevées au sujets des nombres transfinis. L'auteur cite également l'exemple des intégrales irréductibles ([1]) et il remarque, à ce propos, que les êtres mathématiques irréductibles constituent une infinité non-dénombrable, alors que le nombre des idées élémentaires des constantes logiques de la pensée est fini; aussi les nouveaux êtres que nous découvrons nous obligent à perfectionner constamment nos cadres logiques.

La logistique doit donc être condamnée en tant qu'explication universelle : elle ne peut se substituer aux Mathématiques, mais il existe cependant des domaines communs. L'étude de la notion de fonction en est un exemple, car elle est étroitement mêlée à la notion de relation : pour éclairer cette étude il faudrait lui appliquer la méthode historico-critique.

III. C'est cette méthode dont l'auteur donne deux exemples fort intéressants : le premier est relatif à la *théorie des nombres*, dont M. Winter signale, à juste titre, l'importance et les relations profondes avec l'Algèbre et l'Analyse. La plupart des grandes idées qui ont transformé celles-ci ont été fécondes en Arithmétique. Ainsi les nombres imaginaires, introduits par Gauss dans l'étude des résidus biquadratiques, constituent un corps dont les lois de

---

([1]) P. Painlevé, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1904. Cette irréductibilité n'est pas identique à celle dont l'auteur a parlé antérieurement, puisqu'on peut représenter les intégrales en question sous forme d'êtres antérieurement étudiés.

divisibilité coïncident avec celles du corps des nombres rationnels. Ces idées ont suggéré la considération de certains domaines numériques où ces lois ne seraient plus vérifiées; et c'est pour les retrouver que Kummer, puis Dedekind ont introduit les nombres idéaux, puis les idéaux, qui jouissent de propriétés dont les lois de divisibilité de l'Arithmétique élémentaire ne sont qu'un cas particulier. A un autre point de vue, l'auteur signale également les relations qui existent entre la notion de groupe de substitutions et celle de classe de formes, et l'introduction heureuse par Hermite de la variable continue dans la détermination des réduites des formes indéfinies.

Le second exemple est relatif à la *théorie des équations* en Algèbre : l'auteur s'attache à caractériser tantôt l'évolution historique des idées, tantôt leur enchaînement logique. Ce Chapitre est plein d'intérêt, car il suit méthodiquement le travail qui s'est élaboré depuis Tschirnhaus jusqu'à Hermite, Jordan et Klein en passant par Lagrange [1], Gauss, Abel, Cauchy, etc. et surtout Galois. Les opérations comprennent deux parties bien distinctes : une partie algébrique, et une partie transcendante dont l'étude conduit à la théorie des groupes qui, transportée en Analyse et en Géométrie, y a déterminé de si importants progrès.

Le résumé qui précède a pour but de montrer comment l'auteur a compris le sujet qu'il s'était proposé. Tel qu'il est conçu, cet Ouvrage est très suggestif. Peut-être y trouvera-t-on, malgré tout, quelque exagération par endroits [2]. Il est bien vrai que certains problèmes posés par le philosophe *semblent* au savant dénués de sens [3]. Mais cela conduit-il forcément à dédaigner quelque peu

---

[1] Tschirnhaus, *Nova méthodus auferendi omnes terminos intermedios ex data æquatione*, 1683; Lagrange, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1770-1771 : sa méthode est une première ébauche de la théorie des groupes.

[2] Ici, comme en bien des cas, la terminologie a son importance : ainsi l'auteur englobe dans la même réprobation la Philosophie à systèmes (ce qu'il appelle « Philosophie dans le sens classique ») et la systématisation philosophique : il y a une nuance.... Et, à ce point de vue, il peut sembler excessif, comme on le fait parfois, de vouloir restreindre le domaine de la Philosophie aux études purement métaphysiques, qui, après tout, n'en constituent qu'une partie, un des principaux objets de la Philosophie étant un examen et une systématisation dans toutes les catégories de pensée.

[3] Voir, à ce sujet, le très intéressant article de M. Picard dans la *Revue scientifique* du 9 novembre 1912.

des controverses comme celles qui ont eu lieu entre MM. Poincaré et Le Roy? Ces spéculations ont leur intérêt et leur utilité, elles obligent à réfléchir et attirent l'attention sur certains points. Ceci est d'ailleurs précisément une des qualités de l'Ouvrage de M. Winter. Son style simple et clair, ses dimensions modestes le recommandent à l'attention de tous ceux qu'intéresse la Philosophie des Mathématiques. C'est un Livre à lire.

M. Gevrey.

HAMEL (Georg). — Elementare Mechanik. Ein Lehrbuch enthaltend : eine Begründung der allgemeinen Mechanik ; die Mechanik der Systeme starrer Körper; die synthetischen und die Elemente der analytischen Methoden, sowie eine Einführung in die Prinzipien der Mechanik deformierbarer Systeme. 1 vol grand in-8°, XVIII-634 pages, 265 figures. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912.

M. Hamel s'est fait connaître surtout par deux études, l'une d'ordre analytique, *Die Lagrange-Euler'schen Gleichungen der Mechanik* (1903), l'autre d'ordre philosophique et critique, *Ueber die Grundlagen der Mechanik* (1908). Dans le Cours qu'il publie aujourd'hui, il unit à la double tendance marquée par ces travaux une préoccupation d'ordre technique. Il ne se propose pas à coup sûr d'écrire une Mécanique technique, mais il choisit autant que possible les exemples qu'il traite parmi les problèmes techniques, et il le fait d'une manière très heureuse.

La première Section développe amplement les notions de mouvement et de force, ainsi que les principes de la Mécanique générale qui s'y rattachent. La seconde Section est consacrée à la Statique des systèmes de solides invariables. La troisième Section a pour objet la Dynamique générale du solide et des systèmes, édifiée sur la conception de la décomposition en volumes infinitésimaux, et les éléments de la Mécanique analytique (équations de Lagrange, petits mouvements). Un dernier Chapitre sert à montrer comment l'établissement de la Mécanique des systèmes déformables se rattache aux principes généraux exposés, et fournit l'occasion d'un bref aperçu, plein d'actualité, sur les équations intégrales linéaires.

L'emploi discret et élémentaire de l'Analyse vectorielle donne

à l'exposition une grande élégance. Une sobre bibliographie accompagne chaque Chapitre.

A. Boulanger.

CZUBER (E.). — Vorlesungen über Differential und Integralrechnung. Erster Band, mit 125 Figuren im Text. Dritte sorgfältig durchgesehene Auflage. 1 vol. in-8, XIV-605 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912.

L'auteur de ces Leçons (1), soucieux à la fois de faire œuvre vraiment scientifique et d'ouvrir largement les voies aux applications, s'est trouvé naturellement conduit à faire porter les additions essentielles sur la partie géométrique. Outre les modifications relatives aux généralités sur les surfaces, il convient de signaler dans ce Volume : au sujet de la courbure, la démonstration de la formule de Savary, appliquée ultérieurement aux surfaces de révolution dont la courbure moyenne est constante; dans l'étude des enveloppes, la théorie des caustiques dans le plan et le théorème de Malus; enfin, concernant les lignes tracées sur une surface, l'indication d'une définition générale des loxodromies, et leurs propriétés sur la sphère. Les méthodes employées pour traiter ces questions, souvent inspirées de la Géométrie infinitésimale, accentuent encore, s'il est possible, la tendance générale de l'Ouvrage.

L. Forgeron.

NEUENDORFF (Richard). — Ueber Kreispunktpolarkurven. *Inaugural-Dissertation zur erlangung der Doktorwurde der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Christian. Albrechts-Universität zu Kiel.* Une brochure in-8°, 31 pages. Leipzig, B. G. Teubner, 1908.

Les courbes (K) étudiées ici sont définies sur une surface (S) par cette condition : la tangente en M à une courbe (K) est conjuguée, par rapport à la surface, de l'une des droites joignant M aux points circulaires situés dans le plan tangent en M ; ce sont

(1) Voir *Bulletin des Sciences math.*, 2e série, t. XXII, 1898, p. 168; t. XXX, 1906, p. 178.

les courbes de contact, avec (S), des cônes circonscrits ayant leur sommet en un point du cercle de l'infini ; elles sont représentées, sur la sphère de Gauss, par les génératrices de cette sphère ; leur équation différentielle peut s'écrire

$$R_1 + R_2 = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2},$$

R_1 et R_2 désignant les rayons de courbures principaux et les formes quadratiques du second membre étant les formes fondamentales.

Par chaque point M de (S) passent deux courbes (K) également inclinées sur les axes de l'indicatrice de Dupin. Si l'on prend comme lignes paramétriques les deux familles de courbes (K), l'équation des lignes de courbure est

$$L\,du^2 - N\,dv^2 = 0.$$

On cherche à définir des cas où l'équation des courbes (K) se ramène à des quadratures et l'on est amené à considérer les surfaces sur lesquelles les courbes (K) et leurs trajectoires orthogonales forment un réseau isotherme ; on détermine les surfaces de révolution de cette espèce. On montre que, si les courbes (K) forment un réseau de losanges, ces courbes et les lignes de courbure s'obtiennent par des quadratures. Les surfaces correspondantes satisfont à une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre qui s'obtient par la méthode de Lie, mais qui se ramène à une équation du deuxième ordre par l'emploi de paramètres de Bonnet ; l'application de la méthode est faite aux surfaces moulures et aux hélicoïdes.

E. Lacour.

MÉLANGES.

SUR LES CONGRUENCES ENGENDRÉES PAR LES TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES D'UNE QUADRIQUE EN ELLE-MÊME;

PAR M. RENÉ GARNIER.

1. On sait que l'enveloppe des droites joignant deux points en correspondance homographique sur une conique est une conique bitangente à la première aux points doubles de la correspondance (1). Je me propose, dans cette Note, d'établir un théorème analogue pour l'espace à trois dimensions :

Les droites qui joignent deux points correspondants dans une transformation homographique d'une quadrique Q en elle-même engendrent une congruence Σ (2) dont la surface focale est composée de deux quadriques.

Cette proposition, aperçue pour la première fois par Cayley (3), établie analytiquement par M. A. Voss (4), a fait l'objet d'un intéressant Mémoire de M. H. G. Zeuthen (5). J'ignorais complètement l'existence de ces travaux quand j'ai obtenu la généralisation du théorème concernant les coniques; d'ailleurs, sauf en ce qui concerne les transformations de seconde espèce (6), la voie que j'ai

(1) On trouvera à la fin de cette Note une démonstration très simple de ce théorème.

(2) Cette congruence forme un cas particulier des congruences plus générales étudiées par M. Th. Reye [*Die Geometrie der Lage*, t. III (4e éd., Leipzig, 1910), p. 57].

(3) *Phil. Magazine*, t. VI, 1853, p. 100 (cité d'après M. A. Voss, *Math. Ann.*, t. XIII).

(4) *Math. Ann.*, t. XIII, p. 59.

(5) *Math. Ann.*, t. XXVI, 1886, p. 247.

(6) Afin d'exposer complètement la question, j'ai tenu à laisser figurer dans cette Note l'étude des transformations de seconde espèce; d'ailleurs, les résultats que j'ai obtenus à ce sujet précisent ceux de M. Zeuthen.

suivie est absolument différente de celle de M. H. G. Zeuthen. On remarquera, notamment, qu'il établit la nature de la surface focale (dans le cas des transformations de première espèce) à l'aide de la théorie générale des surfaces algébriques, tandis que j'arrive au même résultat par deux méthodes purement géométriques, permettant de prévoir et d'étudier les cas de décomposition possibles. L'une de ces méthodes présente un caractère élémentaire : elle repose sur l'existence de deux faisceaux linéaires de coniques, Γ et Δ, appartenant à Q et invariants par la transformation; la seconde méthode s'appuie sur la théorie générale des complexes.

Transformations de première espèce.

2. Les quadriques Q_1. — Il existe deux espèces de transformations homographiques H d'une quadrique Q en elle-même, suivant que H transforme en eux-mêmes ou permute les deux systèmes de génératrices de Q. Dans le cas des transformations de première espèce H_1, il existe entre les génératrices g_1 (ou g_2) du premier (ou du second) système une correspondance homographique; les droites doubles étant AC et BD pour le premier système, AD et BC pour le second, les quatre points A, B, C, D de Q se correspondent à eux-mêmes dans H_1.

Cela étant, observons d'abord que la transformée d'une conique Γ de Q passant par les points A, B (ou C, D) est une conique Γ' passant par les points A, B (ou C, D). En effet, soient M un point de Γ, M' son correspondant et Γ' la conique déterminée dans Q par le plan ABM'; les transformées g'_1 et g'_2 des génératrices g_1 et g_2 passant par M établissent sur Γ' une correspondance homographique nécessairement identique, comme présentant trois points doubles : A, B et M'. Quand M décrit Γ, la droite MM' découpe sur Γ et Γ' deux divisions homographiques telles que les points A et B communs à Γ et Γ' se correspondent à eux-mêmes; MM' engendre donc [1] en général une quadrique Q_1, bitangente à Q en A et B,

[1] En effet, soit Q_1 la quadrique passant par Γ, Γ' et la droite MM'; les génératrices de Q_1, du même système que MM', découpent sur Γ et Γ' deux divisions homographiques nécessairement identiques à celles de la transformation H_1 comme présentant avec ces dernières trois couples de points homologues communs : A, A; B, B; M, M'.

admettant AB et CD comme droites conjuguées. Le seul cas d'exception qui puisse se présenter est celui où Γ et Γ' coïncident : ce cas sera examiné plus loin (n° 5).

L'enveloppe des quadriques Q_1, quand le plan de Γ tourne autour de AB, sera la surface focale cherchée. Je vais établir qu'elle se compose de deux quadriques passant par le quadrilatère ACBD.

3. Enveloppe des quadriques Q_1. — Considérons les quadriques Σ passant par les côtés du quadrilatère ACBD ; il y a deux de ces quadriques Σ_1 et Σ_2 qui sont circonscrites à une quadrique Q_1 : en effet, les coniques découpées sur Q_1 par une des quadriques Σ sont situées sur deux cônes dont les sommets I_1, I_2 sont deux points de CD indépendants de Σ, comme étant conjugués par rapport à Q_1 et à CD ; les plans polaires de I_1 et I_2 par rapport à Q_1 sont précisément les plans de contact des quadriques cherchées Σ_1 et Σ_2. Démontrons maintenant que ces deux quadriques sont indépendantes de la quadrique Q_1.

A cet effet, faisons une transformation homographique $\mathcal{H}(k)$ qui substitue à tout point P de l'espace un point P′ du plan CDP tel que

$$C(ODP'P) = k = D(COP'P),$$

k étant un rapport anharmonique arbitraire (indépendant de P), et O étant l'intersection du plan CDP avec AB. $\mathcal{H}(k)$ établit sur Q une transformation (de première espèce) qui substitue aux génératrices g_1, g'_1 les génératrices h_1, h'_1, et l'on a

$$(CA, BD, h_1, g_1) = k = (CA, BD, h'_1, g'_1),$$

d'où

$$(CA, BD, h'_1, h_1) = (CA, BD, g'_1, g_1).$$

La génératrice h'_1 est donc la transformée de h_1 par H_1 ; raisonnant sur g_2 comme sur g_1, on en déduit aussitôt que les transformations $\mathcal{H}(k)$ et H_1 de la quadrique Q sont permutables. Il en résulte que la transformée par $\mathcal{H}(k)$ d'une quadrique Q_1 correspondant au point M_1 est la quadrique $Q_1(k)$ correspondant au point $M(k)$ transformé de M par $\mathcal{H}(k)$. Mais la transformation $\mathcal{H}(k)$ conserve évidemment chaque section plane de Σ_1 et Σ_2 passant par C et D et, par suite, change ces quadriques en elles-

mêmes : il en résulte que la quadrique $Q_1(k)$ correspondant au point $M_1(k)$ est encore inscrite à Σ_1 et Σ_2 : l'enveloppe des quadriques Q_1, et, par conséquent, la surface focale cherchée, comprend donc les quadriques Σ_1 et Σ_2. Elle ne peut, d'ailleurs, comprendre d'autres surfaces, car, deux quelconques des quadriques Q_1 étant bitangentes en A et B, l'intersection de Q_1 avec une quadrique infiniment voisine est formée de deux coniques nécessairement identiques aux courbes de contact de Q_1 avec Σ_1 et Σ_2.

4. Réciproque : Décomposition de la congruence des tangentes communes a Σ_1 et Σ_2. — Réciproquement, examinons maintenant si toute tangente commune à Σ_1 et Σ_2 appartient bien à la congruence. Soit P_1 un point arbitraire de Σ_1; les plans polaires de P_1 par rapport à Σ_1 et Σ_2 passent par la droite δ, intersection des plans polaires de P_1 par rapport aux quadriques dégénérées (ABC, ABD) et (CDA, CDB) du faisceau (Σ_1, Σ_2). Quand P_1 décrit une conique λ_1 de Σ_1 passant par A et B, δ reste donc dans un plan fixe ϖ_2 passant par AB. Or, P_2 et P'_2, points de contact avec Σ_2 des tangentes communes à Σ_1 et Σ_2 issues de P_1, sont situés aux intersections de δ avec la conique λ_2 découpée par ϖ_2 sur Σ_2. Soit alors Q'_1 la quadrique circonscrite à Σ_1 le long de λ_1 et passant par λ_2 (conditions évidemment compatibles); les droites P_1P_2 et $P_1P'_2$ ayant avec Q'_1 trois points communs sont les deux génératrices de Q'_1 passant par P_1. Mais Q'_1 étant bitangente à Q en A et B, son intersection avec Q se compose de deux coniques Γ_1 et Γ_2, passant par A et B et sur lesquelles les droites P_1P_2 décrivent deux divisions homographiques, (M_1) et (M_2); soient, de même, (M_1) et (M'_2) les divisions découpées sur Γ_1 et Γ_2 par les droites $P_1P'_2$. Il résulte immédiatement du théorème direct que les deux transformations de première espèce, H_1 et H'_1, changeant Q en elle-même, admettant AC et BD, CB et DA comme droites doubles et transformant M_1 soit en M_2, soit en M'_2, *définissent deux congruences* $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}'_1$ dont les surfaces focales sont identiques comme étant formées toutes deux de Σ_1 et Σ_2.

Établissons alors la relation qui existe entre H_1 et H'_1. Soient I un point de AB et T la projection de Q sur elle-même, faite de I comme centre; je dis que H'_1 est la transformée de H_1 par T. En effet, appelons m_1 le transformé de M par T, m'_1 celui de m_1

par H_1 et M'' celui de m'_1 par T ; $m_1 m'_1$ étant une génératrice de Q_1 (de même système que MM'), MM'' est la génératrice de l'autre système passant par M, ce qui suffit à justifier notre assertion. De plus, si G_1 et G_2 sont les génératrices de Q passant par m_1, et $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, $\overline{g_1}$, $\overline{g_2}$ les intersections de G_1, G_2, g_1, g_2 avec le plan ABM', il résulte des propriétés classiques de l'involution qu'on a

$$(ABM'\overline{g_1}) = (ABm'_1\overline{G_1}) = (BAM''\overline{g_2}) = \frac{1}{(ABM''\overline{g_2})}.$$

Par suite, les rapports anharmoniques constants

$$h = (AC, BD, g'_1, g_1)$$

et

$$k = (AD, BC, g'_2, g_2)$$

de la première transformation H_1 sont remplacés dans H'_1 par k^{-1} et h^{-1} respectivement : il revient au même de dire que la transformation inverse de H'_1 se déduit de H_1 par *l'échange des rapports anharmoniques fondamentaux h et k*.

En définitive, la congruence $\mathfrak{C}$ des tangentes communes à Σ_1 et Σ_2 se décompose (¹) en deux congruences $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}'_1$ engendrées par deux transformations homographiques H_1 et H'_1 de Q en elle-même. Il était aisé de prévoir d'ailleurs que $\mathfrak{C}_1$, par exemple, ne forme qu'une partie de $\mathfrak{C}$, car $\mathfrak{C}$ est d'ordre 4 et de classe 4, tandis que $\mathfrak{C}_1$ est d'ordre 2 et de classe 2 (²) : Si T est la projection de Q sur elle-même effectuée d'un point quelconque de l'espace P, le produit TH_1 est une transformation de seconde espèce H_2, possédant deux points doubles ; de même, soit C la section de Q par un plan arbitraire ϖ ; lorsque M décrit C les génératrices g'_1 et g'_2 correspondant aux génératrices g_1 et g_2 passant par M découpent sur C deux divisions homographiques dont les points doubles M_1 et M'_2 donnent les deux droites de $\mathfrak{C}_1$ contenues dans ϖ.

5. Cas où la surface focale de la congruence comprend une ligne focale. Examinons maintenant le cas d'exception ren-

(¹) Cette décomposition a été signalée pour la première fois par T. A. Hirst (*Coll. Math. in memoriam D. Chelini*, 1881, p. 64).

(²) Le raisonnement qui suit est identique à celui de M. H. G. Zeuthen (*loc. cit.*, p. [illegible]).

contré précédemment (n° 2); appelons P le point d'intersection de g_2 et g'_1; on a

$$AB(CDM'M) = AB(CDM'P) \times AB(CDPM) = hk.$$

Pour que Γ et Γ' (n° 2) coïncident, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait $hk = 1$. Lorsqu'il en est ainsi, MM' rencontre AB en un point I et la droite MM' enveloppe, lorsque M décrit Γ, une conique Γ_1 bitangente à Γ en A et B. La surface focale de notre congruence comprend donc une ligne focale AB et une surface S lieu des coniques Γ_1. Pour obtenir S, remarquons que si M décrit une conique Δ de Q passant par C et D, M' décrit une conique Δ' située dans un second plan passant par C et D [1], et la droite MM' passe constamment par le point I (car les sécantes à Δ issues de I découpent sur Δ et Δ' deux divisions homographiques nécessairement identiques à celles qu'établit H_1).

Cela étant, je dis que S coïncide avec la quadrique Σ passant par le quadrilatère ACBD et tangente à la droite MM' [2]. Soient, en effet, $M_1M'_1$ un autre couple de points correspondants et M_2 l'une des intersections de Γ avec le plan CDM_1; soit enfin M'_2 le transformé de M_2 par H_1. La corde $M_2M'_2$ de Γ est encore tangente à Γ_1, et, par suite, à la quadrique Σ; si I_2 est l'intersection de $M_2M'_2$ avec AB, $M_1M'_1$ passe par I_2; or, le cône de sommet I_2 et contenant la section de Q par le plan CDM_1 est bitangent à Σ en C et D et contient une tangente $M_2M'_2$ à Σ : c'est donc le cône circonscrit de I_2 à Σ et, par suite, $M_1M'_1$ est bien tangente à Σ.

Réciproquement, on voit aisément que toute tangente à Σ s'appuyant sur AB en un point quelconque appartient à la congruence.

Cette décomposition de la surface focale de $\mathfrak{S}_1$ se rencontre lorsqu'on étudie la congruence des droites d joignant un point quelconque d'une sphère à son transformé par une rotation d'amplitude ω autour d'un diamètre δ de la sphère : les droites d sont perpendiculaires à δ et tangentes (en général) à un ellipsoïde de révolution autour de δ, bitangent à la sphère aux extrémités du diamètre.

---

(1) Le cas où Δ et Δ' coïncident sera examiné plus loin (n° 6).

(2) Cette quadrique est évidemment déterminée d'une façon unique.

6. Cas où la surface focale de la congruence dégénère en deux lignes focales. — Resterait à étudier le cas où l'on a simultanément $hk = 1$ et $hk^{-1} = 1$, d'où $h = -1 = k$ (en excluant le cas de la transformation identique). Mais alors, on voit immédiatement que les droites MM′ rencontrent les droites AB et CD : la congruence $\mathfrak{S}_1$ est linéaire et la transformation H_1 est involutive : c'est une « projection gauche » de Q sur elle-même, dans laquelle les axes de projection sont conjugués par rapport à Q. Cette dégénérescence correspond au cas où la rotation envisagée tout à l'heure se réduit à une symétrie autour de δ ($\omega = \pi$).

7. Construction des points et des plans focaux correspondant a un rayon de la congruence. — Le mode de démonstration que l'on vient d'employer permet d'établir très simplement des propriétés remarquables des rayons de la congruence $\mathfrak{S}_1$. Appelons Q_2 la quadrique engendrée par les droites MM′ lorsque M décrit une conique Δ passant par C et D; soient J_1 et J_2 les points de AB jouant par rapport à Q_2 le même rôle que I_1 et I_2 (n° 3) par rapport à Q_1 : soient enfin R et R′ les points d'intersection de Δ et de la conique Γ′ de Q passant par A, B et M′. La corde MR passe nécessairement par l'un des points I_1 ou I_2, I_1 par exemple; MR′ passe alors par I_2. Or, du fait que I_1 et I_2 sont les pôles par rapport à Q_1 des plans de contact de Q_1 avec Σ_1 et Σ_2, il résulte immédiatement que le plan MM′R est tangent à Σ_1 : de même le plan MM′R′ est tangent à Σ_2 (et les droites M′R, M′R′ passent respectivement par J_1 et J_2). On a ainsi une construction simple des plans tangents à la surface focale aux points où elle est touchée par MM′ [1].

De même, il est facile de déterminer les points de contact de MM′ avec la surface focale : les quadriques passant par le quadrilatère ACBD forment, en effet, un faisceau tangentiel linéaire contenant Σ_1 et Σ_2; le lieu des pôles du plan MM′R par rapport à ces quadriques est donc une droite contenant nécessairement les pôles du plan MM′R par rapport aux couples de points (A, B) et (C, D); or, les intersections respectives de ce plan avec

[1] Cette construction a été obtenue différemment par M. H. G. Zeuthen (*loc. cit.*, p. 273).

AB et CD étant J_1 et I_1, leurs pôles par rapport à AB et CD sont J_2 et I_2. Le point de contact du plan MM′R avec Σ_1 est donc situé sur la droite I_2J_2 (qui, par suite, doit couper MM′); c'est la droite qui joint les intersections respectives du plan MM′R′ avec AB et CD; de même, le point de contact de MM′ avec Σ_2 s'obtient par un procédé analogue. On retrouve ainsi très simplement la belle construction de M. H. G. Zeuthen (¹).

8. Irrationalités qui s'introduisent dans la décomposition de la surface focale. — Indiquons enfin le rôle des points I_1 et I_2 au point de vue de la recherche algébrique de la surface focale. Le domaine de rationalité $\mathcal{R}$ auquel appartiennent les coefficients de Σ_1 (ou de Σ_2) est composé évidemment du domaine analogue pour Σ, amplifié des constantes fondamentales h et k et des racines de l'équation déterminant I_1 et I_2; mais puisque I_1M passe par R, il est loisible de remplacer cette dernière amplification de $\mathcal{R}$ par l'adjonction des coordonnées de R, ce qui est encore un résultat de M. H. G. Zeuthen (²).

9. Le complexe tétraédral $\mathfrak{T}$ et le complexe linéaire $\mathcal{L}$. — Nous allons donner maintenant une deuxième méthode pour établir la nature de la surface focale de $\mathcal{S}_1$; cette méthode repose sur la théorie générale des complexes et des congruences. Il est d'abord évident que $\mathcal{S}_1$ fait partie d'un complexe tétraédral $\mathfrak{T}$, car les points M et M′ se correspondent dans une transformation homographique de l'espace $\mathcal{R}$ définie par le tétraèdre fondamental ACBD et un couple quelconque de points correspondants M, M′ de Q. Montrons que $\mathcal{S}_1$ appartient aussi à un complexe linéaire $\mathcal{L}$ défini par la condition d'admettre AB et CD comme droites conjuguées et de contenir une droite quelconque MM′. Lorsque M décrit la génératrice g_1, M′ décrit g'_1 et MM′ engendre une quadrique S qui contient nécessairement la conjuguée $\overline{g_1}$ de g_1 par rapport au complexe linéaire (car g_1 coupant les droites AD, BC et MM′ de $\mathcal{L}$, il doit en être de même de $\overline{g_1}$, qui appartient dès lors à S). Ainsi, quand M décrit g_1,

(¹) *Ibid.*, p. 273.
(²) *Ibid.*, p. 273.

MM′ ne cesse d'appartenir à $\mathfrak{L}$. Or, soit $M_1 M'_1$ un couple quelconque de points correspondants sur Q; on passe de MM′ à $M_1 M'_1$ en se déplaçant d'abord sur une génératrice du premier système, puis sur une du second : durant ce déplacement, la droite MM′ ne cesse d'appartenir au complexe linéaire $\mathfrak{L}$. Il en résulte immédiatement que $\mathfrak{S}_1$ est d'ordre 2 et de classe 2.

10. Emploi d'une transformation homographique arbitraire. — Cela étant, appelons $\mathfrak{H}(h, k)$ une transformation homographique de l'espace aux points fondamentaux A, B, C, D et aux constantes fondamentales h, k *arbitrairement choisies*; $\mathfrak{H}(h, k)$ donne sur Q une transformation de première espèce. On voit sans peine que les opérations $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{L}$ sont permutables : en d'autres termes, le transformé par $\mathfrak{H}$ du cône de $\mathfrak{T}$ en M est le cône de $\mathfrak{T}$ au transformé par $\mathfrak{H}$ du point M et un énoncé analogue s'applique pour $\mathfrak{L}$. Il en résulte que si M est un point de la surface focale S de $\mathfrak{S}_1$, son transformé par $\mathfrak{H}$ appartient aussi à S; faisant varier h et k de toutes les façons possibles, on voit que si M n'est pas situé sur AB ou CD (¹), S comprend une quadrique passant par M et le quadrilatère ACBD. Il en résulte évidemment que S se compose de deux quadriques (et de deux seulement), circonscrites au quadrilatère ACBD (²).

11. Rapports avec la théorie de la surface de Kummer. — On pouvait arriver encore à ce dernier résultat en se servant de la théorie de la surface de Kummer : la surface focale d'une congruence $\mathfrak{S}$ définie comme intersection d'un complexe tétraédral $\mathfrak{T}$ et d'un complexe linéaire $\mathfrak{L}$ est une surface de Kummer $\mathfrak{K}$ pour laquelle le tétraèdre fondamental de $\mathfrak{T}$ est un tétraèdre de Rosenhain. Mais, dans le cas actuel, les arêtes AB et CD du

---

(¹) Si M appartient à AB, on voit de même que $\mathfrak{S}_1$ doit admettre AB comme ligne focale.

(²) Le même mode de démonstration permet d'établir d'une façon immédiate et intuitive le beau théorème de M. Zeuthen :

« Soit donné un polygone fermé dont tous les sommets se trouvent sur des quadriques passant par un quadrilatère gauche, et dont chaque côté est tangent à deux quadriques du même faisceau. Alors il en existera une infinité double, chaque sommet pouvant parcourir la surface où il se trouve, et chaque côté la congruence de Hirst à laquelle il appartient » (*loc. cit.*, p. 266).

tétraèdre étant conjuguées par rapport à $\mathcal{L}$, pour tout point F d'une des arêtes restantes, le plan polaire de F par rapport à $\mathcal{L}$ passe par l'arête correspondante, et le cône du complexe $\mathfrak{T}$ est décomposé en les deux faces adjacentes du tétraèdre. La surface $\mathcal{K}$ doit donc contenir le quadrilatère ACBD. Mais les plans tangents singuliers ABC et BCD doivent être tangents à $\mathcal{K}$ tout le long de BC, ce qui n'est possible que si $\mathcal{K}$ admet BC comme droite double; $\mathcal{K}$ dégénère donc en deux quadriques passant par le quadrilatère ACBD.

La congruence $\mathfrak{S}_1$ est donc une dégénérescence de la congruence du second ordre et de la seconde classe étudiée par Kummer [1]; cette dégénérescence est caractérisée par le fait que la surface focale (surface de Kummer dans le cas général) est dégénérée ici en deux quadriques.

Transformations de seconde espèce.

12. La surface focale. — Une transformation homographique de seconde espèce H_2 échange les deux systèmes de génératrices de Q; dans ce cas, la surface focale de la congruence correspondante $\mathfrak{S}_2$ s'obtient immédiatement : En raisonnant comme au n° **2**, on voit que le lieu des points d'intersection d'une génératrice g_1 (ou g_2) du système 1 (ou 2) avec la transformée g'_2 (ou g'_1) est une conique C_1 (ou C_2). Supposons [2] que C_1 et C_2 soient distinctes. La droite MM′ joignant deux points correspondants dans H_2 est évidemment une tangente commune aux cônes γ_1 et γ_2 circonscrits à Q suivant C_1 et C_2 [3].

13. Réciproque; cas particulier. — Réciproquement, toute tangente commune T à γ_1 et γ_2, non située dans un de leurs plans tangents communs, appartient à $\mathfrak{S}_2$. Car, soient P_1 et P_2 les points

---

(1) *Math. Abhandl. der Kön. Akad. der Wissensch. zu Berlin*, 1866, Berlin, 1867, p. 62-71.

(2) Si C_1 coïncide avec C_2, MM′ appartient aux deux plans tangents à Q en deux points de C et, par suite, passe par le pôle du plan de C_1 par rapport à Q; la transformation H_2, évidemment involutive dans ce cas, est identique à une projection centrale de Q sur elle-même.

(3) *Cf.* H. G. Zeuthen, *loc. cit.*, p. 267.

de contact respectifs de T avec γ_1 et γ_2, P'_1 et P'_2 les points de C_1 et C_2 appartenant aux génératrices de γ_1 et γ_2 passant par P_1 et P_2. Les génératrices de Q passant par P'_1 et P'_2 coupent T aux deux mêmes points M et M' qui se correspondent évidemment dans H_2.

Le raisonnement précédent suppose implicitement que P'_1 et P'_2 sont distincts, ce qui a toujours lieu si T n'est pas située dans un plan tangent commun à γ_1 et γ_2. Dans ce dernier cas, P'_1 et P'_2 coïncident avec l'un des points communs à C_1 et C_2, soit A. Or, pour que la corde MM' de Q soit située dans le plan tangent à Q en A, il faut que M soit sur la génératrice du premier (ou du deuxième) système passant par A; M' est alors sur l'autre génératrice passant par A. Mais il existe un point R de C_2 (ou de C_1) tel que MR soit une des génératrices du deuxième (ou du premier) système, et RM' une génératrice du premier (ou du deuxième) système. La droite MM', intersection des plans tangents à Q en A et en R, doit donc passer par le pôle du plan de C_2 (ou C_1) par rapport à Q : c'est le sommet de γ_2 (ou γ_1). En conséquence, pour qu'une tangente commune à γ_1 et γ_2, située dans un de leurs plans tangents communs, appartienne à Σ_2, il faut (et il suffit évidemment) qu'elle passe par le sommet de l'un des cônes (ce que l'on aurait pu établir aussi en raisonnant par continuité).

Algébriquement, la réciproque du théorème direct résultait aussi du fait que Σ_2 est du quatrième ordre et de la deuxième classe, comme la congruence des tangentes communes à γ_1 et γ_2 non situées dans leurs plans tangents communs : on le démontrerait en raisonnant comme pour Σ_1 (n° 4). Σ_2 est ainsi la congruence corrélative d'une congruence de deuxième ordre et de quatrième classe signalée par Kummer dans son Mémoire classique [1].

Démonstration du théorème énoncé au début.

14. Il résulte des considérations précédentes une démonstration très simple du théorème énoncé au début de cette Note.

« Soient, sur une conique Γ, deux points M et M', en correspondance homographique, les points doubles étant A et B. Par Γ faisons passer une quadrique Q; on a vu (n° 2) que le lieu des

[1] *Loc. cit.*, p. 24.

points d'intersection P des génératrices de Q (de systèmes différents) passant par M et M' est une conique Γ' passant par A et B. Or, la droite MM' est la trace sur le plan de Γ du plan tangent à Q en P; lorsque M varie, ce dernier plan enveloppe le cône circonscrit à Q le long de Γ'; sa trace sur le plan de Γ est donc bien une conique bitangente à Γ en A et B. »

Il ne paraît pas probable que le théorème analogue pour l'espace à trois dimensions puisse se démontrer d'une façon simple à l'aide de l'espace à quatre dimensions. La surface focale S pourrait être considérée comme la section par l'espace ordinaire d'une variété du quatrième ordre (à trois dimensions), « enveloppée » par un plan (à deux dimensions); cette variété serait une dégénérescence de la variété du quatrième ordre et de la troisième classe, signalée par M. H. W. Richmond [1] et dont la section par un espace tangent est une surface de Kummer.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

WEIGEL (Jak.). — *Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Integralkurven einer Differentialgleichung 1. Ordnung 2. Grades der Umgebung e. Doppelpunktes der Diskriminantenkurve.* [*Nova Acta Academiæ cæsareæ Leopoldino-Carolinæ germanicæ naturæ curiosorum.* Tom. XCVI. (Abhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Nr. 2). 32cm,5 × 25cm,5. 67 p. avec 57 fig. Halle. Leipzig, W. Engelmann. 5 m.

AUWERS (Arth.). — *Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen an den alten Meridianinstrumenten der Greenwicher Sternwarte.* I. Bd. Die Beobachtungen am Mittagsfernrohr 1743-1750. 31cm,5 × 23cm,5. v + 15 + 208 p. Leipzig, W. Engelmann. 30 m.

CZUBER (Eman.). — *Vorlesungen. über Differential- u. Integralrechnung.* II. (Schluss-) Bd. 3e édition. Gr. in-8, x-590 p. avec 103 fig. Leipzig. B. G. Teubner. Relié. 12 m.

---

(1) *Quarterly Journal*, t. XXXIV, 1903, p. 142 : c'est la variété corrélative d'une variété signalée pour la première fois par C. Segre. (*Mem. d. R. Acc. di Sc. di Torino*, 2e série, t. XXXIX, 1889, p. 63-96).

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk* et, pour ce qui concerne la Mécanique, sous la direction scientifique de *Paul Appell*. Tome IV, 5. vol. Systèmes déformables. Réd. dans l'édition allemande sous la direction de *F. Klein* et *C. H. Müller*. Fasc. 1. In-8, 1-96 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr 20.

Guillemin (Aug.). — *Tables de logarithmes à 4-8-12 décimales et nombres correspondants avec 12-13 chiffres, système normal*. Introduction donnant la construction et l'usage des Tables; Note complémentaires montrant leur utilité éventuelle. In-8, XXIII-128 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

Michaelis (Leonor). — *Einführung in die Mathematik f. Biologen u. Chemiker*. In-8, VII-253 p. avec 96 fig. Berlin, J. Springer. 7 m.; relié, 7 m. 80.

Pasch (Mor.). — *Vorlesungen über Geometrie*. 2e édition augmentée. Gr. in-8, IV-227 p. avec 72 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 6 m.; relié, 7 m.

Rouché (E.) et Comberousse (C. de). — *Traité de Géométrie*. 8e édit., Première Partie : *Géométrie plane*. In-8, XLII-546 p. avec fig. 7 fr 50. Deuxième Partie : *Géométrie dans l'Espace*. In-8, XVIII-664 p. avec fig. 9 fr 50. Paris, Gauthier-Villars.

Kassner (C.). — *Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen im J.* 1910. (*Veröffentlichungen des königl. preussischen meteorologischen Instituts*. Hrsg. durch dessen Direktor *Hellmann*. Nr. 249.) 34cm × 26cm, XL-154 p. avec 1 carte et 15 cartes dans le texte. Berlin, Behrend et Cie. 14 m.

Schmidt (Ad.). — *Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam u. Seddin im J.* 1911. (*Veröffentlichungen des königl. preussischen meteorologischen Instituts*. Hrsg. durch dessen Direktor *Hellmann*. Nr 250.) 34cm × 26cm, 40 et 28 p. avec 4 pl. et 13 feuilles de courbes. Berlin, Behrend et Cie. 14 m.

Süring (R.). — *Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im J.* 1911. (*Veröffentlichungen des königl. preussischen meteorologischen Instituts*. Hrsg. durch dessen Direktor *Hellmann*. Nr. 251.) Mit 2 Abhandlgn. v. *W. Marten* u. *K. Kähler*. 34cm × 26cm, XXXI-94 p. Berlin, Behrend et Cie. 8 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CENTENAIRE DE LA NAISSANCE DE U.-J.-J. LE VERRIER. *Institut de France.* 1 vol. gr. in-8, avec 5 gravures hors texte, 128 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Le Verrier avait déjà reçu de l'Académie des Sciences, par la voix de Joseph Bertrand, l'hommage qui était dû à sa grande mémoire. Mais cet éloge, riche de vues générales et de jugements incisifs, faisait désirer comme complément quelques pièces justificatives. Ce sont ces pièces que nous fournit aujourd'hui l'Institut, et plus particulièrement l'Académie des Sciences, grâce au zèle éclairé de sa Section d'Astronomie.

La matière était riche ; il a fallu choisir, élaguer, user à la fois de discernement et de prudence. Le Verrier, on le sait trop, ne craignait pas la lutte et n'y ménageait guère les coups. Souvent ses appréciations, concernant ses adversaires et même ses collaborateurs d'occasion, sont formulées en termes tels qu'on pouvait difficilement les laisser sans réponse. Les éditeurs du travail que nous avons sous les yeux n'ont pas voulu réveiller des polémiques assoupies. Ils ont remplacé par des initiales divers noms propres que le lecteur curieux aura peu de peine à rétablir.

Il y a, dans la carrière de Le Verrier, une première phase où tout semble lui sourire. Comme ses contemporains Balard et J.-B. Dumas, il connaît au début la gêne, la vie étroite. Mais devant son énergie, les obstacles s'aplanissent vite. Il entre à l'École Polytechnique en 1831, époque de fermentation généreuse et de grands espoirs. Sa première orientation est vers la Chimie. Il publie des essais qui promettent un maître. Mais voici qu'une place devient vacante dans l'enseignement de l'Astronomie. Marié jeune, il faut que Le Verrier s'assure une situation. Il demande le poste, l'obtient et en remplit les devoirs avec une largeur singulière. Plusieurs Mémoires de Mécanique céleste, parus en peu d'années, le placent au premier rang dans l'estime des géomètres. Arago, Liouville, J.-B. Biot se font ses patrons. A 34 ans, il est

membre de l'Académie des Sciences (19 janvier 1846), et l'année n'est pas écoulée qu'il achève de justifier ce choix par un coup d'éclat.

Dans l'été de 1845, Arago avait engagé Le Verrier à s'occuper du difficile problème des irrégularités d'Uranus. Tous deux ignoraient que, depuis un an déjà, un jeune mathématicien anglais, Adams, avait reçu d'Airy le même conseil. Parti avec cette notable avance, Adams obtint le premier un résultat qui aurait dû conduire au succès. Mais, se défiant trop de ses forces, il ne publia rien et les astronomes sollicités de rechercher la planète perturbatrice le firent sans hâte. Pendant ce temps, Le Verrier multipliait les publications, les preuves, les requêtes. La lettre nette et pressante qu'il fit parvenir à Galle le 18 septembre 1846 et que l'Institut a eu l'heureuse pensée de reproduire en *fac simile*, fit soudain luire autour de son nom l'auréole de la découverte.

Le Verrier reçoit aussitôt, de tous les pays, les félicitations des astronomes les plus capables de mesurer l'importance et la difficulté de la tâche : les honneurs s'accumulent sur lui. Une chaire de Mécanique céleste est créée en sa faveur à la Faculté des Sciences de Paris.

Mais voici que déjà ce matin splendide se voile de nuages. Le Verrier, jaloux de sa gloire, prend ombrage de quelques publications où le mérite d'Adams est souligné. Ses réclamations sont jugées intempestives. La proposition de donner son nom à la planète nouvelle trouve peu d'écho et le grand analyste en conçoit une amertume qui devait se traduire par la suite en animosités personnelles.

Mais il a tôt fait de se remettre au travail. Dans une lettre au Ministre de l'Instruction publique (18 février 1847), lettre admirable de logique, de passion contenue, il trace le plan d'une œuvre gigantesque, d'une théorie mathématique embrassant toutes les planètes du système solaire. Il n'est que temps, dit-il, d'aborder l'entreprise si l'on ne veut pas qu'une nation voisine nous y devance. Et il sollicite l'aide matérielle, bien modique du reste, qui doit lui assurer la victoire. Se doute-t-il, à ce moment, qu'il engage les trente années qui lui restent à vivre? Pour son ardeur conquérante la découverte de Neptune n'est déjà plus qu'un bref épisode, presque oublié.

On se chargea bientôt de le lui rappeler. Il avait eu le malheur de donner à entendre que les ressources affectées par le budget de la France à l'Astronomie se dépensaient, pour une bonne part, sans résultat. Au lieu de porter la discussion sur ce point, on entreprit d'amoindrir l'autorité du critique. Dans les *Comptes rendus* de l'Académie, dans la presse quotidienne, on publia que l'astre aperçu dans la lunette de Galle y avait été amené par une chance heureuse plus que par la vertu du calcul, qu'il fallait chercher ailleurs la cause des perturbations d'Uranus.

Le Verrier aurait pu dédaigner ces attaques. Ses admirateurs étrangers, ses rivaux même se seraient chargés de les réduire à néant. Leurs lettres publiées ici en témoignent. Mais la patience n'était pas au nombre de ses vertus. Il fit front de tous côtés, porta des coups sensibles, en reçut lui-même quelques-uns.

Appelé à l'Assemblée nationale en 1848, au Sénat en 1852, il y fit apprécier sa puissance de travail et la lucidité de son jugement. Nous trouvons ici une liste de rapports dont il fut chargé concernant de graves questions de travaux publics, d'administration et d'enseignement. On put croire qu'il allait être, comme J.-B. Dumas, ravi à la science par la politique. Là non plus le chemin n'aurait pas été pour lui sans épines; il eût trouvé les hommes moins faciles à manier que les chiffres.

Les événements lui firent reprendre sa voie. Le 31 janvier 1854 il fut appelé à la direction de l'Observatoire de Paris, désormais indépendant du Bureau des Longitudes. Avant la fin de cette même année, il fit parvenir au ministre un rapport magistral, développant ses vues sur l'organisation et l'avenir de l'établissement. Tout était à reprendre sur de nouvelles bases et l'on avait fait espérer au nouveau directeur que de larges crédits lui seraient ouverts. Les promesses faites ne furent pas tenues ou ne le furent que tardivement, d'où réclamations pressantes et répétées. On devine que des influences hostiles à Le Verrier avaient trouvé accès auprès des Pouvoirs publics.

Les réformes les plus urgentes furent cependant faites, et l'Observatoire connut quelques années de travail assidu et fécond. En dehors de ses travaux personnels, Le Verrier conduisit à bien l'organisation du Service météorologique international, celle de l'Association scientifique de France. Mais les luttes recommencèrent

et ne firent que s'aviver par la constitution d'un Conseil de l'Observatoire. Découragé, en dissentiment avec presque tous ses collaborateurs, Le Verrier alla lui-même, par une interpellation au Sénat, au devant d'une révocation (5 février 1870). La théorie des planètes principales n'en fit, entre ses mains, que plus de progrès.

Ce loisir relatif dura peu. Trois ans après, à la suite de la mort tragique de Delaunay, Le Verrier était rétabli dans les fonctions de directeur. Ses dernières années furent plus calmes. Sentant décliner ses forces, il les concentra sur l'achèvement de son grand travail. A la fin de 1876, il pouvait annoncer à Airy que les Tables de Neptune étaient complètes. Elles ne furent présentées à l'Académie qu'après sa mort, par son ami Tresca. Mais Le Verrier avait eu le temps de recevoir la réponse d'Airy, témoignage motivé d'une admiration à laquelle s'associent aujourd'hui tous les astronomes, tous les analystes, et que le temps ne saurait que fortifier en l'épurant.

Les lettres d'Airy, le discours d'Adams offrant à Le Verrier la médaille d'or de la Société Royale (1876) caractérisent l'œuvre accomplie en des termes qu'il serait trop long de reproduire une fois de plus et superflu de commenter. Mais la liste chronologique de ses travaux, dressée par l'Académie, sera pour plus d'un lecteur l'occasion de découvertes savoureuses. Ses 270 articles (sans parler d'importantes publications périodiques) montrent dans combien de directions ce puissant esprit avait porté son clair bon sens, sa ténacité, son intransigeance. Quelques-uns de ces titres dégagent encore une odeur de bataille. Nous y lisons par exemple : *Réfutation de quelques critiques et allégations portées contre l'Observatoire de Paris et dénuées de toute espèce de fondement.* Le Verrier eût gagné quelque chose (sur le moment) à ne point se faire ainsi juge et partie. Il était de ceux qui peuvent attendre avec une confiance sereine le jugement, clair à leurs yeux, de l'avenir.

P. Puiseux.

FORSYTH (A. R.). — Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. 1 vol. in-4°, XXIII-525 pages. Cambridge, at the University Press, 1912.

Le titre de ce Volume n'est pas menteur. C'est véritablement un traité, et un traité très intéressant, de Géométrie infinitésimale, que nous offre M. Forsyth. L'Ouvrage trouve son origine dans les leçons qu'a faites l'éminent géomètre à l'Université de Cambridge.

Ces leçons n'ont pas eu comme but de présenter aux étudiants un aperçu absolument complet de tout ce que l'on peut faire entrer dans la Géométrie infinitésimale. L'auteur a même négligé de mettre dans son Ouvrage plus d'une théorie sur laquelle il a écrit des Mémoires originaux. Son idéal, il nous le dit lui-même, était de munir les étudiants des instruments de recherche les plus essentiels, en sorte que son Livre est surtout destiné à ceux qui veulent poursuivre et faire œuvre originale.

Le Chapitre I, qui comprend 28 pages, est consacré aux courbes gauches. L'auteur y définit et étudie leurs principaux éléments : tangente, plan normal, plan osculateur, courbure, torsion, plan polaire, plan rectifiant, sphère osculatrice, etc. Il y détermine le signe de la torsion de telle manière que cet élément soit positif pour une hélice *dextrorsum*. A propos de la méthode cinématique, il fait connaître le diagramme de Routh. Ce Chapitre se termine par la démonstration des formules de Serret-Frenet et la détermination des courbes dont on connaît, soit la torsion, soit la courbure.

Les Chapitres II à VI peuvent être considérés comme donnant une théorie très complète des courbes tracées sur les surfaces. Le Chapitre II, qui présente la notion des coordonnées curvilignes, introduit les coefficients des deux formes quadratiques qui se présentent dans l'expression de la courbure normale. Il contient aussi l'équation différentielle des lignes de courbure, l'équation aux rayons de courbure principaux et, par suite, le célèbre théorème de Gauss relatif à l'expression de la courbure totale. Ce que nous signalerons de plus intéressant dans ce Chapitre, c'est que M. Forsyth ne se borne pas au second ordre, mais qu'il introduit

des grandeurs dérivées du troisième, du quatrième ordre et même des ordres supérieurs.

Le Chapitre suivant contient l'étude des lignes qui ont en quelque sorte une relation organique avec la surface : lignes de courbure, systèmes conjugués, lignes asymptotiques, lignes de longueur nulle. A ce propos, l'auteur donne les équations en termes finis qui caractérisent les surfaces minima. Le Chapitre se termine par la définition des systèmes isométriques et quelques propriétés des lignes géodésiques.

Le Chapitre IV est plus spécialement consacré aux lignes de courbure. M. Forsyth étudie leur forme dans le voisinage d'un ombilic. Il indique quelques propriétés élémentaires, puis passe à la surface des centres, à propos de laquelle il fait connaître les deux beaux théorèmes de Ribaucour relatifs aux cas où soit les lignes de courbure, soit les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de cette surface. Le Chapitre se termine par quelques mots sur la surface des centres d'un ellipsoïde et sur la développée moyenne, introduite par Ribaucour.

Le Chapitre suivant comprend une étude développée des lignes géodésiques : application du calcul des variations; géodésiques en général; géodésiques sur les surfaces de révolution, sur l'ellipsoïde; ellipses et hyperboles géodésiques; relations avec l'équation $\Delta\varphi = 1$; cas pour lesquels cette équation aux dérivées partielles admet une intégrale linéaire, ou une intégrale quadratique.

Le Chapitre VI revient aux courbes quelconques tracées sur une surface et expose la théorie des invariants différentiels. Cette théorie est traitée à un point de vue très élevé, et bien qu'un peu court à notre gré, cet exposé suggestif retiendra l'attention du lecteur.

Avec le Chapitre VII nous abordons la comparaison des surfaces : représentation conforme et Cartes géographiques; représentation géodésique de Beltrami et théorème de Tissot, représentation sphérique; théorème de Joachimsthal sur les lignes de courbure; détermination des surfaces admettant une représentation sphérique donnée, etc.

Le Chapitre VIII contient un exposé des propriétés essentielles des surfaces minima, données par Monge, Bonnet, Weierstrass, Lie, Schwarz.

Le Chapitre IX traite des surfaces admettant des lignes de courbure planes ou sphériques, ainsi que des surfaces de Weingarten.

Le Chapitre X est intitulé : *Déformation des surfaces*. L'auteur y développe d'abord le cas particulier des surfaces à courbure constante et des surfaces de révolution. Puis il aborde le cas général; à cette occasion, il expose les propriétés générales des équations aux dérivées partielles qui interviennent dans cette théorie et examine d'une manière détaillée ce qui concerne la déformation d'une surface réglée. Le Chapitre se termine par l'étude de la déformation infiniment petite, traitée suivant la méthode de Weingarten.

Les Chapitres XI et XII sont consacrés à des sujets tout nouveaux. Le Chapitre XI nous présente un exposé complet des recherches sur les systèmes triples orthogonaux.

Le Chapitre XII et dernier traite des congruences des courbes. Après quelques généralités, nous abordons les congruences rectilignes qui, entre les mains de Malus, Dupin, Hamilton, Kummer, ont fourni tant de beaux théorèmes; puis les congruences de cercles et les systèmes cycliques.

L'exposé sommaire que nous venons de faire suffit à montrer que l'Ouvrage remplit bien le but auquel son auteur le destinait. Ajoutons que chaque Chapitre est accompagné d'exercices dont l'étude provoquera chez l'étudiant le développement de l'esprit d'invention. C'est là une raison de plus pour que l'Ouvrage soit bien accueilli de tous ceux qui s'intéressent au progrès des études géométriques.

J. J.

PETERS (J.). — Fünfstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. 1 vol. in-8 jésus, IV-83 pages. Berlin, Georg Reimer, 1912.

M. J. Peters est bien connu de ceux qui aiment les calculs numériques, pour les précieux services qu'il ne cesse de leur rendre : dans l'espace de quelques années, il a publié de nouvelles Tables de multiplication, sur le modèle de celles de Crelle, fournissant les produits des nombres de deux chiffres par ceux de quatre chiffres ; puis, en collaboration avec M. J. Bauschinger, des

Tables trigonométriques à 8 décimales, de seconde en seconde ; une édition réduite à 7 décimales de ces mêmes Tables ; les valeurs naturelles à 21 décimales des sinus et cosinus de 10 minutes en 10 minutes, et de seconde en seconde pour les 10 premières minutes ; des Tables pour le calcul de l'équation du centre ; etc., etc. Aujourd'hui, il offre aux calculateurs des Tables trigonométriques à 5 décimales, de seconde en seconde de temps : de telles Tables existaient déjà pour les calculs à 4 ou 7 décimales, mais non à 5 : c'est donc un nouveau service que M. Peters rend aux calculateurs, en leur évitant de fastidieuses transformations et en leur permettant d'épargner le temps.

Pour les 8 premières minutes, l'argument croît de dixième en dixième de seconde de temps, et les nombres S et T bien connus sont fournis jusqu'à 20 minutes.

A partir de 8 minutes, l'interpolation se fait à vue, à l'aide de Tableaux de parties proportionnelles heureusement disposés.

L'usage des nouvelles Tables de M. J. Peters doit être vivement recommandé à tous ceux qui s'occupent de calculs astronomiques.

H. Andoyer.

FABRY (E.). — Problèmes d'Analyse mathématique. 1 vol. grand in-8°, IV-460 pages, Paris, A. Hermann et fils, 1913.

On peut dire du Recueil de problèmes publié aujourd'hui par M. Fabry qu'il répond à un véritable besoin. Depuis le Recueil classique de Tisserand, complété par M. Painlevé, aucun Livre n'avait paru qui permît de se faire rapidement une idée d'ensemble des questions traitées en exercices dans les cours de calcul différentiel et intégral de nos Facultés des Sciences, et qui fixât en quelque sorte, pour les étudiants, le programme de ces cours. M. Fabry, en nous donnant 279 problèmes, tous proposés aux examens de licence depuis une dizaine d'années, rend donc à l'enseignement un précieux service.

Dans le Livre de M. Fabry on ne trouvera pas, comme par exemple dans le Recueil récemment publié par M. d'Adhémar, des problèmes ultra-modernes et des aperçus sur certaines parties

délicates de l'Analyse. Les questions qui nous sont proposées sont toutes des applications directes du cours de licence, et, rapprochées comme elles le sont les unes des autres, classées dans un ordre systématique et pédagogique, elles ne demandent plus guère d'invention de la part de celui qui les traite. Ainsi, en suivant pas à pas le Livre de M. Fabry, on pourra s'initier sans difficulté au mécanisme du calcul et à l'interprétation rapide des problèmes d'examen, qui, sous des formes et des apparences diverses, tournent en somme autour d'un nombre assez limité de questions. C'est dire — en d'autres termes — que le Recueil de M. Fabry est surtout destiné aux candidats au Certificat de calcul différentiel et intégral, et, en particulier, aux étudiants qui travaillent seuls. Les énoncés des problèmes étant séparés des solutions, l'étudiant peut chercher lui-même ces dernières sans être trop impérieusement tenté de prendre tout de suite connaissance des résultats. D'ailleurs, les solutions ne sont pas toutes également développées. Exposées en détail au début de chaque Chapitre, elles servent d'occasion à une revision des principales formules et des théorèmes qu'il est nécessaire de connaître pour les obtenir. Après quoi, pour les problèmes suivants du même Chapitre, M. Fabry se borne à une indication sommaire des solutions. Souvent, il supprime presque complètement les calculs intermédiaires, se bornant à donner à l'étudiant un moyen de contrôler son travail personnel et ne le dispensant aucunement de ce travail. Bref, il est dans l'intention de M. Fabry de demander quelque effort à celui qui utilise son Livre, mais de diriger cet effort et de le soutenir juste assez pour qu'il ne soit ni stérile ni rebutant.

Ajoutons que l'Ouvrage de M. Fabry fait directement suite au Recueil de *Problèmes et Exercices de Mathématiques générales* publié par le même auteur en 1910, et que le débutant pourra acquérir dans ce premier Recueil la préparation qui lui est nécespour aborder les problèmes d'Analyse proprement dite.

Le fond de l'Ouvrage n'appelle, étant donné le but pédagogique que poursuit M. Fabry, aucune remarqne spéciale. La répartition des problèmes entre un certain nombre de Chapitres, qui correspondent aux sections principales des cours d'Analyse, est faite d'une manière empirique. Sont rangées dans un même Chapitre les questions dont la partie centrale dépend des mêmes

théories et se résout par la même méthode. Les problèmes dont l'énoncé est géométrique sont, comme de juste, fort nombreux. Il en est de même des questions de pur calcul proposées aux examens comme « épreuves pratiques ». Le dernier Chapitre, consacré aux fonctions elliptiques, montre, malgré son peu d'étendue, que l'étude de ces fonctions n'est point entièrement bannie des cours de licence.

PIERRE BOUTROUX.

NEUMANN (ERNST RICHARD). — BEITRÄGE ZU EINZELNEN FRAGEN, DER HÖHEREN POTENTIALTHEORIE. Nr XLI. Preisschriften gekrönt und herausgeben von der fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Nr XVII der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion. 1 vol. in-8 jésus, XXIII-188 pages. Leipzig, B. G. Teubner, 1912.

Ce travail se rapporte aux deux problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel : trouver une solution de l'équation de Laplace qui prenne sur une surface fermée (Σ) des valeurs données à l'avance (premier problème) ou telle que la dérivée de cette fonction, prise suivant la normale à une surface fermée (Σ), ait des valeurs données à l'avance pour les points de (Σ) (deuxième problème) et qui satisfasse à des conditions de continuité que l'on précise, soit dans la région intérieure, soit dans la région extérieure à (Σ). Il s'agit surtout de montrer, comme le demandait C. Neumann, que, dans chacun de ces problèmes, la solution pour la région intérieure à (Σ) et la solution pour la région extérieure peuvent se déduire l'une de l'autre, ou plutôt se déduisent toutes les deux d'une même fonction auxiliaire.

La méthode de la fonction de Green donne, pour la solution F^1 du premier problème correspondant à une suite arbitraire (et continue) de valeurs données sur le contour, une expression de la forme

$$F^1_0 = \int f_\sigma \eta_{(0)\sigma} d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface Σ limitant le domaine considéré, et $\eta_{(0)\sigma}$ une fonction donnée pour tous les points de (Σ) et qui dépend de la position d'un point o, à la façon d'un paramètre.

C. Neumann croyait pouvoir représenter cette fonction $\eta_{i(0)\sigma}$ dans sa dépendance de la position du point o, aussi bien pour les points intérieurs que pour les points extérieurs, comme le potentiel d'une même couche étendue sur la surface Σ, et dont la densité dépendait naturellement de la position du point o. L'auteur a déjà montré en 1907, et reprend avec plus de détails dans ce Livre, la nécessité d'ajouter certains termes définis simplement et qui ne peuvent être représentés comme des potentiels, et pour cette raison remplace l'expression *couche fondamentale* (Grundbelegung), employée par C. Neumann, par l'expression *Grundrestbelegung* pour la couche correspondant au potentiel qui entre dans l'expression de $\eta_{i(0)\sigma}$.

Mais, avec cette correction, on obtient ce résultat que la connaissance d'une seule fonction (celle qui détermine la densité de la couche considérée) suffit pour résoudre le *premier problème*, aussi bien pour la région extérieure que pour la région intérieure. La raison pour laquelle il a été nécessaire d'introduire certains termes qu'on ne peut représenter comme des potentiels est que la solution du *premier problème* pour une suite continue de valeurs données sur le contour ne possède pas forcément une dérivée normale déterminée; elle ne peut donc pas, dans tous les cas, être représentée sous la forme d'un potentiel de simple couche.

Pour le *deuxième problème*, la question de représenter la solution sous forme de potentiel se présente d'une façon plus simple et les rapports entre les solutions pour la région intérieure ou pour la région extérieure peuvent être mis plus facilement en évidence. La méthode de Robin donne la solution sous la forme d'un potentiel de simple couche, mais elle peut aussi se mettre sous la forme d'un potentiel de double couche étendue sur la surface Σ; d'après des propriétés connues et en particulier un théorème de Liapounoff, une même double couche convient au problème intérieur et au problème extérieur pour une même suite de valeurs données de la dérivée normale.

Si la fonction g_s définit les valeurs, sur le contour, de la dérivée normale, on a, pour la région intérieure, puis pour la région extérieure,

$$F_i^{\text{II}} = \int M_\sigma (d\sigma)_i$$

et

$$F_i'' = \int M_\sigma (d\sigma)_a,$$

$(d\sigma_i)$ et $(d\sigma_a)$ étant l'angle solide sous lequel on voit d'un point intérieur, ou d'un point extérieur, l'élément de surface $d\sigma$, et le moment M_σ de la double couche est donné par une expression de la forme

$$M_s = \int g_\sigma D_{(s)\sigma} d\sigma,$$

$D_{(s)\sigma}$ étant une fonction qu'on définit sur (Σ) et qui dépend, comme d'un paramètre, de la position d'un point déterminé s de Σ.

Dans ce qui précède (deuxième et troisième Sections), on a pu traiter simultanément le cas du potentiel newtonien et celui du potentiel logarithmique ; on écrit même une seule équation pour les deux cas, après avoir introduit des notations convenablement définies ; par exemple, T désigne $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ dans le plan et $\frac{1}{r}$ dans l'espace, r étant la distance de deux points.

La quatrième section est consacrée à une question très particulière, savoir : le rapport entre les couches fondamentales (Gründrestbelegüngen) de deux surfaces qui se déduisent l'une de l'autre par la méthode des rayons vecteurs réciproques.

Dans la cinquième Section, les théories développées en commençant sont appliquées au cercle, à la sphère, à l'ellipse ; dans ces cas particuliers, on peut plus facilement étudier en détail la façon dont se comportent des fonctions que l'auteur appelle *fonctions polaires*, qui s'introduisent avec avantage quand on applique au *premier problème* la méthode de Neumann.

Un *Supplément* traite de questions de convergence qui ont été rejetées ainsi à la fin pour ne pas interrompre l'exposition.

Ces questions de convergence ou ces théorèmes d'existence résultent souvent, avec plus de rapidité, de la théorie des équations intégrales ; l'auteur estime qu'il n'y a pas lieu cependant d'abandonner les méthodes directes, même si elles entraînent une analyse plus longue, parce qu'elles peuvent mieux être adaptées aux questions particulières pour lesquelles ces méthodes ont été construites.

E. Lacour.

SCHMID (THEODOR). — DARSTELLENDE GEOMETRIE. I. Band. Mit 170 Figuren. (*Sammlung Schubert*, LXV.) 1 vol. petit in-8°, VI-279 pages. Berlin und Leipzig, G. J. Göschen, 1912.

Le Traité de Géométrie descriptive dont M. T. Schmid vient de publier la première Partie forme le soixante-cinquième Volume de la Collection Schubert. Il correspond au programme de notre classe de Mathématiques et à une grande partie du programme de la classe de Spéciales.

La première Section de l'Ouvrage expose la représentation des points, droites et plans, des polygones et des polyèdres, à l'aide de deux ou trois plans de projection rectangulaires. Après avoir montré, suivant la méthode de Mannheim, comment on peut supprimer la ligne de terre, l'auteur étudie la représentation des points d'une droite, en particulier, dans le cas où la droite diffère peu d'une parallèle au troisième plan de projection; puis il donne la représentation d'un plan à l'aide de deux droites concourantes et explique l'usage des rotations. Viennent ensuite la représentation d'un triangle et l'énoncé du théorème sur les triangles homologiques, ainsi que la distinction des faces du triangle vues sur chaque projection; de nombreuses figures épuisent les divers cas possibles. Puis, l'auteur passe aux relations entre les points et les droites n'appartenant pas à un même plan; il étudie l'éclairement d'une aire plane, la figuration des ombres propres, des ombres portées, et en fait l'application au dodécaèdre et à l'icosaèdre réguliers, ainsi qu'à des solides usuels.

La seconde Section de l'Ouvrage débute par les propriétés de la polarité et de l'antipolarité par rapport à un cercle, qu'on retrouvera en Axonométrie. Viennent ensuite les problèmes classiques sur la sphère, le cylindre de révolution et ses sections, les propriétés des diamètres de l'ellipse et la théorie de l'antipolarité par rapport à cette courbe employée en Statique graphique. L'auteur étudie alors les relations entre le rayon de courbure en un point d'une courbe et au point correspondant de sa projection; il en fait l'application à l'ellipse et montre comment on peut utiliser

les cercles de courbure pour le tracé d'une ellipse. Après avoir appliqué ces résultats à la représentation et à l'éclairement d'un cercle, ainsi qu'aux triangles sphériques, M. Schmid aborde l'étude des sections planes d'un cône de révolution et des coniques focales, l'éclairement en rayons parallèles de la sphère et du cône.

Dans la troisième Section, l'auteur indique d'abord une construction approximative ingénieuse du nombre π; puis il expose la théorie du développement du cylindre et du cône de révolution, calcule le rayon de courbure en un point de la courbe développée, en déduit correctement la construction des points d'inflexion. Viennent ensuite les singularités des courbes planes (conchoïde de droite et sa polaire réciproque), les développantes du cercle, de l'hyperbole équilatère, les propriétés simples des courbes gauches, de l'hélice, de l'hélicoïde développable et de leur éclairement. Puis nous passons à l'intersection de deux surfaces (cônes et cylindres), aux courbes du quatrième ordre pourvues d'un point double (fenêtre de Viviani) ou d'un point de rebroussement, et à l'application de la biquadratique gauche à l'étude des ombres anto-portées.

Enfin, la quatrième Section expose les propriétés fondamentales de la perspective axonométrique orthogonale et ses applications aux polyèdres et aux corps ronds.

Quoique rédigé surtout en vue des applications techniques, l'Ouvrage de M. Schmid fait un fréquent appel aux théories purement géométriques : il n'en est ainsi que plus vivant et plus attrayant. Des exercices bien choisis permettent à l'élève d'appliquer à tout instant les enseignements de l'auteur. Les épures sont tracées avec beaucoup de soin; tout au plus pourrait-on regretter que le format de la Collection Schubert n'ait pas permis de les publier à une plus grande échelle.

R. Garnier.

YOUNG (JOHN WESLEY). — LECTURES ON FUNDAMENTAL CONCEPTS OF ALGEBRA AND GEOMETRY. Prepared for publication with the cooperation of WILLIAM WELLS DENTON. With a Note on *the growth of algebraic symbolism by* ULYSSES GRANT MITCHELL. 1 vol. in-8°, VII-247 pages. New York, the Macmillan Company, 1911.

L'auteur nous expose, en une courte préface, la genèse de l'Ouvrage et son but. Il lui parut qu'il était temps de donner un exposé concis, élémentaire, des résultats récemment acquis sur le problème de la base logique des mathématiques. Cette question intéresse les professeurs, les philosophes, les logiciens et plus encore ceux qui, par faveur spéciale, unissent plusieurs de ces qualités. Mais la sollicitude de M. Young va surtout aux professeurs, et c'est pour eux qu'il a semé dans son Livre des conseils pédagogiques, nombreux et excellents.

L'Ouvrage est formé par la réunion de leçons professées en 1905 à l'Université d'Illinois.

Les cinq premières, consacrées à un examen critique de nos conceptions de l'espace, préparent à la discussion plus formelle qui doit suivre.

De quelle nature sont les termes non définis, les propositions non démontrées qui doivent nécessairement être à la base de tout édifice logique, la Géométrie par exemple?

Euclide, le premier, a tenté cette construction, mais ses notions fondamentales de point, ligne, distance ont-elles un sens parfaitement clair; quelle est la signification logique de ses postulats? M. Young définit alors le monde bien connu de Poincaré, en donne les principales propriétés, détermine en particulier l'angle de parallélisme. Il en déduit bien aisément que notre intuition spatiale est insuffisante à préciser la signification et les propriétés des concepts fondamentaux de la Géométrie.

L'histoire du postulat des parallèles fournit une illustration détaillée. M. Young démêle chez Euclide lui-même la volonté d'en éviter l'usage autant que possible (p. 26-27). Plus tard, Wallis, Saccheri, Legendre tentent de le démontrer ou de le remplacer par une autre. Saccheri commence même à construire un corps non euclidien de propositions, mais s'arrête, croyant à quelque contradiction. C'est dans cette voie que Gauss, Lobatchewsky et Bolyai

devaient trouver plus tard un succès complet. L'impossibilité d'une contradiction résultera, par exemple, du fait qu'on peut établir une correspondance parfaite entre la géométrie non euclidienne et une certaine géométrie euclidienne.

L'auteur est alors en mesure de rejeter les définitions proposées par Kant et Stuart Mill.

Les axiomes et postulats ne sont, ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des faits expérimentaux. Ce sont de simples hypothèses sur les propriétés de l'espace.

Comment, dès lors, construire ce corps d'hypothèses dont il nous faudra tout déduire sans appel ultérieur à l'intuition?

Sur un exemple emprunté à la géométrie euclidienne plane, sont introduites les notions d'ensemble, sous-ensemble, élément appartenant à un ensemble : de la non-contradiction ou consistance des axiomes (qui résulte de l'existence possible d'une représentation concrète), de l'indépendance des axiomes (qui pourra résulter, pour un axiome donné, de l'existence possible d'une représentation concrète où cet axiome soit faux, les autres demeurant exacts). Enfin un groupe d'axiomes pourra être dit *catégorique* (categorical) si deux représentations concrètes possibles sont isomorphes, c'est-à-dire sont susceptibles d'être mises en correspondance univoque et réciproque. Il peut y avoir avantage à opérer logiquement sur un groupe d'axiomes non catégorique, car on bâtit à la fois plusieurs sciences distinctes.

Ayant ainsi fait sentir les avantages (précision et unité) d'un traitement abstrait, l'auteur approfondit les notions introduites. Il définit la puissance d'un ensemble, puis la relation d'ordre, à l'aide des hypothèses fondamentales sur la relation $<$. Les notions d'ensembles ordonnés, d'ensembles semblables, de types d'ordre sont étudiées sur des exemples. La notion du continu linéaire est caractérisée par un groupe d'axiomes.

L'idée d'opération appliquée aux éléments d'un ensemble conduit à la définition de la propriété nouvelle, former un groupe par rapport à une opération déterminée. L'importante notion de groupe, éclairée par un exemple géométrique, sert alors à construire le système des nombres réels ordinaires, caractérisé de nouveau par certains axiomes. Des extensions successives de la notion de nombre amènent aux quaternions, aux nombres à n unités

complexes, puis au concept général abstrait de systèmes de nombres, résumé comme il suit :

C'est un ensemble d'éléments (nombres) dans lequel sont définies deux opérations, l'addition et la multiplication. Cet ensemble forme un groupe par rapport à ces deux opérations, sauf que o n'a pas d'inverse. L'addition et la multiplication sont liées par la loi distributive.

L'exposition des postulats de la Géométrie est faite d'après les deux principaux points de vue possibles. La première partie suit sensiblement le Mémoire de M. Hilbert (par exemple, *Annales scientifiques de l'École Normale*, 1900). Signalons seulement un exemple élémentaire de géométrie non archimédienne, et cette remarque que le nombre des termes indéfinis et le nombre des axiomes de M. Hilbert peuvent être réduits, en entraînant toutefois dans la déduction des théorèmes une plus grande complication.

Le deuxième point de vue est représenté par le corps d'axiomes proposé par Mario Pieri, où les notions de point et de déplacement sont fondamentales.

Le théorème de Cantor sur la puissance du continu à plusieurs dimensions est démontré dans le cas du plan par la méthode connue de M. Hilbert. Le nombre de dimensions d'un ensemble apparaît alors comme une propriété d'ordre. Les espaces à n dimensions sont introduits, une étude particulière rapide étant consacrée au cas de quatre dimensions. L'équivalence au point de vue abstrait de l'Algèbre et de la Géométrie fournit l'occasion de démontrer que la construction de l'heptagone régulier et la trisection de l'angle sont impossibles avec la règle et le compas.

Une étude des concepts de variable, de fonction, de limite, précède les conclusions générales de l'Ouvrage et le résumé des résultats acquis. Que sont les mathématiques? se demande l'auteur. On ne doute guère, après une lecture de l'Ouvrage, qu'il le sache très suffisamment. Pourtant il feint d'être embarrassé et nous donne le plaisir d'une intéressante discussion, il nous donne même une définition :

« Les mathématiques sont constituées par l'ensemble de tous les corps de propositions susceptibles d'une formulation abstraite

et d'un arrangement tel que chaque proposition soit une conséquence logique de celles qui la précèdent. »

Cette définition n'est point d'une longueur excessive, et c'est un avantage, mais il ne faudrait pas s'en exagérer la vertu, ni s'en dissimuler les défauts. Elle masque en particulier ce fait important, qu'il faut quand même se soucier des réalités. En tout cas, elle fait bien ressortir la puissante unité communiquée aux mathématiques par le développement des méthodes abstraites.

Une Note sur le développement du symbolisme algébrique, due à M. U. G. Mitchell, couronne l'Ouvrage de la façon la plus naturelle.

Le but de cet exposé serait atteint si nous avions pu faire sentir la richesse et la diversité des matières traitées dans ces leçons, mais il faut louer à part cette limpidité précise du style qui n'est pas un vain ornement, surtout dans un Ouvrage étranger.

G. Darmois.

JANS (C. de). — Les multiplicatrices de Clairaut. *Contribution à la théorie d'une famille de courbes planes.* 1 vol. in-8°, VIII-136 pages. Gand, Ad. Hoste, 1912.

Ce Volume est consacré aux courbes dont l'équation en coordonnées polaires peut s'écrire

$$r = K \sin^m \theta.$$

Ces courbes ont été étudiées par Clairaut en 1726 dans un Mémoire qui fut inséré en 1734 dans le Tome IV des *Miscellanea Berolinensia*. Certaines d'entre elles ont été rencontrées depuis par Boscowich (1743) et par Playfair (1807) dans des recherches sur les solides homogènes d'attraction maxima ou minima, pour une loi d'attraction proportionnelle à une puissance de la distance; l'une d'elles a été retrouvée par Ed. Roche dans sa théorie des atmosphères des planètes. M. de Jans signale un assez grand nombre d'auteurs, mathématiciens ou physiciens, qui ont eu à s'occuper de ces courbes; lui-même montre comment celles-ci se rencontrent dans l'étude de divers champs de forces électriques ou

magnétiques. Lorsque les lignes de niveau sont des courbes de Clairaut, les lignes de force en sont aussi, les deux systèmes de lignes se déduisent l'un de l'autre en remplaçant l'exposant m par son inverse et en faisant une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour du pôle. M. C. de Jans classe les courbes de Clairaut d'après la nature parabolique ou hyperbolique des branches infinies qu'elles présentent si m est négatif, ou d'après la nature des branches infinies de leurs inverses si m est positif; il indique des constructions de la tangente, de la normale, du centre de courbure; il étudie les singularités; il fait des quadratures ou des rectifications.

Il montre aussi comment les courbes de Clairaut se rattachent aux courbes d'équation

$$r = a \sin m\theta$$

ou

$$r \sin m\theta = a$$

ou encore aux courbes de Ribaucour, c'est-à-dire aux méridiennes des surfaces de révolution dont les rayons de courbure ont un rapport constant.

Il termine enfin par l'étude spéciale des courbes

$$r = K \sin^2\theta, \qquad r^2 = K^2 \sin\theta, \qquad r = K \sin^3\theta.$$

L'Ouvrage de M. C. de Jans pourrait être utilisé pour fournir des exercices aux élèves de Mathématiques spéciales de nos lycées ou aux candidats au certificat de Mathématiques générales.

Ch. Bioche.

BERWALD (L.). — Krümmungseigenschaften der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems und der in ihm enthaltenen Regelflächen. *Inaugural-Dissertation einer hohen philosophischen Fakultät* (2e *Sektion*) *der kgl. Bayer. Ludwig-Maximilian-Universität zu München am* 3. *Dezember* 1908, *zur Erlangung der Doktorwürde.* Un fascicule in-8°, 68 pages. München, C. Wolf und Sohn, 1909.

Première Partie. — Une surface courbe (S) étant rapportée à des coordonnées curvilignes (u, v), les tangentes aux lignes paramétriques $u =$ const. forment une congruence de droites pour laquelle la surface initiale (S) est l'une des nappes de la

surface focale ; en outre, dans la plupart des cas, les lignes paramétriques sont supposées former un système conjugué sur (S).

Cette définition d'une congruence simplifie beaucoup les formules générales. Parmi les applications qui en sont faites, il convient de signaler un théorème démontré par l'auteur, et qui n'avait pas encore été signalé sous cette forme générale :

« Pour toute surface non développable d'une congruence de droites, le produit des valeurs de la courbure totale aux deux foyers situés sur une génératrice est égal à l'inverse de la quatrième puissance de la distance des deux points limites sur cette génératrice. »

Dans le cas particulier où les droites sont les normales à une surface de Weingarten (les deux rayons de courbure principaux étant fonctions l'un de l'autre), on retrouve un remarquable théorème d'Halphen ([1]).

A signaler aussi une étude particulière des congruences telles que les deux foyers se confondent sur chaque droite, ou telles que l'un des foyers est toujours rejeté à l'infini.

Deuxième Partie. — Elles est consacrée aux propriétés générales des congruences qui contiennent une infinité de cylindres, comme les tangentes horizontales à une surface moulure définie à l'aide d'un cylindre verlical.

Troisième Partie. — Elle comprend la démonstration d'un théorème très connu de Sturm sur l'Optique géométrique, mais démontré ici, d'après Weingarten, avec toute la généralité qu'il comporte.

Ce théorème était souvent énoncé ainsi :

Toutes les normales à une surface dans le voisinage d'un point O peuvent être considérées comme rencontrant deux droites fixes perpendiculaires l'une à l'autre et menées par les centres de courbure des deux sections principales, dans les plans de ces sections principales, perpendiculairement à la normale au point O. »

Le théorème ainsi énoncé est exact, mais trop particulier; il faut considérer, au lieu d'une droite passant par chaque centre de

---

([1]) Voir Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. III, p. 358, 360, 370.

courbure, tout un faisceau de droites, et ne pas se limiter aux congruences de normales à une surface.

Un historique complet du théorème de Sturm termine l'Ouvrage, avec des renvois aux Mémoires originaux et aux travaux d'Optique correspondants.

Toute cette *Inaugural-Dissertation* est très clairement exposée et contient des résultats intéressants que je n'ai pas pu tous citer.

E. Lacour.

JONAS (Hans Justus). — Ueber W-Strahlensysteme, Flächendeformation und äudidistante Kurvenscharen. *Inaugural Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosophischen Fakultät der vereinigten Friedrichs-Universität, Halle-Wittenberg*. Une brochure in-8, VII-75 pages. Halle a. S., C. A. Kaemmerer und C°, 1908.

On connaît les beaux travaux de Weingarten sur la déformation des surfaces de révolution et sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation. M. Darboux a donné à ces surfaces le nom de *Surfaces* W. Elles possèdent la propriété caractéristique suivante : *Sur les deux nappes de la surface des centres de courbure, les lignes asymptotiques se correspondent.* Depuis, M. Bianchi a donné le nom de congruences W aux congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales. Les normales à une surface W possèdent cette propriété et réciproquement toute congruence de normales qui est W est formée par les normales à des surfaces W. L'auteur du Mémoire dont j'ai à rendre compte réserve le nom de congruence W à une classe particulière de ces congruences; ce sont celles qui possèdent cette propriété : *Il existe une relation entre la courbure totale des deux surfaces focales aux points correspondants de ces surfaces.*

Quand on veut étudier les congruences W (sens de M. Bianchi) on peut employer deux méthodes : 1° on part des formules de M. Lelieuvre pour les surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et ensuite des formules que j'ai établies pour la détermination des congruences W; 2° on prend comme point de départ le

théorème suivant dû à M. Darboux : *Les six coordonnées d'une congruence* W *sont solutions d'une même équation aux dérivées partielles de la forme*

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+2B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+2D\frac{\partial\theta}{\partial u}+2E\frac{\partial\theta}{\partial v}+F\theta=0,$$

A, B, C, D, E, F étant des fonctions de u et v. Si l'on ramène cette équation à la forme normale de Laplace et si l'on effectue sur les coordonnées plückériennes de la droite une substitution linéaire de telle sorte que la somme des carrés des six nouvelles coordonnées soit nulle, on est ramené à la recherche des congruences I dans l'espace à six dimensions. C'est à ce second point de vue que se sont placés MM. Demoulin et Tzitzéica. Au contraire, M. Jonas part de la première méthode, qui est plus pratique, quand on veut obtenir des propriétés métriques.

Si ξ, η, ζ sont trois solutions de l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\mu\theta$$

et si l'on fait

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}=-\left(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right),\qquad \frac{\partial x}{\partial\beta}=\eta\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial\beta},$$

avec les formules analogues pour y et z, on a (formules de Lelieuvre) une surface rapportée à ses asymptotiques. Si l'on pose

$$\rho=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

la courbure totale de la surface est $-\frac{1}{\rho^2}$. Soit R une solution de l'équation de Moutard, on pose

$$\frac{\partial(R\theta_1)}{\partial\alpha}=-R^2\frac{\partial\left(\frac{\theta}{R}\right)}{\partial\alpha},\qquad \frac{\partial(R\theta_1)}{\partial\beta}=R^2\frac{\partial\left(\frac{\theta}{R}\right)}{\partial\beta};$$

θ_1 est la transformée de θ par la méthode de M. Moutard. Aux trois solutions ξ, η, ζ correspondent trois solutions ξ_1, η_1, ζ_1. Les coordonnées du second foyer de la congruence W sont, d'après les formules que j'ai établies,

$$x_1=x-\eta_1\zeta+\zeta_1\eta$$

et les formules analogues pour y_1 et z_1. La courbure de la seconde surface focale est $-\frac{1}{\rho_1^2}$, où

$$\rho_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2.$$

Cela posé, les congruences W étudiées par M. Jonas satisfont à la condition

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = a,$$

a étant une constante; si $a = 0$ la congruence est formée par les normales à une surface W.

Les congruences de M. Jonas possèdent les propriétés suivantes :

Le carré de la distance des points limites est égal au carré de la distance des points focaux augmenté de a^2;

Il y a une relation entre les nombres ρ et ρ_1 qui servent à mesurer la courbure totale des surfaces focales.

Partant de cette propriété, l'auteur introduit la fonction ψ,

$$\psi = \int \frac{d\sqrt{\rho\rho_1 - a^2}}{\rho - \rho_1},$$

et il suppose ρ et ρ_1 exprimés en fonction de ψ. Il ramène alors la recherche de ces congruences à la résolution d'un système simultané de trois équations aux dérivées partielles.

L'auteur applique ensuite les résultats aux congruences normales W. Il étudie, en particulier, le cas où il existe une relation linéaire entre ρ et ρ_1; les trois équations aux dérivées partielles se ramènent à une seule. Ce cas comprend des problèmes bien connus : déformation de la sphère, du paraboloïde de révolution.

Dans le Chapitre suivant, l'auteur étudie les congruences W (sens restreint) qui ne sont pas des congruences de normales. Il étend à ces congruences plus générales certaines propriétés des congruences de normales; il examine aussi le cas où il y a une relation bilinéaire entre ρ et ρ_1.

L'auteur termine cet intéressant travail par une étude sur la détermination des courbes équidistantes sur les surfaces de révo-

lution. Cela revient au problème de Tchebytscheff qui consiste à mettre le ds^2 de la surface sous la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos 2\varphi \, d\alpha \, d\beta.$$

C. Guichard.

FALCKENBERG (Hans). — Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. *Inaugural Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen.* Une brochure in-8°, 34 p., Leipzig, B. G. Teubner, 1912.

Soit à déterminer une solution de l'équation

$$\Delta u + \operatorname{sh} u = 0 \tag{1}$$

prenant des valeurs données sur un contour fermé : le problème se ramène à l'étude d'une équation fonctionnelle dont le noyau $G(\xi, \eta; x, y)$ est une fonction de Green. Si l'équation

$$u(x, y) = \int\int_S G(\xi, \eta; x, y)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{2}$$

n'a pas de solution, le problème proposé a une solution unique. Sinon, l'on obtient plusieurs branches de solutions, dont une seule est réelle, si, la donnée sur le contour étant $h(\sigma) = \mu h_1(\sigma)$, μ reste suffisamment petit, h_1 étant fixé d'avance.

Si l'équation (2) admet une seule solution ψ, en posant

$$\lambda = \int\int_S u(\xi, \eta)\, \psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

on obtient une *équation de ramification*

$$K_{01}\mu + K_{30}\lambda^3 + K_{21}\lambda^2\mu + \ldots = 0,$$

qui donne pour λ trois développements suivant les puissances de $\mu^{\frac{1}{2}}$. Si l'on veut avoir des séries entières en μ, il faut et il suffit que $K_{01} = 0$. Dans ce cas seulement, la solution u sera elle-même une série entière en μ, et il n'y aura qu'une solution réelle. Si l'équation (2) admet n solutions, on aura de même 3^n solutions de (1),

dont une seule réelle. La condition $K_{01} = 0$ prend une forme simple dans le cas où le contour est un cercle.

La méthode s'étend à l'équation $\Delta u + \varphi(u) = 0$ si φ et φ'' sont nuls pour $u = 0$ (φ' et φ''' étant $\neq 0$). M. Gevrey.

COHN (Émile). — Physikalisches über Raum und Zeit. Nach einem un naturwissenschaftlich-medizinischen Verein zu Strassburg am 2 Februar 1910 gehaltenen Vortrag. Un fascicule in-8 jésus, 24 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

Cette Plaquette dont le titre est *Considérations physiques sur l'espace et le temps*, et qui est extraite de *Himmel und Erde*, est un bon exposé, rapide, des modifications que les observations électro-optiques à la surface de la terre ont conduit à apporter aux notions de temps et de longueur, d'après le principe de relativité et les travaux de Lorentz et d'Einstein.

Ces notions sont ingénieusement matérialisées dans un appareil très simple destiné à illustrer les explications et à en fixer la signification par les yeux (p. 11 à 15).

M. Brillouin.

MÉLANGES.

SUR UNE CONSTRUCTION DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE;

Par M. Henri VERGNE.

Lorsqu'un trièdre mobile est animé d'un mouvement *à deux paramètres*, tout point invariablement lié à ce trièdre est assujetti à décrire une surface. Considérons une position particulière du système mobile : parmi tous les mouvements possibles à

partir de cette position, on sait qu'il y en a deux qui se réduisent à de simples rotations : soient Δ_1 et Δ_2 les axes de ces deux rotations. *La normale* D *à la surface trajectoire d'un point* M *quelconque du système mobile doit rencontrer ces deux axes* : car cette normale, étant perpendiculaire à tous les déplacements du point M, l'est, en particulier, à ceux que prend ce point dans les rotations, et, par conséquent, elle rencontre nécessairement les axes de ces rotations.

Ce théorème, donné indépendamment par Schönemann et A. Mannheim [1], peut être regardé comme généralisant une importante propriété du centre instantané de rotation dans le cas des mouvements plans.

Si l'on connaît quatre normales D_1, D_2, D_3, D_4, aux surfaces trajectoires de quatre points particuliers M_1, M_2, M_3, M_4, du système mobile considéré dans sa position actuelle, on pourra construire les deux droites Δ_1, Δ_2, qui s'appuient sur ces quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 : ce seront les axes des deux rotations. Ensuite la normale D à la surface trajectoire d'un point quelconque M s'obtiendra immédiatement au moyen de la règle seule, puisqu'il suffira, du point M, de mener la droite qui rencontre Δ_1 et Δ_2.

On peut, avec M. Darboux, faire à cette élégante construction les deux critiques suivantes :

1° Les deux droites Δ_1, Δ_2 peuvent être imaginaires;

2° Pour obtenir ces deux droites lorsque les quatre normales D_1, D_2, D_3, D_4 sont données, il faut se servir du compas, puisque le problème revient à chercher les deux points d'intersection de la droite D_1, par exemple, avec l'hyperboloïde (D_2, D_3, D_4) admettant pour génératrices rectilignes les droites D_2, D_3, D_4, ce qui est un problème du second degré.

Or, il est clair que la normale D en un point quelconque M est unique et qu'on doit pouvoir la tracer au moyen de la règle seule : c'est, en effet, ce que nous allons voir.

Tout d'abord, si le point M se trouvait situé sur l'hyperboloïde (D_2, D_3, D_4), on aurait immédiatement la normale D à sa surface

---

[1] *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 68.

trajectoire, puisque (sans connaître Δ_1 et Δ_2) il suffirait de tracer, du point M, la droite s'appuyant sur deux génératrices quelconques (de même système que Δ_1 et Δ_2) de cet hyperboloïde. Il en serait de même si le point M était sur l'un des six hyperboloïdes (D_i, D_k, D_l) $(i, k, l = 1, 2, 3, 4)$.

Soit maintenant M un point quelconque du système mobile. Traçons la droite δ qui, issue de M, s'appuie sur D_3 et D_4, et appelons M′ le point d'intersection de δ et D_3. Cette droite δ coupe l'hyperboloïde (D_1, D_2, D_3) d'abord au point M′, puis en un second point M″ facile à déterminer, puisqu'il se trouve sur la droite $\mu_1\mu_2$ qui joint les points d'intersection μ_1 et μ_2 de D_1 et D_2 avec le plan (D_3, δ).

Le point M″ se trouve sur l'hyperboloïde (D_1, D_2, D_3); on sait donc mener la normale D″ à la surface trajectoire de ce point. Le point M se trouve maintenant sur l'hyperboloïde (D'', D_3, D_4); par suite, on sait mener la normale D à sa surface trajectoire.

On a ainsi réussi à tracer la droite D qui, issue du point M, s'appuie sur les deux droites Δ_1, Δ_2 coupant D_1, D_2, D_3, D_4. Les constructions n'utilisent que la règle seule, et, comme on ne trace pas les droites Δ_1, Δ_2 elles-mêmes, elles réussissent même si ces deux droites sont imaginaires.

MATHEMATISCHE JUBILÄEN DES JAHRES 913:

PAR M. FELIX MÜLLER [1].

1013.		Hermanus CONTRACTUS.
1313.		Alexander VON SPINA †.
1463.		Johannes ANGELUS.
1513.	8. Febr.	Daniello BARBARO.
		PEUERBACH. *Institutiones in arithmeticom.*
		Jod. CLICHTOVEUS. *De mystica numerorum significatione.*

[1] M. Félix Müller vient de nous envoyer ce travail historique qui, nous l'espérons, est de nature à intéresser nos lecteurs.

1513.		Gir. Savonarola, *Contra astrologiam divinatricem.*
		Petrus Ciruelus, *Arithmetica practica.*
		Joh. Stöffler, *Elucidatio astrolabii.*
		Alb. Magnus, *Summa philosophiæ naturalis.*
1563.		Joh. Hartmann Beyer.
		Leonhard Zubler.
		Henricus Glareanus (Loritus) †.
		Reiner Gemma-Frisius, *Arithmetica practica.*
		Barthol. Mercatör, *Isagoge in cosmographiam.*
1613.	2. März.	Rudolf Snellius †.
	16. Juni.	Jacob Christmann †.
	2. Juli.	Bartolomæus Pitiscus †.
	12. Sept.	Burckhardt Leemann †.
		Jean-François Niceron.
		Simon Jacob, *Rechnung auf der Linie.*
		Georg. Joach. Rheticus, *Thesaurus mathematicus.*
		Joh. Faulhaber, *Kunstrechnung.*
		Franc. Aquilonii *Opticorum*, libri VI.
1663.	2. Jan.	Christoph Heinrich.
	13. April.	Pierre Crousaz.
	26. Juli.	Louis Carré.
	31. Aug.	Guillaume Amontons.
	28. Dez.	Francesco Maria Grimaldi †.
		Gasp. Schott, *Arithmetica practica.*
		Euclid, XV Bœcken, door Fr. van Schoten.
		F. Niceron, *la Perspective curieuse.*
1713.	5. Jan.	Don Juan Jorge y Santacilia.
	4. März.	Jean-Mathurin Mazeas.
	13. Mai.	Alexis-Claude Clairaut.
	15. »	Nicolas-Louis de Lacaille.
	22. Juli.	Flor Dalham (a St.) Theresia.
	14. Sept.	Johann Kies.
	5. Okt.	Denis Diderot.
	14. Dez.	Martin Knutzen.
		Georg Kraz.
		Chr. von Wolff, *Elementa matheseos unwersæ.*
		Jacob Bernoulli, *Ars conjectandi.*
		M. Christian Pescheck, *Vorhoff der Rechenkunst.*
		Is. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica.*
1763.	8. Jan.	Gerh. Ulr. Anton Vieth.
	27. Febr.	Joh. Wihl. von Camerer.
	25. März.	Chrstn. Friedr. Goldbach.
	28. April.	Georg Andreas Fischer.
	2. Mai.	Joh. Sigism. Gottfr. Huth.
	16. »	Moritz Eilmann.

1763.	20. Mai.	Maurice HENRY.
	19. Juni.	Robert SYMMER.
	17. Sept.	Joh. Gottl. Friedr. SCHRADER.
	23. Sept.	Jos. Balth. BERARD.
	30. »	Joseph VON BAADER.
	7. Okt.	Erh. Adolph MATTHIESSEN.
	15. »	Joh. Georg TRALLES.
	16. »	Jean-André DELUC †.
		Thomas BAYES †.
		John BRINKLEY.
		Hans Christian LINDERUN.
		John. Bernh. BASEDOW, *Methode der angewandten Mathematik.*
		I. MAUDUIT, *Sur la cubature des corps gauches.*
		G. FONTANA, *Analyseos sublimioris Opuscula.*
1813.	11. Jan.	Jos. Ant. ZALLINGER ZUM THURN †.
	15. »	Ant.-Jos.-Franç.-Yvon VILLARCEAU.
	19. »	Friedr. Joh. Ernst. SCHULZ †,
	2. Febr.	James DANA.
	25. »	Friedrich SCHÖDLER.
	10. April.	Jos.-Louis LAGRANGE †.
	16. »	Giul. Gius. MOZZI DEL GARBO †
	29. »	Felici CHIO.
	21. Mai.	Jeremias WÖLDEKE †.
	1. Juni.	Girolamo SALADINI †.
	28. »	Friedr. Ludwig STEGMANN.
	22. Juli.	George SHAW †.
	23. »	Gregoria ARACRI †.
	29. »	Friedrich VALENTINER †.
	30. »	Domenico TURAZZA.
	16. Sept.	William WALTON.
	19. »	Chrstn. Heinr. Friedr. PETERS.
	25, »	Emil. STÖHRER sen.
	3. Okt.	Joseph GARNIER.
	3. Nov.	Michele ARALDI †.
	22. »	Joh. Karl. Phil. GRIMM †.
	11. Dez.	(a. St.) Simon GURIEFF †.
		Ch. DUPIN, *Développements de Géométrie.*
		RUFFINI, *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali.*
		J.-B. BIOT, *Essai de Géométrie analytique.*
		HACHETTE, *Traité des surfaces du second degré.*
		J.-L. LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, 2e éd.
1833.	12. Jan.	Eugen DÜHRING.
	28. Juli.	Julien HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1833.	5.	Aug.	Emil. Gruhl.
1843.	11.	Jan.	Charles Green Rockwood.
	25.	»	Hermann Amandus Schwarz.
	26.	Febr.	Friedrich Geiser.
	27.	April.	Felix Müller.
	28.	Juli.	Georg. Kewitsch.
	31.	»	Robert Helmert.
	5.	Aug.	John Trowbridge.
	11.	»	Enrico d'Ovidio.
	30.	»	Theodor Albrecht.
	8.	Nov.	Moritz Pasch.
	12.	»	Nicola Salvatore-Dino.
1853.	12.	Jan.	Gregorio Ricci Curgastro.
	18.	»	Fabian Franklin.
	19.	»	Karl Waitz.
	20.	»	W. L. Nekrassow.
	8.	Febr.	Alexander Ziwet.
	12.	»	J. Dolbnia.
	15.	»	Wilhelm Mayer.
	11.	März.	Salvatore Pincherle.
	6.	April.	Max Koppe.
	17.	»	Arthur Schönflies.
	2.	Mai.	Arthur Baker.
	12.	Juli.	Rosario Alagna.
	18.	»	Hendrik Anton Lorentz.
	5.	Aug.	Alexander Wassiljew.
	21.	»	(a. St.) Wilhelm Ostwald.
	30.	»	Louis Sauvage.
	7.	Okt.	Lucien Lévy.
	10.	»	Franz Hocevar.
	26.	»	Maximilian Haberland.
	19.	Nov.	Charles Riquier.
	24.	»	Virgino Retali.
	25.	»	Georg Bruce Halsted.
	6.	Dez.	Aurelio Lugli.
	11.	»	Bruno Peter.
	22.	»	Paul Richter.
1863.	4.	Jan.	Ernesto Breglia.
	2.	Febr.	Christian Carl Böhle.
	6.	»	Robert Haussner.
	17.	März.	Mellen Haskell.
	17.	»	Friedrich Diestell.
	6.	April.	Franz London.
	9.	»	Emil Walsch.
	16.	»	Harry Walther Tyler.
	17.	»	Augustus Edward Hough Love.

1863.	20. April.	George Egbert Fisher.
	23. »	Giovanni Vailati.
	1. Mai.	Luigi Berzolari.
	7. Juni.	Eduard van Vleck.
	21. »	Max Wolf.
	17. Juli.	Herbert William Richmond.
	31. »	George Abram Miller.
	3. Aug.	Elia Ovazza.
	15. »	Alexis Kriloff.
	20. »	Corrado Segre.
	20. »	Ruz M. Walker
	7. Sept.	James Harris Scarborough.
	16. »	Josef Adamczik.
	18. »	William Metzler.
	28. »	Giovanni Battista Zecca.
	2. Okt.	Edward Phragmen.
	4. »	Dana Barflett.
	13. »	Stanislass Zaremba.
	20. »	William Young.
	28. »	Ernst Weinhold.
	2. Nov	Ernst Kullrich.
	28. »	Arthur Gordon Webster,
	30. »	Eugen Jahnke.
	5, Dez.	Paul Painlevé.
	22. »	Domenico Montesano.
	28. »	Wladimir Stekloff.

M. Cantor, *Math. Beiträge zum Kulturleben der Wölker.*

F. Brioschi, *La teorica dei covarianti e delle invarianti.*

Ch. Hermite. *Théorie des fonctions elliptiques.*

F. E. Prym, *Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen.*

Dirichlet (le Jeune), *Vorlesungen über Zahlen theorie.*

H. von Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen.*

C. F. Gauss, *Werke,* I, Göttingen.

J. C. Poggendorff, *Handwörterbuch der exakten Wissenschaften.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Boltzmann (Ludw.). — *Vorlesungen über Gastheorie.* 2 Tl. : Theorie van der Waals'; Gase m. zusammengesetzten Molekülen; Gasdissociation; Schlussbemerkungen. 2e tirage. Gr. in-8, x-265 p. Leipzig, J. A. Barth. 7 m.; relié, 8 m.

Antoine. — *Barème pour l'établissement des comptes courants de banque et les calculs d'escompte en général.* 4e édition soigneusement revue et corrigée. 40cm-27cm, 206 p. Bruxelles, Vroment et Cie. 25 fr.

Crefcœur (Alb.-J.-M.). — *Cours d'Analyse infinitésimale*, 1re Partie : *Calcul différentiel et Calcul intégral.* 2e édit. rev. et augm. In-8, avec fig. Paris, Ch. Béranger. 8 fr.

Martus (H. C. E.). — *Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik.* Grosse Ausg. 4. Aufl. m. vielen Zusätzen, bearb. nach dem Stande der Wissenschaft im J. 1911. In-8, xx-501 p. avec 100 fig. et 2 planches. Dresden, C. A. Koch. 12 m. 50.

Müller (Emil). — *Lehrbuch der darstellenden Geometrie f. technische Hochschulen.* II. Bd. 1. Heft. Gr. in-8, vii-129 p. avec 140 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 4 m. 40.

Weber (Heinr.). — *Lehrbuch der Algebra.* I. Bd. 2. Aufl. Neuer Abdr. Gr. in-8, xv-703 p. Braunschweig, F. Vieweg u. Sohn. 10 m.; relié, 11 m. 60.

Wendling (Eug.). — *Der Fundamentalsatz der Axonometrie.* Gr. in-8, 96 p. avec 36 fig. Zürich, F. Speidel. 1 m. 60.

Bouasse (H.). — *Cours de Mécanique physique*, 2e édit. rev. T. I : *Cours de Physique.* In-8, 684 p., 307 fig. Paris, Ch. Delagrave. 20 fr.

Bouasse (H.) et Turrière (E.). — *Exercices et Compléments de mathématiques générales.* In-8, 520 p. Paris, Ch. Delagrave. 18 fr.

Grassmann (Herm.). — *Projektive Geometrie der Ebene, unter Benützung der Punktrechnung dargestellt.* II. Bd. : Ternäres. In-8, xii-410 p. avec 167 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 18 m.; relié, 19 m.

Hädicke (Gust.). — *Einführung in die neuere Geometrie. Ein Vorschlag zur Reform des elementar-geometr. Unterrichts.* 1. Tl.; Symmetrie u. Kongruenz. Gr. in-8, xxvi-241 p. Berlin, L. Oehmigke. 3 m.; relié, 3 m. 60.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VOLTERRA (Vito). — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, professées en 1906 à Stockholm sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède. 1 vol. in-4°, nouveau tirage, 3 + IV + 83 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1912.

Les recherches que M. Volterra poursuit depuis plus de vingt ans sur des questions se rattachant à la théorie des équations aux dérivées partielles ont introduit dans la Science un grand nombre de notions nouvelles, et créé ainsi entièrement de nouveaux chapitres d'Analyse dans lesquels les résultats obtenus forment déjà un ensemble considérable. Dans une série de *Leçons*, professées à Stockholm en 1906, le savant professeur a exposé quelques-unes de ces recherches. Il a dû, pour le faire en onze leçons, se limiter, pour certaines questions qui l'auraient conduit à de trop longs développements, à l'exposition des idées fondamentales et des résultats. Aussi ne peut-on lire ces *Leçons* sans avoir le désir de se reporter aux Mémoires plus développés dans lesquels l'Auteur a traité ces questions. Cette lecture suffit toutefois pour donner une idée de l'importance des travaux de M. Volterra et une connaissance précise de quelques-uns d'entre eux.

La première question traitée est relative aux équations de l'élasticité. C'est à propos de ces équations que la notion de polydromie des solutions, qui joue un rôle important dans la suite, intervient pour la première fois. Cette notion est présentée d'abord d'une manière très nette sur un exemple. D'un anneau retranchons une tranche très mince limitée par deux plans méridiens ; soudons entre eux les deux bords de la coupure après les avoir amenés au contact. Toute trace de la coupure disparaît, c'est-à-dire que la déformation du corps ne présente à l'emplacement de la coupure aucune discontinuité, et le corps obtenu, bien qu'il ne soit soumis à aucune force extérieure, n'est pas à l'état naturel, c'est-à-dire

qu'il existe des tensions intérieures. Si l'on considère une partie de ce corps remplissant un volume à connexion simple, il existe des déplacements permettant de l'amener à un état naturel où il n'y ait pas de tensions, ce qui n'a pas lieu en général pour une partie finie, même très petite, d'un corps élastique. Si l'on considère l'anneau dans son ensemble, les composantes de ces déplacements sont des fonctions polydromes. Une pareille circonstance ne pourrait pas se présenter dans le cas d'un corps à connexion simple.

Un corps à connexion multiple peut être ramené par des coupures à avoir une connexion simple. Nous supposerons que les fonctions qui définissent la déformation du corps soient continues, de sorte qu'en particulier elles ne présentent aucune discontinuité quand on traverse la coupure. Si le corps ainsi rendu simplement connexe peut être amené à l'état naturel par une déformation convenable, les deux bords d'une même coupure ne coïncideront plus après la déformation, mais pourront être ramenés l'un sur l'autre par un déplacement sans déformation, et les six paramètres dont dépend ce déplacement peuvent être choisis d'une manière arbitraire. M. Volterra montre dans ses leçons que la déformation du corps est parfaitement déterminée si l'on connaît pour chaque coupure les valeurs de ces paramètres. Il étudie complètement cette déformation dans le cas de l'anneau à section rectangulaire, cas dans lequel il a pu vérifier expérimentalement les résultats obtenus. D'autre part, sans intégrer les équations dont dépend l'étude de la déformation, il établit des résultats d'un très grand intérêt sur l'énergie du corps déformé, qu'il calcule en fonction des paramètres définissant la déformation, et obtient une remarquable loi de réciprocité complétant le théorème de Betti dans le cas d'un corps à connexion multiple.

Il étudie ensuite, à un point de vue tout différent, l'équation de Laplace. On sait l'importance en Analyse de théories intimement liées à cette équation, dans le cas de deux variables, en particulier de la théorie des fonctions d'une variable complexe. L'extension de ces théories au cas d'un plus grand nombre de variables paraît d'abord impossible. M. Volterra a obtenu cette extension d'une manière remarquable grâce à l'introduction d'un concept nouveau, celui de fonction de lignes.

Ce concept s'introduit naturellement, comme le savant géomètre

le remarque dans ses *Leçons*, par l'étude de l'intégration. Considérons d'abord une intégrale prise le long d'une ligne. Si la ligne est fermée et si certaines conditions bien connues sont remplies, cette intégrale est nulle. Si, au contraire, la ligne est ouverte, et si les mêmes conditions sont remplies, l'intégrale est une fonction des extrémités de cette ligne. La fonction ainsi obtenue est toujours uniforme si elle est définie dans un domaine à connexion simple, et ne l'est généralement pas si elle est définie dans un domaine à connexion multiple.

Considérons maintenant une intégrale de surface. Sous certaines conditions bien connues, si la surface est fermée, cette intégrale est nulle. Si la surface est ouverte et si les mêmes conditions sont remplies, la valeur de l'intégrale considérée dépend de la ligne qui limite la surface, sans dépendre autrement de la forme de cette surface. Cette circonstance est bien mise en évidence par la formule de Stokes, qui exprime cette intégrale par une intégrale de ligne. Ainsi une opération d'intégration, identique à celle qui dans le cas d'une ligne conduisait à obtenir une fonction de points, conduit dans le cas d'une surface à obtenir une fonction de lignes. La fonction obtenue, pour certains domaines, dits à connexion superficielle simple, est nécessairement uniforme, tandis que pour les autres domaines elle peut ne pas l'être.

Ce qui précède suffit pour montrer comment certaines fonctions de lignes s'introduisent nécessairement, quand on veut étendre au cas de trois variables certaines théories relatives aux fonctions de points dans le cas de deux variables. On conçoit dès lors que l'extension de la théorie des fonctions harmoniques conjuguées et de la théorie des fonctions d'une variable complexe n'ait pas été possible quand on ne considérait que des fonctions de points, et que M. Volterra ait pu l'obtenir de la manière la plus élégante en introduisant des fonctions de lignes.

Par un exemple fort intéressant, il montre que cette extension est liée à des questions de Physique. Considérons un champ magnétique. Son potentiel par rapport à un pôle magnétique égal à l'unité est une fonction de points. Son potentiel par rapport à un circuit fermé parcouru par un courant électrique égal à l'unité est une fonction de lignes. Cette fonction de points et cette fonction de lignes sont conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe entre leurs dérivées

des relations analogues à celles qui existent entre les dérivées de deux fonctions harmoniques conjuguées.

La notion de fonction de lignes conduit, si l'on passe du point de vue géométrique au point de vue analytique, à celle de fonction dépendant d'une autre fonction. A cette notion se rattachent d'importants travaux de M. Volterra sur l'inversion des intégrales définies. Ces travaux, qu'il résume brièvement dans ses *Leçons* de Stockholm, ont été le point de départ d'une série de recherches ultérieures sur les équations intégro-différentielles, recherches qu'il a exposées dans une série de leçons faites à la Sorbonne en 1912, et qui doivent faire l'objet de deux autres volumes. Il n'est donc pas utile d'insister ici sur les quelques pages que M. Volterra, dans ses *Leçons* de 1906, consacre à ces questions.

Tout ce qui précède se rattache aux équations du type elliptique. Deux leçons sont ensuite consacrées à l'étude du type hyperbolique. Cette étude commence par un parallèle entre la formule de Green pour le cas elliptique et les formules analogues relatives au cas hyperbolique. Ce parallèle met bien en évidence les différences essentielles entre les deux cas, et l'on voit apparaître le rôle que jouent les cônes caractéristiques lorsqu'ils sont réels. L'importance de ce rôle est mieux mise en évidence encore dans la suite. M. Volterra montre que, pour déterminer une solution d'une équation hyperbolique dans un certain domaine, on peut se donner arbitrairement, sur une partie de la surface qui le limite, les valeurs de cette fonction et de sa dérivée normale, tandis que, sur le reste de cette surface, ces deux données ne sont pas indépendantes. Les deux parties de la surface qu'il faut considérer comprennent, l'une les points où l'intersection du plan tangent et du cône caractéristique est réelle, l'autre les points où cette intersection est imaginaire. Les résultats obtenus sont fondamentaux dans la théorie des équations hyperboliques, bien connue en France grâce à l'enseignement de M. Hadamard.

Lorsque les valeurs de la solution cherchée et de sa dérivée normale, sur une portion de la surface considérée, ne sont pas indépendantes, il faut éliminer une de ces deux données de la formule qui définit la fonction cherchée à l'intérieur de cette surface. M. Volterra étend au cas hyperbolique la méthode des images, découverte par Lord Kelvin pour l'intégration de l'équation de Laplace, et qui

donne l'intégrale sous forme de séries. Il montre que dans certains cas, bien que le nombre des images soit infini, il suffit d'en considérer un nombre fini, de sorte que la solution est donnée, non par une série infinie, mais par un nombre fini de termes.

Les dernières leçons sont consacrées aux équations du type parabolique, dont l'étude n'était pas aussi avancée en 1906 que celle des autres types. Il pouvait sembler que la méthode des caractéristiques, si féconde dans le cas hyperbolique, ne pouvait embrasser tous les résultats connus dans le cas parabolique. M. Volterra montre que la difficulté tient à la polydromie des solutions fondamentales, et qu'elle peut être résolue si l'on sort du domaine réel pour introduire des variables complexes. Il obtient ainsi une formule aussi générale que celle que l'on connaissait pour le cas hyperbolique. Les deux leçons qu'il a consacrées à ce sujet jettent un jour tout nouveau sur la théorie des équations du type parabolique. Elles ont été l'origine d'une série de recherches sur ces équations, et aux résultats fondamentaux exposés dans ces leçons sont venus depuis s'ajouter d'autres résultats d'un très grand intérêt.

On voit, par cette étude nécessairement très sommaire, l'importance des questions traitées par M. Volterra. Il a obtenu, sur les équations aux dérivées partielles, des résultats très généraux et mettant bien en évidence les propriétés profondes qui caractérisent les cas elliptique, parabolique et hyperbolique. Les notions qu'il a introduites ont ouvert à la Science un domaine nouveau, et encore vaste actuellement, malgré le nombre des résultats déjà obtenus. Elles semblent devoir nécessairement jouer un rôle fondamental dans toute recherche ultérieure relative à cette partie de l'Analyse. Quiconque sait l'intérêt que présente pour les physiciens l'étude des équations aux dérivées partielles peut dès lors apprécier l'importance des résultats exposés dans les *Leçons* de M. Volterra, non seulement pour la théorie pure, mais aussi pour les applications.

PAUL LÉVY.

BONOLA (Roberto). — Non-Euclidean Geometry. *A critical and historical Study of its Developments.* Authorised english Translation with additional Appendices by H. S. Carslaw, with an Introduction by Federigo Enriques. 1 vol. in-8°, xii-268 pages. Chicago, the open Court publishing Company, 1912.

LIEBMANN (Heinrich). — Nichteuklidische Geometrie. Zweite, neubarbeitete Auflage. (*Sammlung Schubert.* XLIX). 1 vol. in-8°, vi-222 pages, Berlin und Leipzig, G. J. Göschen, 1912.

VOGT (Wolfgang). — Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der Linearen Linienörter des elliptischen Raumes. Une brochure in-8°, viii-58 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.

FINZEL (Anton). — Die Lehre von Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. 1 vol. in-8°, iv-38 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912.

Il y a peu de temps encore, il existait un propos qui était assez répandu dans les classes de Spéciales, et dont la paternité était, à tort ou à raison, attribuée à un ancien professeur de l'École Polytechnique : « On a fait une étude approfondie de ces surfaces, après quoi on s'est aperçu qu'elles n'existaient pas. » On est presque tenté de résumer par une phrase analogue, d'allure, bien entendu, moins paradoxale, l'histoire du postulat d'Euclide et des géométries non euclidiennes.

On sait que la démonstration du cinquième postulat d'Euclide si la somme des angles (AB, Ax), (BA, By) est inférieure à deux droits et si les demi-droites Ax et By sont d'un même côté de AB, Ax et Ay se coupent] ou de son équivalent immédiat, l'existence d'une seule parallèle à une droite par un point extérieur, fut pendant longtemps l'objet de tentatives, aussi remarquables que dépourvues de succès réels (beaucoup d'auteurs ont cru, en effet, être arrivés au but). Mais ces tentatives n'étaient pas complètement vaines et chaque nouveau chercheur (j'entends chaque chercheur documenté) ajoutait quelques résultats au patrimoine du précédent. Ce furent d'abord des essais de démonstrations directes (mathématiciens grecs et arabes et quelques mathématiciens anglais et italiens de la Renaissance) qui conduisirent à un assez grand nombre de propositions équivalentes au cinquième postulat et à une précision du postulat d'Archimède. Quelques

mathématiciens du début du XVIIIe siècle, notamment Saccheri et Lambert, posèrent plus méthodiquement le problème (peut-être même pourrait-on retrouver à une date plus reculée des traces d'un tel mode de raisonnement) : « pour démontrer le cinquième postulat, supposons-le inexact et échafaudons les conséquences logiques de cette nouvelle hypothèse; tout revient à trouver une de ces conséquences qui soit absurde ». Saccheri, qui poussa très loin ce mode de raisonnement, crut même avoir trouvé une telle conséquence; il n'avait trouvé qu'un résultat en désaccord avec sa conception empirique de la ligne droite, non avec les définitions et axiomes fondamentaux de la Géométrie. Mais une voie féconde était ouverte : au début du XIXe siècle, Legendre, Wolgang Bolyai, Thibaut, Taurinus et beaucoup d'autres développèrent les conséquences de cette hypothèse, c'est-à-dire de l'existence d'une infinité de parallèles menées à une droite par un point et comprises dans un angle (angle de parallélisme). Gauss lui-même, ainsi que l'a prouvé depuis la publication de sa correspondance, s'était occupé à bâtir et à codifier cette nouvelle géométrie, *anti-euclidienne*, ou *astrale* ou *non euclidienne*, dont la Géométrie ordinaire n'est qu'un cas particulier, en supposant l'angle de parallèlisme nul. Il avait, semble-t-il, l'intention de publier ses résultats, mais il fut devancé par Johann Bolyai (le fils de Wolfgang) et Lobatchefsky qui, à peu près simultanément et indépendamment l'un de l'autre, publièrent un exposé de Géométrie non euclidienne. Dans les publications de ces deux mathématiciens, un pas de plus avait été fait; ils n'échafaudaient plus les conséquences dans l'espoir d'en trouver une absurde, mais uniquement parce que cet échafaudage présentait autant d'intérêt et d'esthétique que la vieille géométrie (« j'ai du néant tiré un nouvel univers », dit un peu prétentieusement Johann Bolyai). On peut même presque affirmer que les deux auteurs avaient la conviction qu'aussi loin que pourrait les conduire leur puissance de déduction, ils trouveraient des propriétés acceptables et non contradictoires ([1]). Il faut dire toutefois que Lobatchefsky n'arriva pas de suite à cette

([1]) C'était aussi presque une conviction de Gauss : « Je suis arrivé à bien des choses qui seraient, pour la plupart des hommes, regardées comme une démonstration valable, mais qui, à mes yeux, ne démontrent pour ainsi dire *rien* » (Lettre à Bolyai).

conviction; en 1826, il publiait une *Démonstration rigoureuse de l'axiome des parallèles* et 9 ans plus tard seulement une *Géométrie imaginaire*. De même, Johann Bolyai, après avoir exposé en 1832, dans un appendice à un Livre de son père (*Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheosos*) une science absolue de l'Espace, revint quelques années plus tard à des recherches sur la démonstration du postulat d'Euclide et crut même quelque temps l'avoir démontré par des considérations sur la détermination d'une sphère par quatre points.

Quoi qu'il en soit, la Géométrie non euclidienne était fondée; en réunissant les résultats obtenus par ses fondateurs et leurs prédécesseurs à des découvertes postérieures, on en eut bientôt une étude très approfondie. Quelques années après Lobatchefsky et Bolyai, Riemann complétait leurs théories en édifiant une nouvelle géométrie (déjà entrevue par Saccheri et Lambert), *géométrie sans parallèles*, où deux droites quelconques ont toujours un point commun et où la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux droits. Pour arriver à cela, il lui fallait abandonner, outre l'axiome d'Euclide, un des autres postulats de la Géométrie, soit supposer l'existence de couples de points exceptionnels par où passerait une infinité de droites, soit rejeter le partage du plan en deux régions par une droite indéfinie, soit encore, ainsi que l'a montré récemment M. Dehn, rejeter l'axiome d'Archimède. Mais ce postulat abandonné, la nouvelle géométrie se développait aussi harmonieusement que celle de Bolyai et Lobatchefsky et l'on n'y trouvait point de contradictions.

Cette absence de contradictions dans les résultats acquis ne pouvait être, au point de vue logique, une preuve absolue de l'existence des nouvelles géométries, car rien ne prouvait qu'avec suffisamment de patience, on ne finirait pas par aboutir à une conséquence absurde. Une première preuve, à peu près rigoureuse, de l'existence des géométries planes non euclidiennes fut fournie par leur identification avec la géométrie des *surfaces à courbure constante*. On en sait les inconvénients; cette preuve n'est plus valable pour l'espace et la géométrie de telles surfaces ne peut s'identifier avec la géométrie de *tout* le plan. Une autre preuve a pour base les considérations de MM. Lie et Poincaré sur le groupe des déplacements ou mouvements, mais elle a pour inconvénient

de supposer une représentation analytique de l'espace (elle s'applique en somme aux géométries des systèmes de trois nombres). Une dernière preuve tout à fait convaincante, au moins à mon avis, est fournie par l'identification des trois géométries avec des géométries imaginées d'une façon indépendante par Cayley. Ce sont, à proprement parler, des géométries analytiques de systèmes de quatre variables homogènes, mais où, dans la définition des angles et distances, on remplace la forme quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2$$

par une forme quadratique de quatre variables dont l'annulation représente une quadrique quelconque (appelée l'*absolue*) imaginaire ou réelle mais, dans ce dernier cas, non réglée. Cette identification a été établie par M. Klein et a fait l'objet de nombreux travaux et d'exposés lumineux de M. Poincaré (notamment dans une Note de la *Géométrie* de MM. Rouché et Comberousse et dans un Article de la *Revue générale des Sciences*). M. Poincaré a même indiqué une transformation de ces géométries où la notion d'angle euclidien est conservée, mais où les droites considérées comme lignes de plus court chemin sont remplacées par des circonférences orthogonales à une certaine sphère.

Cette preuve, comme d'ailleurs les précédentes, est à deux tranchants : elle montre, certes, la possibilité des géométries de Bolyai et Riemann (hyperbolique ou elliptique) mais elle montre en même temps que ces géométries n'ont pas, pour ainsi dire, d'existence propre, puisqu'elles sont identiques à des théories de la géométrie euclidienne des quadriques, énoncées dans un langage différent et approprié. On peut même aller plus loin : pour établir l'indépendance des axiomes fondamentaux, M. Hilbert et nombre de ses élèves ont imaginé de multiples géométries, non pascalienne, non desargienne, etc., obtenues en abandonnant, au lieu de l'axiome d'Euclide, d'autres propriétés plus ou moins variées. Or, pour démontrer l'existence de ces géométries, en omettant toutefois les géométries non archimédiennes, et encore à leur sujet pourrait-on faire certaines restrictions, on établit qu'elles sont interprétables en Géométrie euclidienne avec un langage convenable; pas plus que les géométries de Lobatchefsky et Riemann, elles n'ont d'existence propre.

Est-ce dire que ces géométries non euclidiennes n'ont plus d'intérêt? Elles ont au moins un intérêt égal aux théories euclidiennes qui en sont, ou dont elles sont l'interprétation, et comme preuve de l'intérêt de ces dernières, il suffit de rappeler les remarquables découvertes de Poincaré et de M. Picard sur les groupes fuchsiens, kleinéens, hyperfuchsiens, etc. Mais une idée, qui a pris ces derniers temps une importance considérable, semble renouveler, en quelque sorte, l'intérêt de la géométrie de Lobatchefsky, considérée en elle-même et indépendamment de ses interprétations, je veux parler du *principe de relativité*. Si l'on admet, ainsi qu'il paraît résulter d'expériences probantes, que la propagation de la lumière est un mouvement indépendant du mouvement des corps qui la reçoivent ou qui l'émettent, la Mécanique n'est plus, comme l'avaient cru ses fondateurs, la géométrie de deux espaces *indépendants*, l'un à trois dimensions (l'espace), l'autre à une dimension (le temps), mais bien la géométrie d'un espace à quatre dimensions x, y, z, t. Dans cet espace, l'équation des rayons lumineux doit être indépendante des repères, horloge et axes; c'est-à-dire que les formules de transformation doivent laisser invariante l'expression

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - c^2(t - t')^2.$$

Ces transformations ne sont donc que des déplacements dans une géométrie de Cayley à quatre variables homogènes et à absolu réel ou, si l'on préfère, dans un espace de Lobatchefsky.

L'Étude de Bonola est un historique élémentaire des géométries non euclidiennes. C'est, à part quelques additions, la reproduction d'un Article paru en 1900, à Bologne, dans un Livre publié sous la direction de Enriques : *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, et qui a fait, à ce titre, l'objet d'une courte analyse de M. Tannery dans ce *Bulletin*. Il fut publié ensuite séparément en italien, traduit en allemand par M. Liebmann dans la collection *Wissenschaft und Hypothese* de M. Teubner (Leipzig, 1908); c'est une traduction anglaise que nous donne aujourd'hui M. Carslaw; le décès de M. Bonola a valu à l'Ouvrage une introduction de M. Enriques, ami et collaborateur du défunt. En cinq Chapitres, l'auteur a exposé l'histoire du postulat d'Euclide : d'abord ce qu'on pourrait appeler la période d'essais (jusqu'au

XVIIe siècle), puis la position du problème : Saccheri, Lambert, etc. Les Chapitres 3 et 4 sont consacrés aux fondateurs de la géométrie non euclidienne et parmi eux, l'auteur place Gauss. Peut-être y a-t-il eu là une exagération de la vérité historique; certes, Gauss a vu, même avant Lobatchefsky et Bolyai, la possibilité de la *géométrie astrale;* mais il paraît qu'après les recherches de Lambert et de Legendre, la question était presque *mûre,* si l'on peut s'exprimer ainsi. Le génie de Gauss devait naturellement s'en apercevoir et il ne me semble pas que cela ajoute à sa gloire. Il me semble plus remarquable que deux chercheurs, d'apparence moins géniale, et que rien d'autre n'a signalé à l'attention des mathématiciens, aient eu simultanément la même idée que leur illustre contemporain; il y aurait peut-être là, matière à d'amples dissertations sur la genèse des découvertes scientifiques. Enfin, dans le cinquième Chapitre on trouve *les derniers développements de la géométrie non euclidienne*, l'œuvre de Riemann, et les diverses preuves et interprétations rappelées plus haut (*La géométrie des surfaces*, *les idées de Helmholtz et Lie*, *les géométries « perspectives » de Cayley*). Tout cet exposé historique est destiné aux jeunes étudiants, ce qu'on ne conçoit guère en France, où l'étude de l'histoire des Sciences est généralement délaissée dans l'Enseignement. Ces préoccupations pédagogiques font que souvent l'auteur cherche plus à exposer qu'à critiquer; certains *raisonnements faux* sont indiqués avec toute la clarté désirable, mais peut-être les raisons de leur fausseté sont-elles moins bien indiquées ainsi que les enseignements qu'on pourrait en retirer. L'auteur a aussi une prédilection marquée et compréhensible, on pourrait presque dire justifiée, pour les géomètres italiens. Il me semble cependant que si la géométrie des surfaces amène fatalement le nom de Beltrami, elle amène non moins fatalement celui de M. Darboux.

A ces cinq Chapitres d'histoire sont adjoints cinq appendices importants (80 pages sur 260). Je reviendrai ci-dessous sur le le deuxième qui traite des parallèles de Clifford; le quatrième se rapporte à l'établissement de la Géométrie projective; c'est une question qui a fait l'objet d'études de Standt et de Klein, et M. Schur en a fait un exposé méthodique (*Grundlagen der Geometrie*) que j'ai eu le plaisir d'analyser dans le *Bulletin*, il y

quelques années. Dans le premier appendice, Bonola établit comment la composition des forces et la célèbre équation fonctionnelle de d'Alembert et Laplace

$$[\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(b - a) + \varphi(b + a)]$$

conduisent à la distinction des trois géométries; le troisième appendice est consacré à un certain nombre de constructions de géométrie non euclidienne, il a été augmenté notablement dans la traduction anglaise. Enfin, la cinquième Note est due au traducteur et est consacrée à une démonstration élémentaire de l'existence de la géométrie de Lobatchefsky par son identification avec la géométrie des cercles orthogonaux à une sphère réelle. Je n'ai pas compris pourquoi le traducteur n'étendait pas cette preuve à la géométrie de Riemann en considérant une sphère de rayon $R\sqrt{-1}$, ou encore, en remplaçant les cercles orthogonaux par des cercles coupant diamétralement une sphère de rayon R. Je n'ai pas compris non plus pourquoi il semblait attribuer la paternité de cette interprétation à M. Wellstein (1910), alors qu'elle a été exposée en 1900, à un point de vue tout à fait élémentaire, dans la Note de Poincaré que j'ai eu l'occasion de citer et que, si je ne m'abuse, elle est indiquée comme exercice dans le *Traité de Géométrie* de M. Hadamard.

Le Livre de M. Liebmann est la deuxième édition d'un Traité de géométrie non euclidienne, entendons par là de géométrie de Lobatchefsky ; il semble, en effet, que la géométrie de Riemann, à cause peut-être de l'axiome complémentaire qu'il faut supprimer, n'a pas tout à fait, dans l'esprit des géomètres, même droit de cité que son aînée. Après avoir rappelé brièvement les axiomes fondamentaux, M. Liebmann définit les parallèles hyperboliques, droites extrêmes de l'angle de parallélisme, et donne quelques conséquences de ces définitions : droites concourantes dans un triangle, aire du triangle, triangle asymptotique, etc. Les Chapitres III et IV sont consacrés à la trigonométrie, aux longueurs et aux aires. Dans le cinquième Chapitre, après avoir défini, d'après Weierstrass, des coordonnées dans un plan lobatchefskien, l'auteur montre l'identité de cette géométrie avec la géométrie de Cayley pour un absolu réel. Les points idéaux, intersection de deux droites d'un plan, non parallèles et ne se coupant pas, points

qui se trouvent pour ainsi dire au delà de l'infini, trouvent ainsi une interprétation toute naturelle; ce sont les points en dehors de la conique absolue. Dans tout cet exposé, il semble qu'il y ait un parti pris de M. Liebmann de s'occuper d'abord du plan, et ensuite *d'étendre* à l'espace; c'est encore l'ordre de beaucoup de Traités élémentaires de Géométrie; mais, dans un Ouvrage destiné à des lecteurs déjà familiarisés avec la Géométrie, y a-t-il gain en simplicité? Les deux derniers Chapitres sont assez différents et pourraient être considérés comme des compléments. le sixième est consacré à la géométrie sphérique ou de Riemann; le septième à la mécanique : après quelques pages sur la statique qui rappellent le premier appendice du Livre de Bonola, on trouve des éléments de dynamique non euclidienne et quelques rapports du principe de relativité avec la géométrie hyperbolique; cette question, que j'ai signalée plus haut, est encore toute récente et M. Liebmann cite seulement à ce sujet quelques articles de MM. Klein, Varicak et Sommerfeld [1].

Quelques pages du Livre de Liebmann et un appendice de celui de Bonola sont consacrés aux parallèles et à la surface de Clifford; dans sa Brochure, le Dr Vogt en expose une théorie *synthétique*. Indiquons d'abord rapidement la signification de ces parallèles; il s'agit d'un espace de Riemann, nous raisonnerons dans une géométrie de Cayley correspondante, en prenant pour absolu une sphère Σ de rayon imaginaire. La *fausse distance* de deux points A, B est le logarithme du rapport anharmonique de A, B et des intersections α, β de AB avec Σ; on conçoit sans peine une définition analogue pour les *faux angles*. Tous les plans *faussement perpendiculaires* à une droite D passent par une droite D′ réelle, conjuguée de D par rapport à Σ (droites *polaires absolues*, d'après M. Vogt); la fausse distance d'un point quelconque de D à un point quelconque de D′ est constante et égale à $\frac{\pi}{2}$ (moitié de la fausse longueur totale d'une droite); toute droite s'appuyant sur D et D′ (droite d'une congruence) leur est faussement perpendiculaire et réciproquement. Ceci

[1] Dans une Note récente aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 20 janvier), M. Borel a indiqué un point de vue nouveau et très intéressant de cette question.

acquis, si l'on considère deux droites D et D_1, leurs fausses perpendiculaires communes sont les droites communes aux congruences définies par D, D' — D_1, D'_1, il y en a en général deux et l'on vérifie sans peine qu'elles sont réelles. Il y en aura une infinité, si les deux congruences ont en commun les génératrices d'un hyperboloïde. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que, si D, D_1 rencontrent Σ en α, β — α_1, β_1 ; $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ soient des génératrices d'un même système de Σ. Dans ce cas, D et D_1 ont une infinité de fausses perpendiculaires communes, et les fausses longueurs de toutes ces perpendiculaires sont égales ; D, D_1 qui ne sont pas dans un même plan sont donc *faussement équidistantes ;* c'est pour cette raison que Clifford leur a donné le nom de parallèles. Il y a deux systèmes de telles parallèles (*rechte* ou *linke*) suivant que $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ sont des génératrices de Σ, du premier ou du deuxième système. Une gerbe de parallèles de même espèce est une congruence ayant pour bases deux génératrices de Σ ; enfin les fausses perpendiculaires à deux parallèles engendrent un hyperboloïde (surface de Clifford dont l'un des intérêts, dans le langage adopté, est d'avoir deux faux axes de révolution).

C'est là un résumé de l'exposition de Bonola et de M. Liebmann, ceux-ci raisonnant toutefois dans l'espace de Riemann, sans chercher d'interprétation. L'exposé de M. Vogt est également fait dans le langage de Riemann, mais avec une introduction plus systématique de l'absolu (on suppose pour cela établie la géométrie analytique de l'espace de Riemann, par exemple au moyen des coordonnées de Weierstrass ; l'expression algébrique des angles et distances introduit une forme quadratique définie, positive, qui est l'absolue). M. Vogt a qualifié sa théorie de *synthétique ;* c'est un adjectif qui, en Mathématiques, n'a plus guère de signification précise. Il m'a semblé qu'il fallait entendre par là qu'au lieu de définir les parallèles et de constater après coup qu'il y en avait de deux espèces, l'auteur avait établi *a priori* la comparaison du sens respectif de deux droites (Windung ou pas de vis), c'est-à-dire, en langage riemannien, le sens du mouvement hélicoïdal qui les amène l'une sur l'autre, en langage cayleyen, la comparaison respective des involutions de points et de plans déterminés, sur leurs perpendiculaires communes ; ces considérations préalables entraînent ensuite immédiatement l'existence de deux familles de

parallèles à une droite. Le mot synthèse s'appliquerait donc aux questions de sens? Un premier Chapitre, de même qu'une courte introduction, est consacré à ces questions de sens et à la définition des parallèles de Clifford.

Dans un deuxième Chapitre, l'auteur étudie les quadriques, réglées ou non, les congruences et les complexes de droites dans un espace de Riemann ou, si l'on préfère, ces mêmes éléments dans un espace ordinaire mais comparés à une quadrique imaginaire, de référence. On rencontre ainsi notamment les surfaces de Clifford qui sont leurs propres polaires réciproques par rapport à l'absolu, ou encore coupent l'absolu suivant un système de quatre génératrices, les gerbes de parallèles qui sont des congruences ayant pour droites de base deux génératrices de l'absolu, etc.; le dernier paragraphe établit que la géométrie d'une telle gerbe (espace à 2 dimensions) est identique à la géométrie de la sphère euclidienne.

La petite Brochure de M. Finzel est relative à des considérations d'un tout autre ordre. On sait combien, dans les Traités de Géométrie, la théorie de la mesure des aires planes est souvent restée expérimentale et intuitive. M. Hadamard y a consacré une Note importante de son Traité de Géométrie (Tome premier; une Note analogue du deuxième Tome est consacrée aux volumes); il appelle, *a priori*, aire d'un triangle, le demi-produit d'un côté par la hauteur correspondante, et aire d'un polygone, la somme des aires des triangles qui le composent (ces deux nombres sont indépendants, le premier du côté choisi, le deuxième de la décomposition adoptée). Cette méthode, parfaitement logique, a peut-être l'inconvénient de s'éloigner trop de la pratique et de trop particulariser une définition qui peut être choisie plus large (au moins pour le plan). M. Finzel appelle aire d'un polygone un nombre identique pour des polygones égaux et tel qu'il soit égal à la somme des aires partielles, lorsqu'on a décomposé le polygone en une réunion de polygones partiels. Cette définition conduit l'auteur à une expression de l'aire d'un polygone dans la géométrie euclidienne, mais aussi dans la géométrie générale de Lobatchefsky. Une difficulté se présentait en cours de route : pour arriver à l'aire d'un triangle, on le considère, en général, comme une *différence* de deux parallélogrammes; on s'sert ainsi de l'équiva-

lence (égalité des aires) par *soustraction*. M. Finzel montre qu'en admettant le postulat d'Archimède, on peut prouver que deux polygones équivalents par soustraction le sont aussi par addition. Une autre difficulté était l'extension à l'espace; on sait qu'alors deux tétraèdres équivalents ne sont pas nécessairement décomposables en un nombre *fini* de parallélépipèdes égaux. Le Dr Finzel ne s'est pas occupé de cette extension.

A. Châtelet.

SYLVESTER (James Joseph). — *The Collected Mathematical Papers*. Volume IV (1882-1897). 1 volume in-4°, xxvii-756 pages. Cambridge, University Press, 1912.

Le présent Volume, toujours dû aux soins éclairés de M. H. F. Baker, clôt dignement la publication des Œuvres de Sylvester. Il contient tout ce que Sylvester a publié durant les 15 années qui se sont écoulées depuis la publication, faite en 1882, dans l'*American Journal of Mathematics*, du Mémoire si original qui porte le titre : *A constructive theory of partitions, arranged in three Acts, an Interact and an Exodion*, jusqu'au Mémoire publié, en 1898, dans le *Messenger of Mathematics*, intitulé : *On the number of proper vulgar fractions in their lowest terms that can be formed with integers not greater than a given number*. Le plus grand nombre des Mémoires parus dans cette période ne seront pas des inconnus pour les lecteurs français; car ils ont paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. On y admirera de nouveau l'activité prodigieuse de ce grand géomètre qui a répandu dans ses écrits tant de vues originales et suggestives. Une très intéressante biographie de Sylvester, dans laquelle M. Baker a fait usage de celles qui avaient été déjà publiées par le major P. A. Mac Mahon et le professeur E. B. Elliot, ouvre dignement ce Volume, qui est orné d'un beau portrait de Sylvester et d'une copie de la médaille qui a été frappée en son honneur.

G. D.

NICOLAU (C.). — Sur la variation dans le mouvement de la Lune. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques, soutenue le 24 juin 1912.* 1 vol. in-4, IV-71 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

L'inégalité du mouvement de la Lune connue sous le nom de *variation* est déterminée par des équations de forme très simple, qui admettent une solution périodique. M. G. W. Hill, le premier, a mis cette solution périodique sous forme de séries trigonométriques et formé les relations de récurrence qui lient les coefficients de ces séries. De ces relations on peut déduire les coefficients par des méthodes d'approximations successives très rapides.

Pour la Lune, ces méthodes ne laissent rien à désirer, mais, pour des satellites de période plus longue, leur convergence pourrait devenir beaucoup moindre. Aussi, sur les conseils de H. Poincaré, M. Nicolau a-t-il entrepris une étude analytique plus complète des solutions périodiques envisagées par M. Hill.

Il simplifie d'abord les relations de récurrence générales de la façon suivante : si les inconnues à déterminer sont désignées par a_j, la relation où a_j joue le rôle prépondérant, en raison du gros coefficient qui l'affecte, dépend aussi des autres inconnues a_i; M. Nicolau y supprime les inconnues a_i qui ne satisfont pas aux conditions

$$|i| \leqq |j|, \qquad |i-j| \leqq j.$$

On a ainsi une première approximation, plus approchée que la première approximation de M. Hill, et c'est sur cette approximation que l'auteur fait porter ses premières recherches.

Les deux relations où $j = \pm 1$ sont particulièrement simples, et si l'on y regarde les inconnues comme des coordonnées rectangulaires, elles représentent deux hyperboles ayant une direction asymptotique commune. Il est alors relativement aisé de discuter ces équations et de déterminer comme conséquence le rayon de convergence des séries procédant suivant les puissances du paramètre désigné par m dans la théorie de M. Hill. Il faut, pour cela, déterminer le point singulier le plus rapproché de l'origine : c'est ce que fait M. Nicolau ; mais il n'obtient qu'une limite infé-

rieure du rayon de convergence, car il ne s'assure pas que ce point singulier n'est pas simplement apparent ou, en d'autres termes, qu'il appartient bien à la branche considérée de la fonction.

L'auteur cherche ensuite des valeurs asymptotiques des coefficients a_j pour j très grand : ces coefficients étant remplacés par des inconnues équivalentes c_j, il envisage les deux séries de Taylor qui ont pour coefficients les c_j et c_{-j} $(j > 0)$, et forme les équations différentielles auxquelles satisfont ces séries; puis il applique aux intégrales de ces équations les méthodes de M. Darboux relatives aux fonctions de très grands nombres. Toutefois, avant de procéder ainsi, il simplifie les relations de récurrence qui définissent les inconnues, en les remplaçant par des équations majorantes; d'autres restrictions sont introduites encore, de sorte que le résultat ne présente pas toute l'utilité qu'on aurait pu souhaiter.

Ne supposant plus que j soit grand, mais négligeant comme il l'a déjà fait, sans inconvénient sérieux d'ailleurs, les puissances supérieures de m, M. Nicolau reprend la question : les équations différentielles vérifiées par les séries de Taylor indiquées ci-dessus forment un système du huitième ordre; en cherchant une équation majorante convenable, on arrive à avoir une limite supérieure des coefficients c_j, mais trop élevée pour être vraiment utile.

M. Nicolau achève son travail en étudiant les résultats fournis par diverses formes de majorantes soit pour les équations différentielles considérées plus haut, soit pour les relations de récurrence entre les inconnues.

Le sujet des recherches de M. Nicolau est incontestablement très difficile; pour avancer même légèrement dans de pareilles recherches, il faut beaucoup d'ingéniosité et de labeur, car les calculs deviennent vite prolixes : si M. Nicolau n'est pas arrivé à des résultats définitifs, il faut le féliciter d'avoir fait les premiers pas vers la solution, qu'il nous donnera peut-être bientôt plus complète.

H. Andoyer.

BRÜES (Max). — Zur theorie der desmischen Flächen vierter Ordnung. Promoviert am 23 november 1910. *Inaugural Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde genehmigt von der philosophischen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelmes-Universität.* Une brochure in-8°, VI-49 pages. Leipzig, B. G. Teubner, 1910.

On dit que trois tétraèdres forment un système desmique lorsque les trois surfaces du quatrième ordre formées respectivement par leurs faces appartiennent à un même faisceau ponctuel, c'est-à-dire ont 16 droites communes, et l'on appelle *surface desmique du quatrième ordre* toute surface de ce faisceau, c'est-à-dire toute surface du quatrième ordre passant par les 16 droites. Une pareille surface a 12 points doubles, situés 3 à 3 sur les 16 droites de base du faisceau.

M. Max Brües s'est proposé de reprendre l'exposition de la théorie donnée par M. G. Humbert dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (4e série, t. VII, 1891, p. 353 à 398), en utilisant un Ouvrage de M. E. Study (*Sphærische Trigonometrie, orthogonale substitutionen und elliptiche Funktionen*, Leipzig, 1893). Il me semble inutile de donner ici l'analyse des parties du Mémoire de M. Brües consacrées aux résultats déjà donnés par M. G. Humbert; je me bornerai donc à indiquer les compléments ajoutés par M. Brües, compléments qui se rapportent à certains systèmes de points remarquables d'une surface desmique du quatrième ordre.

M. Humbert a montré qu'il existe, sur une surface desmique, trois séries de biquadratiques; par chacune de ces courbes passe une quadratique inscrite à la surface le long de cette courbe; les génératrices d'une pareille quadratique sont bitangentes à la surface. M. Brües considère sur ces biquadratiques les systèmes de points qu'il appelle *quadruple de Chasles* et *triple de Chasles*, parce que ces systèmes de points ont été signalés par Chasles dans des Notes insérées aux *Comptes rendus* [1] (t. LIV et LV). Le *quadruple de Chasles* est formé par les quatre points où une biquadratique admet pour tangentes des génératrices

[1] Et non dans l'*Aperçu historique* que M. Brues mentionne à l'occasion de ces systèmes de points.

d'un même système d'une quadrique sur laquelle elle est située. Le *triple de Chasles* est formé par les points de contact de trois points osculateurs qui se coupent en un même point de la courbe, point satellite du triple (*Beigleter des Tripels*). Les bitangentes à la surface desmique passant par les quatre sommets d'un *quadruple de Chasles* ont pour seconds points de contact les sommets d'un autre *quadruple de Chasles* conjugué du précédent.

Cela posé, M. Brües donne quelques propositions dont voici celle qui semble la plus intéressante : *Les* 6 *arêtes du tétraèdre qui a pour sommets un quadruple de Chasles coupent la surface desmique en* 12 *autres points qui, avec les sommets du quadruple conjugué, forment une configuration de Kummer*, c'est-à-dire la configuration des 16 points formés par les points singuliers d'une surface de Kummer.

M. Brües étudie aussi une configuration de 96 points, qu'il appelle *configuration de Study*, et qui est constituée par un système de 6 configurations de Kummer.

Ch. Bioche.

BOEHM (F.). — Ueber die Transformation von homogenen bilinearen Differentialausdrücken. *Habilitationsschrift der Hohen philosophischen Fakultät* (II *Section*) *der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München, zur Erlangung der venia legendi für Mathematik*. Une brochure in-8°, 34 p. München, Dr. C. Wolf und Sohn, 1911.

Dans sa *Théorie des surfaces* (t. IV, Chap. III et IV), M. Darboux a introduit une transformation, qu'il appelle *inversion composée* et qui d'un couple de surfaces se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires, permet de déduire un autre couple jouissant de la même propriété. Ceci est un cas particulier du problème qui consiste à déterminer les substitutions

$$x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n), \qquad y_k = f_k(x'_1, \ldots, y'_n),$$

qui transforment l'une dans l'autre les deux formes

$$B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}\, dx_i\, dy_k, \qquad B' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \omega'_{ik}\, dx_i\, dy_k.$$

Dans le cas où les deux formes sont

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} dx_i\,dy_i, \qquad B'_1 = m(x'_1, \ldots, y'_n) \sum_{i=1}^{n} dx'_i\,dy'_i,$$

le problème peut être résolu complètement [1] : le système des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, qui traduit les conditions d'intégrabilité, et le système de Lamé, auxquelles satisfont les fonctions f_i, sont, en effet, complètement intégrables.

L'étude du premier système permet de déterminer la fonction m, qui a la forme

$$m = \left[\sum_{k=1}^{n} (c_k x'_k + c_{k+n} y'_k + C x'_k y'_k) \right]^{-2}.$$

On peut par une transformation convenable annuler les c_k, c_{k+n}; en utilisant alors cette fonction pour l'intégration du second système et en appliquant à la solution générale de celui-ci la transformation la plus générale à coefficients constants qui laisse la forme différentielle invariable, on met la substitution sous la forme

$$\frac{x_i}{x'_i} = \frac{y_i}{y'_i} = \frac{-1}{\sum_{k=1}^{n} x'_k y'_k} \qquad (i = 1, \ldots, n-2).$$

Ce sont les formules de l'*inversion composée*, établies par M. Darboux par une autre voie pour $n = 3$.

Dans le cas particulier où m se réduit à $(c_n x'_n)^{-2}$, on obtient la *transformation projective* qui, par la même voie que précédemment, s'exprime par les formules

$$\frac{x_i}{x'_i} = x_n = -\frac{1}{x'_n} = \frac{y_i}{y'_i} = \frac{-y_n}{\sum_{k=1}^{n} x'_k y'_k} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

données également par M. Darboux pour $n = 3$. Le cas de $n = 1$ conduit à la théorie de la représentation conforme.

---

[1] Pour $n = 3$, ce problème n'est autre que celui qui est énoncé au début.

Tous ces résultats sont exposés dans trois Chapitres concernant : le problème général relatif à B et B′, le problème spécial relatif à B_1 et B'_1, l'étude complète du cas où $n = 3$.

M. Gevrey.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. *Édition française*, rédigée et publiée d'après l'édition allemande, sous la direction de Jules MOLK, professeur à l'Université de Nancy. Tome I (deuxième Volume, Fascicule 4), Algèbre, rédigé dans l'édition allemande, sous la direction de F. Meyer; Tome I (quatrième Volume, Fascicule 4), Statistique, Assurances, Économie politique, rédigé dans l'édition allemande sous la direction de F. Meyer; Tome II (cinquième Volume, Fascicule 1), Développements en série, rédigé dans l'édition allemande sous la direction de H. Burkardt et W. Wirtinger; Tome IV (deuxième Volume, Fascicule 1), Mécanique générale, rédigé dans l'édition allemande sous la direction de F. Klein et C. H. Müller; Tome IV (cinquième Volume, Fascicule 1), Systèmes déformables, rédigé dans l'édition allemande sous la direction de F. Klein et C. H. Müller. — Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, B. G. Teubner; août 1911-juillet 1912.

Nous nous bornerons à signaler l'apparition de ces nouveaux fascicules de l'*Encyclopédie* (édition française) qui sont toujours rédigés avec le même soin par M. Molk et les collaborateurs qu'il a su se choisir. Le plan de l'édition allemande était largement conçu. L'œuvre entreprise exigeait des efforts considérables. Nous avons confiance que ces efforts ne seront pas perdus et que, une fois terminée, l'*Encyclopédie* sera de nature à rendre de grands services. En attendant, nous devons nous résigner à recevoir des fascicules qui se rapportent aux diverses parties de ce grand Ouvrage, sans se suivre toujours les uns les autres. Cela sans doute était inévitable. Et nous devons savoir gré aux auteurs, aux collaborateurs, aux éditeurs de la peine qu'ils prennent pour nous et du zèle qu'ils apportent dans leur travail.

J. G.

PIONCHON (J.). — Notice sur la Vie et les Travaux de Charles Méray. (Extraite de la *Revue bourguignonne de l'Université de Dijon* : 1912, t. XXII, n° 4). 1 vol. gr. in-8, avec portrait, IV-158 pages. Dijon, imprimerie L. Marchal, 1912.

M. J. Pionchon, qui a bien réussi à faire revivre Charles Méray comme savant, a surtout bien dessiné les traits les plus caractéristiques de l'homme. Il a le mérite d'avoir puisé à un bon nombre de sources de renseignements; il a reproduit avec tact des parties d'une *autobiographie* de Méray.

Dans les deux premiers Chapitres, il donne quelques détails piquants sur les études de l'enfant et de l'adolescent. Puis il a reproduit textuellement les *Notes* si élogieuses des professeurs et des administrateurs de l'École Normale supérieure sur « l'élève Méray ». Enfin, il donne d'intéressants détails sur la vie universitaire de Méray, qui fut professeur d'Analyse infinitésimale à la Faculté des Sciences de Dijon, de 1879 à 1905. Vers la fin de sa carrière, le 11 décembre 1899, Méray eut l'honneur d'être élu Correspondant de l'Académie des Sciences.

Le Chapitre III de cette belle *Notice*, où l'Auteur parle de Méray comme savant, fourmille, encore plus que les deux premiers, en citations qui montrent la *continuité* et l'*intensité* du labeur scientifique de Méray. M. Pionchon fait ressortir l'importance des principales publications de Méray en Analyse infinitésimale et montre combien ces publications étaient appréciées à l'Étranger. Il rapporte les propres paroles de Méray sur les vicissitudes de ses *Nouveaux éléments de Géométrie*, publiés dès 1874.

Dans le Chapitre IV, M. Pionchon, qui fut le confident de Méray pendant plusieurs années, s'est montré plus personnel que dans les trois précédents. Il a des termes pénétrants pour nous faire connaître les habitudes et les opinions de l'homme, l'ardeur avec laquelle Méray se fit l'apôtre et le défenseur de certaines idées. Il fait nettement ressortir le véritable culte que Méray avait voué à l'amitié. Ce n'est pas sans émotion qu'on lit les belles paroles que Méray a écrites sur Ziegel, avec qui il s'était, à l'École Normale, lié pour la vie.

Qu'il me soit permis d'ajouter ici un souvenir personnel. Ziegel ne tarissait pas quand il parlait des hautes qualités morales et

intellectuelles de Charles Méray. Au cours de nombreuses et longues conversations que j'eus pendant longtemps avec Ziegel, j'ai pu apprécier le caractère si loyal et si franc de Méray et je me suis formé la conviction que Méray est une des illustrations scientifiques de la France. D'ailleurs, cette conviction s'est, par la suite, plus fortement ancrée dans mon esprit, lorsque M. Gaston Darboux, en signalant à l'Académie des Sciences, en qualité de Secrétaire perpétuel, la dernière édition des *Nouveaux éléments de Géométrie* de Charles Méray, a parlé de l'influence exercée à l'Étranger et en France par les idées de l'auteur.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS DE CAUCHY EN SÉRIES D'EXPONENTIELLES ET SUR CERTAINES IDENTITÉS REMARQUABLES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Cauchy a donné, comme application du calcul des résidus, des développements remarquables de fonctions de variables réelles en séries d'exponentielles [1]. Rappelons d'abord le résultat essentiel qu'il a obtenu, en utilisant toutefois quelques notions plus récentes sur la théorie des fonctions des variables réelles.

Soient $\pi(z)$ et $\psi(z)$ deux fonctions entières (holomorphes dans tout le plan) de la variable complexe z, et posons

$$\chi(z) = \pi(z) - \psi(z);$$

soient aussi x_0 et x_1 deux constantes réelles données ($x_0 < x_1$). Supposons que l'on puisse trouver une suite de circonférences de

[1] Les Mémoires de Cauchy sur ce sujet se trouvent dans ses *Œuvres complètes*, 2e série, t. VII.

rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ grandissant indéfiniment avec n, telles que le point z étant dans la partie du plan situé à droite de l'axe des quantités complexes et se trouvant sur ces circonférences, on ait, pour n infini,

$$\lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0, \qquad \lim \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = 1$$
$$\lim \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1, \qquad \lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = 0 \qquad (x_0 < x < x_1),$$

sauf peut-être pour un nombre limité de directions (plus généralement de directions correspondant à des angles formant un ensemble de mesure nulle), pour lesquelles toutefois les expressions précédentes resteraient inférieures à un nombre fixe.

L'analyse de Cauchy permet, en introduisant certaines précisions [1], de démontrer le résultat suivant. Désignons par λ les diverses racines, supposées simples, de l'équation transcendante

$$\pi(z) = 0,$$

et représentons par $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, à variation bornée (au sens de M. Jordan). On a (x étant compris entre x_0 et x_1)

$$(1) \qquad \frac{1}{2}[f(x+0) - f(x-0)] = -\sum \frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} e^{\lambda x} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\mu\lambda} f(\mu)\, d\mu,$$

la sommation s'étendant aux racines λ de $\pi(z)$: c'est la série de Cauchy. Elle comprend, comme cas très particulier, les séries trigonométriques.

2. Dans deux Notes récentes (*Comptes rendus*, 27 novembre 1911 et 2 janvier 1912), M. André Léauté a fait sur ce sujet des remarques très intéressantes. Il introduit d'abord la notion d'*intervalle limite*, en supposant que, z étant toujours dans les mêmes conditions, on ait

$$\lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x_1-x_0)} = l, \qquad \lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(x_1-x_0)} = \mathrm{L},$$

---

[1] On peut consulter mon *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 179. J'y suppose toutefois que $f(x)$ satisfasse aux conditions classiques de Dirichlet dans la théorie des séries trigonométriques. On peut aisément remplacer ces conditions par la condition plus large de la variation bornée.

l et L étant deux constantes finies. Dans ces conditions, la série qui forme le second membre de (1) est égale à

$$\frac{f(x_1-0)-l\,f(x_0+0)}{2} \qquad (\text{pour } x=x_1),$$

et égale à

$$\frac{f(x_0-0)-\mathrm{L}\,f(x_1-0)}{2} \qquad (\text{pour } x=x_0).$$

M. André Léauté a ensuite donné une autre forme à la série de Cauchy, dans le cas où $f(x)$ a une dérivée $f'(x)$. Pour plus de simplicité, supposons que $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues de x_0 à x_1. Considérons l'intégrale

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\psi(z)}{z\,\pi(z)}\int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)}f'(\mu)\,d\mu\,.\,dz$$

prise le long de la circonférence de rayon r_n. En supposant d'abord $\pi(0)\neq 0$, elle est égale à

$$\frac{\psi(0)}{\pi(0)}[f(x_1)-f(x_0)]+\sum\frac{\psi(\lambda)}{\lambda\,\pi'(\lambda)}\int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)}f'(\mu)\,d\mu.$$

Il est facile de voir que n augmentant indéfiniment, l'intégrale H devient

$$-f(x)-f(x_1),$$

et l'on obtient ainsi la formule

$$(2)\quad f(x)=-\sum\frac{\psi(\lambda)}{\lambda\,\pi'(\lambda)}e^{\lambda x}\int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda\mu}f'(\mu)\,d\mu+f(x_1)\frac{\psi(0)}{\pi(0)}+f(x_0)\frac{\psi(0)}{\pi(0)},$$

la sommation étant toujours étendue aux racines λ de $\pi(z)$.

Dans le cas où $\lambda=0$ est une racine de $\pi(z)$, on a, par une analyse analogue, la formule

$$(3)\quad f(x)=f(x_1)-\mathrm{J}-x\frac{\psi(0)}{\pi(0)}[f(x_1)-f(x_0)]$$
$$-\sum\frac{\psi(\lambda)}{\lambda\,\pi'(\lambda)}e^{\lambda x}\int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda\mu}f'(\mu)\,d\mu,$$

la sommation étant étendue aux racines de $\pi(z)$ ($\lambda=0$ exclu), et J étant une constante égale à

$$\mathrm{J}=\frac{\psi(0)}{\pi(0)}\int_{x_0}^{x_1}\mu f'(\mu)\,d\mu.$$

où Λ est le résidu pour $z = 0$, de l'expression

$$\frac{\psi(z)}{z\pi(z)}[f(x_1) - f(x_0)].$$

Voici la circonstance intéressante que présentent les formules (2) et (3) :

Tandis que la formule (1) *de Cauchy n'était pas valable pour les extrémités x_0 et x_1, la formule* (2) *ou la formule* (3) *reste valable pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$.*

Ce résultat est donné par l'analyse même qui a conduit aux formules (2) ou (3).

Après avoir exposé l'année dernière (mars 1912) ces résultats dans mon cours [1], j'ai comparé directement les formules (2) ou (3) à la formule (1). On est ainsi conduit à des identités assez curieuses ne renfermant aucune fonction arbitraire; c'est ce que je vais indiquer rapidement.

3. Supposons d'abord que $\pi(z)$ ne s'annule pas pour $z = 0$. En intégrant par parties les intégrales figurant dans (2) et en se servant de (1), on a une équation où $f(x_1)$ et $f(x_0)$ entrent d'une manière linéaire et homogène. Comme ces valeurs sont arbitraires, on en déduit les deux identités

$$\sum \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)} e^{\lambda(x-x_1)} = \frac{\chi(0)}{\pi(0)},$$

$$\sum \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)} e^{\lambda(x-x_0)} = -\frac{\psi(0)}{\pi(0)},$$

formules qui sont valables pour x entre x_0 et x_1, *à l'exclusion des extrémités*. On en conclut par soustraction

$$(4) \qquad \sum \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)} e^{\lambda x}[\psi(0)e^{-\lambda x_1} + \chi(0)e^{-\lambda x_0}] = 0,$$

développement remarquable en série d'exponentielles, qui est valable pour toute valeur de x comprise entre x_0 et x_1, à l'exclusion des extrémités. Il est aisé de montrer, par la même analyse, que ce déve-

---

[1] *Voir* aussi ma Note sur le même sujet dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (17 juin 1912).

loppement est égal à $\frac{\chi(0) - L\psi(0)}{2}$ pour $x = x_0$ et à $\frac{l\chi(0) - \psi(0)}{2}$ pour $x = x_1$. *On a donc explicitement une série d'exponentielles, nulle pour toute valeur de x entre x_0 et x_1, et différente en général de zéro aux extrémités de cet intervalle.*

4. Passons au cas où *zéro* est racine simple de $\pi(z)$. On est conduit, par une analyse analogue, aux formules

$$(5)\quad \begin{cases} \sum \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)} e^{\lambda(x-x_1)} = 1 - A + x_1 \frac{\psi(0)}{\pi'(0)} - x\frac{\psi(0)}{\pi'(0)}, \\ \sum \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)} e^{\lambda(x-x_0)} = -A + x_0 \frac{\psi(0)}{\pi'(0)} - x\frac{\psi(0)}{\pi'(0)}, \end{cases}$$

la sommation étant étendue aux racines de $\pi(z)$ ($\lambda = 0$ exclu). Ces formules, valables entre x_0 et x_1, ne sont pas valables aux extrémités. On en conclut

$$(6)\quad (x_0 - x_1)\frac{\psi(0)}{\pi'(0)} + \sum \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)}(e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_0})e^{\lambda x} = 1 \qquad (x_0 < x < x_1),$$

Le premier membre de l'équation (6) *forme donc un développement en série d'exponentielles, qui est égal à un pour x compris entre x_0 et x_1; il est égal à $\frac{1-l}{2}$ pour $x = x_1$ et égal à $\frac{1-L}{2}$ pour $x = x_0$, comme le montre un calcul analogue.*

5. Indiquons deux exemples très simples. Tout d'abord la série de Fourier correspond à

$$\pi(z) = e^{az} - 1, \qquad \psi(z) = -1 \qquad (a > 0).$$

On peut prendre ici comme rayon r_n la valeur $\frac{(2n+1)\pi}{a}$. En prenant l'intervalle de *zéro* à a, on a

$$l = L = -1.$$

Il y a une racine nulle pour $\pi(z)$; les formules (5) se réduisent au développement trigonométrique de x, et les termes du premier membre de (6) sont tous nuls, sauf le premier terme qui est bien égal à *un*.

Prenons en second lieu

$$\begin{aligned} \pi(z) &= z(e^{az}+e^{-az})+h(e^{az}-e^{-az}) \\ \psi(z) &= e^{-az}(z-h) \end{aligned} \qquad (a>0,\ h>0).$$

On prendra $x_0=-a$, $x_1=+a$. On peut poser $r_n=\frac{n\pi}{a}$ et l'on a $l=L=1$. Les racines de $\pi(z)$ sont de la forme $z=\mu i$, les μ étant réels et racines de l'équation

$$\text{tang}\,\mu-\frac{\mu}{ah}=0. \tag{7}$$

C'est l'équation qui s'est présentée à Fourier dans le problème du refroidissement d'une sphère. L'équation (6) fait connaître une expression de la forme

$$\Sigma A_n \cos\mu_n x + B_n \sin\mu_n x, \tag{8}$$

les A et B étant des constantes faciles à calculer et la sommation étant étendue à toutes les racines positives μ_n de l'équation (7) (*zéro* compris). Cette expression est égale à *un* pour toutes les valeurs de x entre $-a$ et $+a$, et égale à *zéro* pour $x=\pm a$. On en déduit immédiatement une expression de même forme prenant la valeur *zéro* pour toutes les valeurs de x entre $-a$ et $+a$ et la valeur *un* pour $x=\pm a$.

Comme nous pouvons remplacer x par $x+C$, C étant une constante, nous pouvons encore dire que l'on peut trouver un développement de la forme (8), *qui est égale à zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et $2a$, et qui, pour $x=0$ et $x=2a$, est égal à un.*

6. Le problème du refroidissement du mur conduit, dans un cas particulier, à l'équation (7). On sait que ce problème est celui de l'intégration de l'équation

$$g\frac{\partial V}{\partial t}=C\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

avec les conditions $V=f(x)$, pour $t=0$, et

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x}-hV=0 \qquad (\text{pour } x=a, \text{ quel que soit } t), \\ &\frac{\partial V}{\partial x}+HV=0 \qquad (\text{pour } x=b, \text{ quel que soit } t). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

On a $a<b$; g, C, h et H sont des constantes positives.

Posons $\frac{g}{C} = \Lambda^2$. En cherchant une solution de la forme

$$V = y(x)\, e^{-\frac{k^2}{\Lambda^2} t},$$

on trouve ensuite

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0,$$

d'où

$$y = M \cos kx + N \sin kx.$$

En substituant dans les équations (9), on a deux équations en M et N. Par l'élimination de ces quantités, il vient

$$k[-k \sin kl - H \cos kl] + h[k \cos kl + H \sin kl] = 0,$$
$$(\text{on fait } a = 0,\ b = l).$$

Ainsi k satisfait à l'équation

$$\operatorname{tang}(kl)[Hh - k^2] + (H + h)k = 0$$

Sans étudier cette équation au point de vue spécial qui m'occupe ici, je me borne au cas de $h = \infty$.

7. Le cas particulier $h = \infty$ (c'est-à-dire $V = 0$ pour $x = a$) donne l'équation

$$\operatorname{tang}(kl) + \frac{k}{H} = 0 \tag{10}$$

qui, aux notations près, est l'équation (7). L'application de la méthode de Cauchy conduit à développer la fonction donnée $f(x)$ (que nous supposons continue) sous la forme

$$\Sigma N \sin kx,$$

les k étant les racines *positives* de l'équation (10). Nous groupons ainsi les termes deux à deux, et l'intervalle à envisager est ici $(-l, +l)$. La fonction $f(x)$ est définie seulement entre 0 et l. Nous développons alors la fonction $F(x)$ définie par

$$F(x) = f(x) \qquad (\text{de } 0 \text{ à } l),$$
$$F(x) = -f(-x) \qquad (\text{de } 0 \text{ à } -l).$$

Il y aura, en général, discontinuité pour $x = 0$ (à moins que

$f(0) = 0$). Nous en déduisons le développement

$$(11) \qquad f(x) = \Sigma N_n \sin(k_n x) \qquad (\text{entre } 0 \text{ et } l).$$

On vérifie facilement que ce développement est valable pour $x = l$ (en appliquant les formules du paragraphe 2 donnant les valeurs en x_0 et x_1), mais il n'est pas valable en général pour $x = 0$. Il serait facile d'obtenir pour $f(x)$ un développement de la forme (8)

$$f(x) = \Sigma A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)$$

valable entre 0 et l, les valeurs extrêmes comprises; il suffirait d'ajouter au second membre de (11) le développement, indiqué à la fin du paragraphe précédent, multiplié par $f(0)$.

TRISECTEUR DU Dr H. GRASSET;

PAR M. C. ROUBAUDI.

Cet instrument, imaginé et construit par le Dr Hector Grasset, de Rouen, réalise la division exacte d'un angle en trois parties égales, problème qu'il est impossible de résoudre avec la règle et le compas.

Il repose sur la propriété très élémentaire de la somme des angles d'un triangle.

L'appareil se compose d'une règle EH présentant un pivot en son centre O, lieu de fixation d'un losange articulé OABC dont un côté AB est astreint à se mouvoir dans la coulisse d'une règle EF, laquelle est reliée par un point fixe D au point O au moyen d'une réglette articulée en D et en O.

La règle EF peut glisser par son extrémité E dans une coulisse de la règle EH, au moyen d'un pivot E.

La partie de droite de la règle EH est supprimée dans sa moitié supérieure, de manière que la partie restante soit alignée sur l'axe EOX.

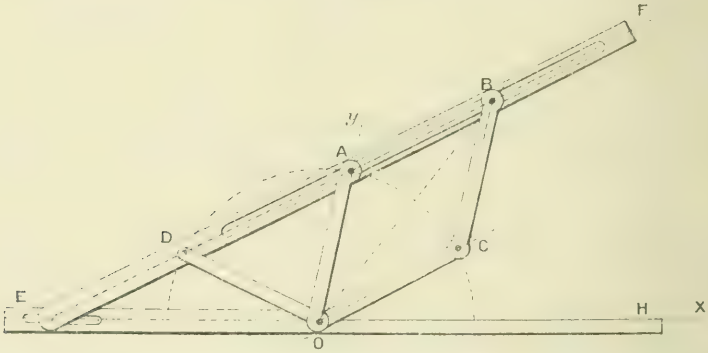
On a pris

$$OA = AB = BC = CO = OD = DE.$$

Dans ces conditions, il est facile de voir que, pour toute position de l'appareil, l'angle $\widehat{COH}$ ou a est le tiers de l'angle $\widehat{AOH}$. En effet, quand l'appareil se déforme, OC reste parallèle à AB et par suite à EF ; l'angle $\widehat{AEH}$ est donc égal à l'angle $\widehat{COH}$ ou a.

D'autre part, l'angle $\widehat{AOH}$ extérieur au triangle AOE vaut $\widehat{AEO} + \widehat{OAE}$; or $\widehat{OAE} = \widehat{ADO}$, et $\widehat{ADO} = 2.\widehat{DEO}$. Donc $\widehat{AOH} = 3\,a$.

Fig. 1.



Enfin, OB étant bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$, il s'ensuit que les droites OC et OB divisent l'angle $\widehat{AOX}$ en trois parties égales.

Cela posé, soit $\widehat{XOY}$ l'angle qu'il s'agit de partager en trois angles égaux. On placera OH sur le côté OX : en O est un pivot à ressort qui pousse une aiguille se pointant sur le sommet de l'angle. En B et C sont des pivots semblables à aiguilles; celui de B sert de bouton de manœuvre pour le glissement.

En agissant sur ce bouton, on amènera OA sur le second côté OY de l'angle, en maintenant OH fixe sur le premier côté. Il ne reste plus qu'à appuyer sur les pivots B et C dont les aiguilles marquent les points sur le papier, retirer l'appareil et joindre OC et OB.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MARCHIS (L.). — Cours d'Aéronautique professé a la Faculté des Sciences de Paris. — Première Partie : *Statistique et Dynamique des Ballons; Résistance de l'air.* — Deuxième Partie : **Aérostation** : Étoffes ; Soupapes ; *Filets des Ballons.* **Aviation** : *Lois expérimentales* (*Résistance de l'Air*) ; *Expériences récentes de MM.* G. Eiffel *et* Prandtl. — Troisième Partie : *La Dynamique expérimentale des Fluides* dans ses rapports avec l'Aéronautique et l'*Hydronautique ; Études expérimentales des hélices.* — 3 vol. in-4° lithographiés : 439 + 18 + 11 pages; 263 + 11 pages; 279 + 11 pages. Paris, H. Dunod et E. Pinat, 1910, 1911, 1912.

M. L. Marchis est l'auteur d'un Traité sur *La Production et l'Utilisation du Froid*, que nous considérons comme un chef-d'œuvre d'exposition. Toutes les publications de ce savant portent la même marque, aussi bien son remarquable travail sur les *Moteurs à essence pour automobiles* que ses *Principes de Thermodynamique* et que son *Navire aérien*, recueil de ses leçons d'Aéronautique à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Le *Cours d'Aéronautique*, qui a paru il y a quelque temps et qui renferme, autographiées, les leçons faites à la Faculté des Sciences de Paris, en 1910, 1911 et 1912, nous semble digne des œuvres précédentes.

Donner une idée des matières traitées dans les trois Parties de ce Cours, de l'esprit dans lequel ont été conçues les cinquante Leçons qu'elles contiennent, est une tâche agréable que nous allons nous efforcer de remplir.

I.

Et d'abord, il faut qu'il soit entendu que le savant professeur d'Aviation de la Sorbonne n'a nullement prétendu, en publiant ses Leçons, mettre au jour une œuvre purement personnelle. S'abstenir autant que possible de toute spéculation théorique, vu l'état actuel de la science dont il s'occupe, a constamment

été sa principale préoccupation et, peut-être, dans certains cas, à propos des hélices, notamment, a-t-il un peu exagéré. De parti pris, il n'a voulu qu'exposer aussi clairement que possible les résultats expérimentaux que l'on peut considérer, non pas comme définitifs, mais comme suffisamment acquis, programme modeste en apparence, et cependant d'une exécution délicate, si l'on songe à la multitude de faits, parfois inexplicables ou contradictoires, qui encombrent déjà les archives de l'Aéronautique. De plus, il lui faut éviter, très souvent, de prendre trop franchement parti, sa situation officielle lui imposant la plus grande prudence. Et cependant son travail serait vain, il le reconnaît lui-même, si, en fin de compte, il n'arrivait pas à épargner à l'ingénieur aéronautique des essais souvent minutieux, longs et coûteux.

Pour arriver à ce résultat, pour entreprendre, en se mettant en son lieu et place, les recherches capables de tenir l'ingénieur au courant des progrès scientifiques susceptibles de recevoir une application immédiate dans son industrie, et parfois, de la transformer, l'auteur du *Cours d'Aéronautique* a donc dû travailler de façon que son œuvre fût le fruit d'un constant échange d'idées entre le professeur d'Université et l'ingénieur, entre le laboratoire et le chef d'atelier.

Mais alors, il en résulte que les cinquante Leçons, dont l'ensemble remplit les trois Parties de ce Cours, sont loin de constituer un véritable Traité d'Aéronautique, comme le *Navire aérien*, où tout est parfaitement ordonné et bien à sa place. Elles se succèdent un peu à l'aventure : les sujets dont elles s'occupent portent souvent la marque des préoccupations du moment; le même sujet reparaît à chaque instant, tantôt dans une Partie, tantôt dans une autre. On voit qu'avant tout le maître a voulu tenir ses élèves au courant des derniers progrès, ou, plutôt, des derniers travaux accomplis.

Par exemple, le lecteur non averti qui, après avoir lu les trois Leçons (8e, 9e, 10e) consacrées, dans la première Partie (1910), à la Résistance de l'air, et s'en être pénétré, croirait posséder cette question, se tromperait. D'abord, pour une part, la matière de ces Leçons se trouve déjà dans le *Navire aérien*. Ensuite, il aura encore à lire les six Leçons (11e, 12e, 13e, 14e, 15e, 16e) ayant rapport au même sujet dans la deuxième Partie (1911) et, enfin, les

dix Leçons (de la 2e à la 12e) de la troisième Partie (1912). Ce n'est même qu'arrivé à la 7e Leçon de cette troisième Partie, Leçon où sont examinées les expériences de M. de Guiche, qu'il s'apercevra que tout ce qu'il a lu, absorbé ou digéré jusqu'alors n'a encore rien de définitif, les résultats de M. de Guiche sur un point important, l'existence d'un maximum de résistance de l'air au mouvement d'une plaque carrée, dans les environs de 40°, semblant infirmer aussi bien ceux de M. Eiffel que ceux de MM. Rateau, Riabouchinski, etc.

D'ailleurs, pour se faire une conviction sur la valeur des deux méthodes employées pour l'étude de la résistance de l'air, la méthode directe et la méthode indirecte, le lecteur doit attendre d'être parvenu à la 2e Leçon de la troisième Partie. C'est à ce moment seulement que M. Marchis croit devoir affirmer que le déplacement d'un corps dans l'air immobile (méthode directe), et l'insufflation de l'air sur ce corps (méthode indirecte), ne donnent pas *nécessairement* naissance à des phénomènes identiques. Admettre *a priori* que la méthode d'insufflation (méthode du tunnel) puisse remplacer les expériences de plein air, lui paraît résulter d'une application *superficielle* du principe de relativité (troisième Partie, p. 141). « Superficielle », c'est bientôt dit. Dusssions-nous encourir les foudres de M. Marchis, du commandant Raibaud et de feu Poncelet, nous sommes convaincus que pour admettre, comme M. Eiffel et beaucoup d'autres, l'identité forcée des phénomènes dans les deux cas, il faut, au contraire, avoir profondément médité, profondément réfléchi, et que, ne pas l'admettre, c'est, pour ainsi dire, nier le principe de relativité, alors que son application, en pareille matière, n'est qu'une application parfaitement raisonnée du « principe de la raison suffisante ». Seules, des expériences nombreuses, variées, pourraient, par des résultats extrêmement discordants, établis d'une façon rigoureuse, nous faire apercevoir (ce qui semble bien paradoxal, *a priori*) qu'il y a une raison suffisante pour que les choses se passent différemment à l'air libre et dans le tunnel. Mais où sont, pour l'instant, ces expériences nombreuses, variées, rigoureuses? Il est certain que M. de Guiche, à la suite d'expériences exécutées sur de grandes surfaces, non seulement est en désaccord, sur bien des points secondaires, avec M. Eiffel, mais ne retrouve même pas, aux environs de l'incidence

de 40°, le maximum dont nous avons parlé tout à l'heure. Par contre, les résultats de M. de Guiche sont, d'une façon générale, infirmés, ou presque, par les expériences faites tout récemment, en plein air aussi, et sur de grandes surfaces, à l'Institut aérotechnique de Saint-Cyr. Les comparaisons entre les résultats obtenus dans cet établissement et dans le laboratoire de M. Eiffel à Auteuil ont donné, en effet, un bon accord général dans l'allure des résultats : ainsi, la poussée trouvée à Saint-Cyr n'est qu'un peu plus grande que celle trouvée à Auteuil, et, quant aux pressions et dépressions sur les deux faces des surfaces, c'est tout au plus si les dépressions trouvées à Saint-Cyr sur la face supérieure dépassent légèrement celles trouvées au ventilateur.

Il est donc, en définitive, parfaitement permis désormais d'admettre, avec les plus grandes chances de ne pas commettre d'erreurs graves, que les deux méthodes, la directe (plein air), l'indirecte (méthode du tunnel ou du ventilateur), se valent à très peu près, comme, au surplus, l'indique la comparaison des résultats obtenus par le commandant Dorand sur un aéroplane en plein vol avec ceux qu'a donnés, à Auteuil, l'étude d'un petit modèle de cet aéroplane. Mais, tout de même, il faut, bien entendu, soigneusement se garder de croire que de la concordance des résultats obtenus à Saint-Cyr et à Auteuil découle fatalement cette conséquence que, dans tous les cas, la méthode des petits modèles, les seuls que l'on puisse étudier au tunnel, soit toujours susceptible de donner des résultats applicables aux corps en vraie grandeur : ce serait méconnaître complètement les effets dus au frottement. Comme le dit très bien M. Maurain, il y a là, sûrement, une question d'espèce, de forme, si l'on préfère.

Puisque nous venons de parler de la méthode des petits modèles, faisons encore remarquer, afin de montrer par un second exemple le désordre apparent qui règne dans le *Cours d'Aéronautique*, que le lecteur qui a en mains cet intéressant Ouvrage et désire être renseigné à peu près complètement sur ce si délicat et important problème : « Le passage des résultats que donnent les expériences faites sur de petits modèles aux appareils en vraie grandeur », se voit dans l'obligation impérieuse d'en consulter successivement les trois Parties. La question est, en effet, abordée une première fois dans la première Partie (16e, 17e et 18e Leçons),

à propos des travaux du colonel Ch. Renard et du capitaine Crocco, de la *Brigata specialisti* de Rome, sur la Dynamique des dirigeables. M. Marchis y revient et l'examine alors avec plus d'ampleur dans la deuxième Partie (15e et 16e Leçons) à propos des aéroplanes. Il insiste, cette fois, sur les effets du frottement qui, pour des surfaces semblables, sont loin d'être pratiquement soumis à la loi de proportionnalité, en même temps, d'ailleurs, qu'il signale l'*influence, trop longtemps négligée par les expérimentateurs, qu'exercent les unes sur les autres les diverses parties d'un appareil volant.* Puis, trouvant ce qu'il a dit encore insuffisant, l'auteur reprend ce sujet dans la troisième Partie (1re, 4e, 5e et 6e Leçons) et appelle l'attention sur les expériences du commandant Dorand, dont il vient d'être question à l'instant.

Enfin, comme, tout naturellement, l'étude de la détermination des coefficients d'homothétie, permettant de passer d'un petit modèle à un appareil de grandeur normale, devait entraîner le savant professeur à élargir sur ce point son programme, à joindre l'Hydronautique à l'Aéronautique, au moins en ce qui concerne la résistance des fluides liquides au mouvement d'un corps, et qu'il n'y a pas manqué, il arrive ceci : c'est que le lecteur qui avait passé peut-être légèrement sur les expériences du capitaine Crocco, faites avec des modèles réduits en bois, que l'on plonge dans l'eau d'un grand bassin (1re Partie, p. 392), dans le but de déterminer expérimentalement les trois éléments de la Dynamique du dirigeable, ne commence à soupçonner l'importance de ce mode de procéder, employé cependant il y a déjà longtemps par Ch. Renard et Krebs, que page 243 de la deuxième Partie. C'est alors seulement, en effet, qu'on lui parle pour la première fois des travaux de Froude. Encore lui faut-il arriver aux 12e et 13e Leçons de la troisième Partie, consacrées à la Résistance de l'eau, pour se rendre enfin compte de ce que vaut réellement la méthode du célèbre ingénieur anglais et des secours de tout premier ordre que l'Aéronautique peut et doit attendre désormais de l'Hydronautique.

N'insistons pas davantage sur ces défauts, d'ailleurs inévitables (nous en avons donné la raison), du *Cours d'Aéronautique* et efforçons-nous maintenant, à défaut de Table analytique, de donner une idée des richesses qu'il contient.

II.

Le nivellement barométrique est l'objet de la 2e Leçon (première Partie) du *Cours d'Aéronautique*, la première n'étant qu'une leçon d'Introduction où le professeur a tenu à exposer la façon (il en a été question plus haut) dont il conçoit l'enseignement de l'Aéronautique dans une Université. Le lecteur remarquera, dans cette seconde Leçon, un court exposé de la *méthode des tranches*, imaginée par Teisserenc de Bort et appliquée actuellement dans tous les observatoires météorologiques pour le calcul des hauteurs atteintes soit par les ballons-sondes, soit par les cerfs-volants. Regrettons que, pour rassurer certains esprits timorés, M. Marchis n'ait rien dit sur les erreurs, très légères d'ailleurs, que l'on peut commettre dans le calcul de la hauteur atteinte par un ballon-sonde ou un aéroplane animés d'un rapide mouvement de translation, lorsqu'on néglige le trouble du milieu dans lequel les baromètres sont plongés, milieu dont, malgré les précautions prises, ils subissent toujours l'influence.

Les cinq Leçons suivantes (3e, 4e, 5e, 6e, 7e) ont trait à la Statique du ballon libre. Notons, dans ces Leçons, l'étude consacrée aux deux procédés que l'on peut employer pour combattre l'instabilité naturelle suivant la verticale des appareils volants de ce genre : 1° l'emploi du ballonnet; 2° celui d'une manche d'appendice très courte, ce dernier proposé par le capitaine Do. Mentionnons, en passant, le théorème découvert par cet officier, théorème qu'il a baptisé du nom de *second paradoxe aérostatique*.

Les 8e, 9e et 10e Leçons sont consacrées à l'étude de la Résistance de l'air (il y a, dans la suite, douze Leçons réservées au même sujet). Elles relatent d'abord les premières expériences faites par M. Eiffel sur des corps en chute libre, expériences déjà décrites dans le *Navire aérien*, et rappellent ensuite au lecteur les expériences, déjà anciennes, de Cailletet et Colardeau, de l'abbé Le Dantec. M. Marchis n'oublie pas, en passant, les intéressants essais de M. Canovetti, sur lesquels il revient dans la deuxième Partie (p. 122), et arrive enfin aux importants travaux de MM. Rateau d'une part, Riabouchinsky, de l'autre, exécutés par la méthode du tunnel. C'est à ce moment qu'il parle, pour la

première fois (p. 211) du *tube de Pitot*, dont l'étude complète n'est abordée que dans la troisième Partie (2e et 3e Leçons). Alors, seulement, il s'étend sur les modifications successives dont cet appareil a été l'objet : d'abord, le tube de Darcy, ses différentes variantes, le procédé de tarage du capitaine Crocco, puis l'explorateur tournant du même officier, qui lui a servi à déterminer la vitesse du courant d'air en divers points de la région située derrière une hélice. C'est, du reste, dans ces deux leçons de la troisième Partie que l'on trouvera décrits l'anémomètre de l'infatigable officier italien, l'emploi qu'a fait le commandant Dorand du tube Venturi pour mesurer la vitesse relative de son aéroplane-laboratoire, etc.

Mais revenons à nos trois Leçons (8e, 9e, 10e).

Il est impossible que le lecteur n'y prenne intérêt à la description des appareils de M. Rateau et de M. Riabouchinsky (laboratoire de Koutchino), à l'étude consacrée aux premières expériences de M. Eiffel par la méthode du tunnel, expériences exécutées dans son ancien laboratoire du Champ-de-Mars, remplacé aujourd'hui par celui d'Auteuil. Après avoir pris note des résultats acquis, particulièrement par M. Eiffel, à propos des déplacements du centre de poussée, de la résistance des carènes, de la distribution des pressions, après avoir surtout étudié avec soin le paragraphe III, relatif aux surfaces courbes inclinées, il arrivera à la 11e Leçon.

Cette Leçon, qui a pour objet l'étude du mouvement de régime d'un aéroplane, ne présente rien de bien particulier. De même, les deux suivantes (12e et 13e), consacrées à la Dynamique du ballon libre. Notons, cependant, dans ces dernières, le passage consacré (p. 320) aux principales ascensions aéronautiques exécutées en pays de montagnes.

Les 14e et 15e Leçons, ayant trait à la Vitesse propre des machines volantes, sont d'une importance pratique et de tout premier ordre. Ce sujet, comme le Mouvement de régime d'un aéroplane, a déjà été étudié dans le *Navire aérien*, mais il méritait de l'être à nouveau : 1° parce que la vitesse propre d'un navire aérien est un problème constamment à l'ordre du jour depuis la multiplication des voyages en dirigeables et des vols en aéroplanes; 2° parce qu'il n'y a peut-être pas de question en

Aéronautique à propos de laquelle les personnes qui passent pour les plus instruites n'aient émis les plus grosses erreurs : le principe de relativité, en effet, y est en jeu et ce principe, d'un énoncé, à la vérité, si facilement compréhensible, est, très souvent, difficile à appliquer. Le lecteur attentif apprendra, en lisant ces pages, à faire la différence entre la *vitesse propre* suivant la trajectoire décrite et la *vitesse pratique*. Il comprendra alors les inconvénients que peuvent présenter les mesures directes au moyen d'anémomètres (indicateurs de vitesse) ou de ballons-loch, et leur préférera les méthodes indirectes : aller et retour dans le lit du vent, piste rectiligne, piste circulaire, proposée par R. Soreau, et enfin, la méthode de la piste polygonale, due au lieutenant-colonel Paul Renard, toutes méthodes que M. Marchis expose avec sa clarté habituelle. Pour le ballon-loch, on devra revenir aux Leçons précédentes (p. 332).

Nous avons déjà dit que la Dynamique des ballons dirigeables fait l'objet des 16e, 17e et 18e Leçons de cette première Partie. Ces trois Leçons sont peut-être les plus difficiles à lire de tout le Cours, surtout l'exposé des travaux par lesquels le capitaine Crocco a complété et corrigé si heureusement ce qu'avait écrit sur ce sujet le colonel Ch. Renard. Seulement, il nous faut avertir immédiatement le lecteur que plus loin, dans la troisième Partie (p. 151), on revient encore aux dirigeables. On y trouve, en effet, soigneusement exposées : 1° des expériences fort intéressantes sur des modèles de dirigeables, exécutées au laboratoire de Göttingen et qui ont ceci de particulier qu'elles donnent une fois de plus raison, après Ch. Renard et Krebs, aux partisans du gros bout à l'avant; 2° les expériences, d'une importance capitale, entreprises par la Société Zeppelin sur un de ses dirigeables les plus récents, expériences qui fournissent directement le coefficient de résistance de cette énorme machine en marche horizontale.

Passons à la deuxième Partie (1911).

A moins d'être du métier, il est difficile de prendre plaisir à la lecture des huit premières Leçons de ce Volume : les Étoffes, les Soupapes, les Filets des ballons, tout cela n'a rien de bien attrayant, sauf toutefois l'étude du guide-rope, que l'on trouvera page 105.

Occupons-nous un peu plus spécialement des six Leçons (9e,

10e, 11e, 12e, 13e, 14e) consacrées encore à l'étude de la Résistance de l'air.

C'est dans les deux premières que se trouvent sommairement décrites les curieuses expériences de M. Canovetti, à l'air libre, à l'aide d'un câble servant de plan incliné, ainsi qu'un court aperçu sur celles de l'abbé Le Dantec, qu'une courte critique ramène à leur juste valeur. C'est aussi dans ces Leçons que l'on verra exposés les principes des diverses méthodes employées actuellement pour l'étude de la Résistance de l'air, méthodes dont il a déjà été question dans la première Partie de ce compte rendu. D'abord les méthodes directes : le corps, placé dans l'air, est animé soit d'un mouvement rectiligne, soit d'un mouvement circulaire (méthode du manège), soit encore d'un mouvement pendulaire, procédé que l'on a déjà vu servir au capitaine Crocco dans ses expériences sur les dirigeables (première Partie, p. 395). Puis la méthode indirecte, la méthode du tunnel, à propos de laquelle l'auteur nous fait connaître l'installation de la *Brigata specialisti* à Rome, celle de M. Prandlt à Göttingen, et, enfin, la façon ingénieuse dont M. Eiffel a su réaliser, pour la plus grande commodité des expériences, un cylindre d'air non limité par des parois solides.

On aborde alors les 11e, 12e, 13e et 14e Leçons.

M. Marchis s'y occupe, pour la première fois, de l'existence du maximum de pression, aux environs d'un angle d'attaque de 40°, dans le cas d'une plaque carrée. Ce fait, signalé avant M. Eiffel, est nié par M. de Guiche opérant, il est vrai, sur d'assez grandes surfaces. Nous avons déjà parlé de ces résultats contradictoires donnés par des expériences qui semblent bien faites, d'un côté comme de l'autre.

Après viennent les nombreuses expériences, toujours de M. Eiffel, sur les multiples questions qui peuvent préoccuper les constructeurs de machines volantes : résistance des carènes, des câbles, effets de l'envergure et de la courbure des surfaces, représentés par les diagrammes polaires que tout le monde connaît aujourd'hui. Puis des études comparées sur les Monoplans et les Biplans au point de vue poussée, dont la suite se trouve dans la troisième Partie (p. 122) où le lecteur pourra se mettre au courant des résultats expérimentaux obtenus en ce qui concerne les *surfaces en tandem*, les *plans décalés*, etc.

Mais, avant d'arriver à cette troisième Partie, n'oublions pas de mentionner l'étude expérimentale des Ailes d'aéroplanes qui occupe les deux dernières Leçons de la seconde Partie, étude où l'on examine comment il faut procéder au choix d'une forme d'aile dans un projet d'aéroplane, et enfin (il a déjà été signalé plus haut), le paragraphe où l'on examine le moyen de passer des résultats d'expériences sur un petit modèle à un aéroplane de grandeur normale semblable au modèle étudié.

La troisième Partie (1912) débute par un exposé magistral (1re Leçon) de la Similitude en Mécanique, exposé où l'on fait toucher du doigt les difficultés que présente l'application du théorème de Newton dès que l'on tient compte des effets du frottement.

Viennent ensuite les deux Leçons (2e et 3e) dont nous avons déjà parlé, et où l'on expose les modes expérimentaux employés dans la mesure de la Résistance des fluides en général. C'est page 42 qu'on y trouvera décrit le dispositif dont M. de Guiche s'est servi pour déplacer un corps dans l'air. Les trois Leçons suivantes (4e, 5e, 6e) sont consacrées plus spécialement à l'examen des divers dispositifs employés pour mesurer cette résistance. A propos du dispositif de M. de Guiche, appelons l'attention sur la façon ingénieuse dont, à l'aide de la photographie, cet expérimentateur détermine d'un seul coup les pressions en des points multiples d'une même surface, alors que M. Eiffel les mesure séparément, point par point. La mesure globale de la traînée et de la poussée, telle qu'elle est pratiquée à Saint-Cyr, la description du dispositif et de la balance employées dans cet établissement, celles du laboratoire d'Auteuil, de l'appareil employé par M. Lafay pour la détermination directe du taux de sustentation d'un aéroplane, du tunnel de M. Boltzmann et de sa balance, méritent d'attirer l'attention du lecteur, tout comme, après, l'exposé des dispositifs adoptés, à l'imitation de M. J. Legrand, par le capitaine Olive et le commandant Dorand, dans le but d'arriver à effectuer, sur un aéroplane en plein vol, des mesures aussi précises que possible.

La 7e Leçon est consacrée aux expériences de M. de Guiche et aux résultats qu'elles lui ont donnés. C'est page 107 que le lecteur, en examinant la figure 69, pourra constater que le maximum de poussée totale observé par M. Eiffel aux environs de 40°, n'a pas été rencontré par M. de Guiche.

Nous avons déjà parlé du contenu des 8e et 9e Leçons. Outre les expériences de M. Eiffel sur les biplans, les surfaces en tandem, etc., on y trouve de nouveaux renseignements sur l'influence de l'envergure, de l'épaisseur des ailes, des courbures particulières que certains constructeurs se plaisent à leur donner; puis un court exposé des études faites, toujours par M. Eiffel, sur des modèles réduits d'aéroplanes tels que le Nieuport, le Tatin-Paulhan, etc. Enfin, à propos des expériences du commandant Dorand sur un aéroplane en plein vol, expériences que nous avons déjà signalées, et de celles exécutées sur un modèle de cet aéroplane, à Auteuil, le lecteur y apprendra avec satisfaction que, dans le cas de cet aéroplane, les coefficients de traînée et de poussée mesurés au ventilateur ont donné immédiatement les valeurs de ces coefficients pour l'aéroplane de grandeur normale, résultat encourageant pour l'avenir.

Les 10e et 11e Leçons s'occupent encore de la Résistance de l'air. On y traite des résultats trouvés par divers expérimentateurs : MM. Maurain et Toussaint, de l'Institut de Saint-Cyr, M. Prandlt et ses collaborateurs, MM. Béjeuhr et Föppl, du Laboratoire de Göttingen, etc. On y verra que M. Prandlt arrive à se trouver à peu près d'accord, toujours pour cette fameuse incidence de 40°, avec M. Rateau qui, sans nier, comme M. de Guiche, l'existence de phénomènes particuliers aux environs de cette incidence, est cependant en complet désaccord avec M. Eiffel sur leur façon d'être, ce qui donne à penser que ce dernier pourrait bien s'être trompé. Quant aux collaborateurs de M. Prandlt, ils se sont particulièrement occupés (p. 147) de l'influence que peut avoir la forme du contour de l'aile, et arrivent à cette conclusion qu'en fin de compte, au point de vue poussée et traînée, toutes les voilures se valent, affirmation un peu paradoxale, au premier abord. Viennent ensuite les études, toujours faites à Göttingen, sur un gouvernail de profondeur placé derrière une voilure portante, puis celles relatives aux dirigeables, dont nous avons déjà parlé.

Les 12e et 13e Leçons, sur la Résistance de l'eau au mouvement des corps qui y sont plongés, ne présentent rien de bien particulier. Nous nous en sommes déjà occupés. Si nous y revenons, c'est pour insister encore une fois sur ce fait que, peu à peu, M. Marchis s'est trouvé entraîné à s'occuper sérieusement

d'Hydronautique, qu'il a compris et a voulu faire comprendre à ses auditeurs, à ses lecteurs, que ces deux sciences, l'Aéronautique et l'Hydronautique, ne peuvent pas être séparées l'une de l'autre. Il y a longtemps, d'ailleurs, que nous pensons que l'Aéronautique, ou, mieux, la Navigation aérienne, n'aurait qu'à gagner à faire appel, pour la résolution des problèmes qui, chaque jour, en nombre de plus en plus grand, se dressent devant elle, à l'expérience pratique des marins, à la science des ingénieurs de la Marine.

Les trois dernières Leçons, consacrées aux études expérimentales sur les Hélices aériennes, que l'on doit à MM. Eiffel, Riabouchinsky, au commandant Dorand, à la *Brigata specialisti*, etc., contiennent un certain nombre de résultats qui, sûrement, ne sont pas définitifs, mais qu'il est bon de connaître. Appelons l'attention sur l'appareil employé à Auteuil pour la mesure de la poussée et de la puissance effective d'une hélice, sur la comparaison, faite par le commandant Dorand, des résultats obtenus par M. Eiffel travaillant sur un modèle réduit d'hélice Drzewiecki avec ceux que donne la même hélice de grandeur normale, comparaison d'où il semble résulter qu'on peut, parfois, comme pour un aéroplane, déduire de l'étude d'un modèle d'hélice le fonctionnement de l'hélice elle-même. Pour finir, mentionnons le paragraphe II, page 222, consacré à des études sur les *hélices marines :* c'est encore de l'Hydronautique.

III.

Il serait oiseux et puéril d'énumérer tout ce qu'il faudrait lui ajouter pour faire du *Cours d'Aéronautique* un traité complet. On peut se fier, pour l'achèvement de cette œuvre, à M. Marchis, à sa puissance de travail, à sa science, à sa conscience bien connues. Quant à nous, arrivés au terme de notre tâche, nous nous bornerons à formuler quelques vœux, que nous soumettons avec déférence au savant professeur d'Aviation de la Sorbonne :

1° Nous voudrions voir isoler des Leçons sur le Ballon libre et le Dirigeable (première Partie) ce qui se rapporte à la manœuvre de ces machines. Il y aurait là matière à deux Leçons, environ, très attachantes, très intéressantes. En y joignant une Leçon sur

le pilotage d'un aéroplane, le lecteur aurait ainsi à sa disposition une sorte de petit Traité de Navigation aérienne. On peut nous répondre que les traités de ce genre commencent à abonder : c'est justement une raison pour que leur examen, leur critique et leur clarification soient faites.

2° Nous désirerions voir M. Marchis s'occuper aussi de la sécurité en aéroplane. Un grand nombre d'inventeurs présentent tous les jours des projets nouveaux, particulièrement des stabilisateurs. Que valent ces appareils ? Que vaut le stabilisateur Doutre, si réputé ? Que vaut le si intéressant appareil auto-stable des frères Moreau ?

3° S'il est une science dont les liens avec l'Aéronautique, au point de vue de la Navigation aérienne proprement dite, soient des plus étroits, c'est, sans conteste, la Météorologie. Nous ne demandons pas, certes, l'annexion d'un cours de Météorologie au cours d'Aviation de la Faculté des Sciences, mais, simplement, quelques leçons sur la Prévision du temps et, surtout, une étude, aussi complète, aussi précise que possible, de la production et des effets des vents locaux, des remous, des vagues de l'atmosphère, avec, si possible, les moyens de les éviter ou de les combattre. Ceux qui seraient tentés de se demander ce que signifie au juste cette demande et, plus particulièrement, ce que nous entendons par *vagues de l'atmosphère*, nous permettront de les renvoyer à ce que nous-même avons écrit sur ces phénomènes encore peu connus dans la *Revue des Deux Mondes* du 1er mai 1912.

P. Banet-Rivet.

PLEMELJ (Josef). — Potential theoretische Untersuchungen. Nr XL. Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Nr XVI der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion, 1 vol. grand in-8° jésus, xix-100 pages. Leipzig, B. G. Teubner, 1911.

La plupart des problèmes de l'Électrostatique se ramènent à une distribution de masses attirantes de Green. Des recherches récentes ont mis hors de doute le fait que la distribution relative à un domaine intérieur et la distribution relative à la région exté-

rieure correspondante sont réductibles à une distribution unique (Gründbelegŭng).

La Société F. Jablonowski avait demandé de perfectionner cette théorie : le travail de M. Plemelj est une réponse à cette question.

Il a paru utile à l'auteur de reprendre (I) les parties essentielles de la théorie du potentiel et (II) l'exposé de la méthode de Fredholm pour les équations intégrales. C'est après cette introduction, qui est loin d'être une simple réplique de théories bien connues, qu'il aborde (III) les problèmes déterminés par des conditions aux limites (Randwertaŭfgaben) et qu'il étudie (IV) les relations entre la solution pour un domaine intérieur et la solution pour la région extérieure correspondante.

I. Dans l'exposé des propriétés essentielles du potentiel (défini comme solution de l'équation de Laplace, supposée d'abord à deux variables, $\Delta V = 0$), l'auteur insiste sur l'avantage qu'il y a à remplacer la notion de la dérivée normale, pour les points du contour, par une intégrale ayant une représentation physique simple et faisant intervenir seulement les points du domaine de régularité. On y parvient en remarquant que l'intégrale $\int \frac{dV}{dn} ds$ prise suivant un chemin intérieur à ce domaine ne dépend que des extrémités p et q du chemin d'intégration; il peut se faire que cette intégrale tende vers une limite quand p et q se rapprochent indéfiniment de deux points s et σ du contour; dans ce cas, on dit qu'elle représente *le courant* (*Ström* ou *Strömung*) à travers l'arc $s\sigma$ du contour. Dans le cas du potentiel logarithmique, le courant à travers $s\sigma$ est égal à la variation du potentiel conjugué le long de l'arc $s\sigma$.

Une application classique de la formule de Green montre que, dans le domaine de régularité, un potentiel quelconque se ramène aux deux potentiels

$$V(p) = \int \log\left(\frac{1}{r_{ps}}\right) d\mu_s$$

$$W(p) = \int \nu(s) \frac{d}{dn_s} \log\left(\frac{1}{r_{ps}}\right) ds$$

qui sont désignés sous le nom de *potentiel de simple couche* et *potentiel de double couche*.

Si l'on pose

$$\xi = \frac{x}{R^2}, \qquad \eta = \frac{y}{R^2}, \qquad (R^2 = x^2 + y^2),$$

on a, pour des valeurs très grandes de R,

$$V(p) = m \log\left(\frac{1}{R}\right) + A\xi + B\eta + \ldots,$$
$$W(p) = C\xi + D\eta + \ldots;$$

m est la masse totale du potentiel $V(p)$; A, B, C, D désignent des constantes et le potentiel $W(p)$ est régulier à l'infini.

II. La deuxième section contient les théorèmes les plus importants de la théorie de l'équation de Fredholm de façon que le lecteur ait sous la main, en une forme concise et bien adaptée au sujet, les ressources analytiques indispensables. On fera remarquer, dans la section suivante, que la réduction d'un problème à une équation de Fredholm lève, pour ce problème, toutes les difficultés dans les questions de convergence et permet d'obtenir les résultats avec une généralité que les anciennes méthodes ne pouvaient atteindre qu'au prix d'efforts longs et pénibles.

III. Dans la troisième section, on ramène à une équation de Fredholm chacun des deux problèmes suivants :

Problème de Neumann-Poincaré. — *Trouver un potentiel de double couche* $W(p)$ *qui, en tout point s du contour, satisfasse à l'équation*

$$W(s^+) - W(s^-) + \lambda[W(s^+) - W(s^-)] = 2\lambda f(s),$$

où $W(s^+)$, $W(s^-)$ désignent les valeurs du potentiel sur le contour, du côté intérieur et du côté extérieur, $f(s)$ est une fonction donnée pour tous les points s du contour; enfin, λ est le paramètre introduit par Poincaré, moins pour avoir un énoncé plus général que pour mettre plus de régularité dans les développements en série et les questions de convergence.

Problème de Robin-Poincaré. — *Trouver un potentiel de simple couche* $V(p)$ *qui, en tout point s du contour, satisfasse*

à l'équation

$$\frac{dV}{dn}(s^-) - \frac{dV}{dn}(s^+) - \lambda\left[\frac{dV}{dn}(s^-) + \frac{dV}{dn}(s^+)\right] = 2\lambda f'(s),$$

où $\frac{dV}{dn}(s^+)$ et $\frac{dV}{dn}(s^-)$ désignent les dérivées de $V(p)$ prises suivant la normale intérieure, et suivant la normale extérieure, au point s du contour, $f(s)$ une fonction donnée pour tous les points du contour et λ le paramètre de Poincaré.

Dans chacun des deux cas, on démontre l'équivalence du problème et d'une équation intégrale de Fredholm; le second problème peut être ramené à celui de Neumann-Poincaré.

La distribution pour le potentiel W est donnée par la fonction $\nu(s)$

$$\nu(s) = f(s) - \lambda \int f(\sigma) H(\sigma, s) d\sigma,$$

$H(\sigma, s)$ étant une fonction (qui dépend seulement du paramètre λ et de la forme du domaine considéré) de deux points σ et s du contour; l'intégrale est prise le long du contour.

La méthode de Fredholm donne $H(\sigma, s)$ sous forme explicite comme quotient de deux fonctions entières de λ et les valeurs singulières du paramètre sont celles qui annulent la fonction de Fredholm, $D(\lambda)$.

Les cas les plus intéressants dans la pratique sont ceux où

$$\lambda = \pm 1.$$

$\lambda = -1$ est un pôle pour $H(\sigma, s)$; mais, même dans ce cas, $H(\sigma, s)$ conduit encore à la solution du problème considéré. On montre que, dans le voisinage de $\lambda = -1$, la fonction $H(\sigma, s)$ a la forme

$$H(\sigma, s) = \frac{m'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma, s);$$

le résidu $m'(\sigma)$ définit la *distribution naturelle* d'un potentiel de simple couche $V(p)$ correspondant à une masse totale égale à un et prenant sur le contour une valeur constante (Leiterpotential); d'autre part, la fonction $\mathfrak{H}(\sigma, s)$, série entière en $\lambda + 1$, mise à la place de $H(\sigma, s)$ dans l'expression donnée ci-dessus de $\nu(s)$, déter-

mine un potentiel W qui prend sur le contour les valeurs données $f(s)$, à une constante près, N,

$$N = \int f(\sigma)\, m'(\sigma)\, d\sigma,$$

appelée *Constante de Neumann*.

La généralisation, pour le cas où l'aire est limitée par plusieurs contours, est étudiée en détails.

La détermination de la fonction $\mathfrak{H}(\sigma, s)$ par une série est très simple. On part de la fonction

$$h(\sigma, s) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arc\,tang}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$$

et l'on en déduit, par des applications successives de l'opération de Neumann, savoir

$$h_k(\sigma, s) = \int_c h_{k-1}(\sigma, \theta)\, h(\theta, s)\, d\theta \qquad (h_0 = h),$$

une suite de fonctions

$$h(\sigma, s), \quad h_1(\sigma, s), \quad \ldots, \quad h_k(\sigma, s), \quad \ldots.$$

Ces fonctions convergent vers une fonction de σ (indépendante de s), soit $m'(\sigma)$; la série qui définit $\mathfrak{H}(\sigma, s)$ est

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(\sigma, s) = [h(\sigma, s) - m'(\sigma)] + \lambda[h_1(\sigma, s) - m'(\sigma)]\\ - \lambda_2[h_2(\sigma, s) - m'(\sigma)] - \ldots,\end{aligned}$$

et l'on peut y faire $\lambda = \pm 1$. On peut alors former les séries de Neumann qui définissent la distribution $\nu(s)$.

Ces développements ont été exposés pour le potentiel logarithmique: mais des théorèmes analogues sont valables pour le potentiel newtonien.

L'application de la méthode, détaillée dans le cas du cercle, conduit à la formule de Poisson; dans le cas de l'ellipse, les résultats sont simples aussi; le dénominateur de Fredholm est alors

$$D(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda^2 q^2)(1 - \lambda^2 q^4)\ldots \qquad \left(q = \frac{A - B}{A + B}\right),$$

A et B désignant les demi-axes de l'ellipse.

IV. La quatrième et dernière section est consacrée aux rapports qui existent entre les méthodes de résolution des problèmes aux

limites $U(s^+) = f(s)$ et $U(s^-) = f_1(s)$, le premier relatif à la région intérieure, le second à la région extérieure au contour, c'est-à-dire, en définitive, à la détermination simultanée des deux fonctions $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma, s)$ et $\mathfrak{H}_{-1}(\sigma, s)$. K. Neumann a posé la question : peut-on pousser plus loin la réduction des deux problèmes et faire dépendre leur solution d'une seule fonction ? Cette réduction est faite ici de plusieurs manières ; je n'indiquerai que celle qui conduit à une loi de symétrie que l'auteur considère comme l'un des résultats les plus importants de son travail.

Soit, comme plus haut,

$$h(\sigma, s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arc\,tang} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma};$$

on pose

$$p(\sigma, s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} - m(\sigma) + m(s) \qquad \left[m(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} m'(\sigma)\, d\sigma \right].$$

On déduit de $p(\sigma, s)$ la suite des fonctions de Neumann

$$p(\sigma, s), \qquad p_1(\sigma, s), \qquad p_2(\sigma, s) \quad \ldots;$$

les fonctions de cette suite convergent vers une limite indépendante de σ et de s, que l'on peut supposer nulle en disposant de la constante σ_0 dont dépend la fonction $m(\sigma)$,

La fonction $p(\sigma, s)$ étant ainsi déterminée, la série

$$\ldots \mathfrak{p}_\lambda(\sigma, s) = p(\sigma, s) - \lambda p_1(\sigma, s) + \lambda^2 p_2(\sigma, s) \ldots$$

définit une fonction telle que l'on a

$$\frac{d}{d\sigma} \mathfrak{p}_\lambda(\sigma, s) = \mathfrak{H}_\lambda(\sigma, s)$$

et que la solution des deux problèmes dépend de cette seule fonction : la loi de symétrie annoncée est

$$\mathfrak{p}_{-\lambda}(s, \sigma) = \mathfrak{p}_\lambda(\sigma, s).$$

Dans le cas d'un contour elliptique, on trouve

$$\mathfrak{p}(\sigma, s) + \mathfrak{p}(s, \sigma) = \frac{1}{i\pi} \log \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n-1} e^{-i(\sigma+s)}}{1 - q^{2n-1} e^{+i(\sigma+s)}},$$

$$\mathfrak{p}(\sigma, s) - \mathfrak{p}(s, \sigma) = \frac{1}{i\pi} \log \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n} e^{-i(s-\sigma)}}{1 - q^{2n} e^{+i(s-\sigma)}}.$$

En résumé, et d'après les indications données dans la Préface, les deux premières sections de ce travail contiennent l'exposé de théories connues, mais un exposé spécialement adapté à la question proposée. Les résultats de la troisième section pouvaient, bien qu'avec des difficultés plus grandes, être obtenus par les anciennes méthodes; mais, pour la dernière section, les résultats obtenus sont nouveaux, ainsi que les méthodes qui y ont conduit et il y a lieu de signaler comme particulièrement intéressante la symétrie de la fonction $\mathfrak{P}(\sigma, s)$.

E. Lacour.

BURALI-FORTI (C.) et MARCOLONGO (R.). — Analyse vectorielle générale. Vol. I : Transformations linéaires. Traduit de l'italien par P. Baridon. 1 vol. in-8°, XIX-178 pages. Pavie, Mattei et Cie, 1912.

C'est, comme les Auteurs annoncent dans la Préface, le premier Volume d'une Collection [1] où l'on trouvera exposé des sujets intéressants de *Mécanique*, de *Physique mathématique* et de *Géométrie différentielle*, en suivant toujours les méthodes simples et rapides du moderne *Calcul vectoriel intrinsèque*.

Le but des Auteurs est de montrer comment le calcul vectoriel va simplifier (maintes fois d'une façon vraiment étonnante), beaucoup de questions, soit de Géométrie, soit des Mathématiques appliquées. D'ailleurs, cela ne doit pas surprendre, car ce calcul va opérer directement sur les éléments géométriques et physiques, avec des opérations analogues à celles du calcul algébrique. Le calcul vectoriel donne ainsi le moyen d'exprimer par des formules les résultats de constructions géométriques, ou des grandeurs physico-mécaniques représentées géométriquement; de représenter par des équations des propositions sur ces grandeurs, et de substituer une transformation d'équations à un raisonnement. C'est, somme toute, une affirmation du principe (dont on a reconnu désormais l'importance dans tout champ de l'esprit) de l'*écono-*

---

[1] Le deuxième Volume « *Applications physico-mécaniques* » est sous presse; le troisième Volume « *Hydrodynamique* » est en préparation.

mie de la pensée dans l'envisagement des questions géométrico-mécaniques sur les méthodes ordinaires des coordonnées, qui masquent trop souvent des résultats très simples sous une excessive complication de calcul. Et, pour cela, non seulement le physicien doit désormais s'emparer des méthodes du calcul vectoriel, mais aussi celui qui cultive les Mathématiques pures, car les éléments *point*, *vecteur* nécessaires, soit en Géométrie, soit en Physique et Mécanique, se présentent toujours indépendants de tout système de référence.

Il ne faut cependant pas confondre le calcul vraiment absolu des Auteurs qui n'a « jamais besoin de recourir à aucune coordonnée » avec d'autres systèmes qui « sont des tachygraphes des coordonnées cartésiennes » ([1]). Ces tachygraphes ont fait répandre l'opinion, *tout à fait fausse*, *quant au calcul vectoriel intrinsèque*, que « le calcul vectoriel a nécessairement besoin des coordonnées cartésiennes et que la concision bien connue du calcul vectoriel est due, en substance, au fait qu'on indique par une seule lettre une expression complexe ». (*Préface*, p. VII.)

Au contraire, de ce *calcul absolu*, on peut dire que (p. VIII) : « Pour traiter des questions de Physique, de Mécanique et de Géométrie, il n'est plus nécessaire de recourir à ces artifices spéciaux dépendant du choix des coordonnées, auxquels on doit, paraît-il, dans les expositions classiques et dans les expositions actuelles, le succès de toute recherche ». Et les Auteurs appuient leur affirmation en signalant deux exemples remarquables parmi les plus récents : l'un d'hydrodynamique, l'autre d'électrodynamique. D'ailleurs, on n'en finirait pas si l'on voulait simplement indiquer tous les exemples qu'on peut rencontrer dans les travaux, désormais nombreux, où la méthode des Auteurs a été appliquée, et dont on trouve une liste bibliographique dans le Livre (p. 169-173).

D'autre part, nous devons observer que « le calcul vectoriel peut ne pas faire usage des coordonnées, mais il est prêt à les donner, de quelque espèce qu'elles soient, et, d'une manière très simple, chaque fois qu'elles lui sont demandées ». Ainsi, on pourra passer

---

[1] Voir l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Edit. française, G.-V., t. IV, vol. 2.

aux coordonnées dans les questions spéciales où elles peuvent être employées utilement, car « l'accusation, lancée par quelques-uns, que le calcul intrinsèque exclut les coordonnées » (p. IX) est fausse.

Cette collection d'Ouvrages présuppose la connaissance des opérations vectorielles élémentaires exposées par les Auteurs dans leurs *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique mathématique* [Paris, Hermann, 1910 (¹)].

Les Auteurs suivent les notations qu'ils ont introduites après de sérieuses comparaisons et discussions relatives aux travaux des inventeurs (Grassmann, Hamilton, ...), pour l'usage de certains signes du calcul vectoriel, et des lois logiques régissant tout symbole d'opération (²). Ces notations rationnelles, conformes presque toutes à celles qui ont été proposées par les fondateurs du calcul vectoriel et désormais accueillies favorablement par beaucoup d'auteurs, ne pourront, à juste raison, être changées par d'autres irrationnelles et défectueuses (³).

La partie préliminaire ou *système minimum* du calcul vectoriel présente déjà, à elle seule, un champ très vaste d'application; on peut apprendre aisément son algorithme, tout à fait analogue à celui du calcul algébrique. Mais ce calcul élémentaire ne suffit pas à résoudre de nombreuses questions physico-mécaniques. Dans les problèmes naturels de toute sorte se présentent spontanément des opérateurs vectoriels linéaires (à appliquer, par exemple, au déplacement d'un corps élastique, à la force d'un champ magnétique ou électrique, etc.); opérateurs, ou *transformations linéaires*, ou *homographies (vectorielles)*, qui sont étudiées dans le Volume que nous examinerons.

L'admirable calcul des quaternions d'Hamilton ne peut remplacer qu'en partie les homographies; d'ailleurs, son algorithme ne

---

(¹) *Voir* ce *Bulletin*: 1re partie, 1910, p. 212-218.

(²) *Voir* à ce sujet les Notes des Auteurs dans les *Rendiconti del Circ. matem. di Palermo* (t. XXIII, XXIV, XXV, XXVI), le *Nuovo Cimento* (1907), l'*Enseignement mathém.* (1907, 1910, 1911).

(³) *Voir* l'*Encyclopédie*, *loc. cit.*; MM. Burali-Forti et Marcolongo montreront prochainement beaucoup d'absurdités qui résultent soit des différentes espèces de vecteurs (soi-disant) qu'on va introduire, soit des notations relatives.

peut pas être appris avec facilité, et les quelques soi-disant vulgarisations récentes, tout à fait irrationnelles et illogiques, doivent être bannies. On doit du reste à Hamilton même les propriétés fondamentales des homographies, mais elles ne sont pas envisagées sous une forme absolue. Les homographies les plus générales ont été considérées d'abord par Grassmann, à un point de vue tout à fait analytique, comme calcul des matrices et des déterminants : calcul dont les fondements ont été bien établis par Cayley dans un Mémoire célèbre, qui a donné origine à de nombreux et importants travaux.

Le Chapitre I est précédé des fondements de la théorie générale des *systèmes* et des *opérateurs linéaires*. Après avoir défini les homographies vectorielles et les avoir divisées en propres et singulières, on envisage de suite, pour bien fixer les idées, les plus simples d'entre elles, à savoir : les homothéties vectorielles (nombres réels), les axiales, les dyades, les dilatations; plus loin on étudie les isoméries et similitudes vectorielles. On donne ensuite les généralités sur les *opérateurs fondamentaux pour les homographies :* les trois invariants I_1, I_2, I_3, le vecteur V, la dilatation D, la conjuguée K, la cyclique C et, plus loin, l'opérateur R. Suivent les propriétés principales de ces opérateurs et celles des produits et puissances des homographies.

Le Chapitre II est précédé de quelques propriétés, soit sur les couples de classes telles que les éléments de l'une sont fonctions de de ceux de l'autre et forment un système linéaire, ou une partie d'un tel système; soit sur les opérateurs linéaires pour les éléments d'une de ces classes. Cela permettra de fixer, d'une façon générale et irréprochable, pour chaque fonction ainsi envisagée les définitions de limites, différentiels et dérivées. Dès lors, on est à même de considérer, au commencement du Chapitre II, les généralités sur les *dérivées par rapport à un point* pour les fonctions des points (points, vecteurs, homographies, ...). On introduit dans la suite, comme conséquence de ces dérivées, les importants *opérateurs différentiels* du premier ordre *rot*, *div* (le rotationnel ou tourbillon et la divergence d'un vecteur), *grad*, *Rot* (le gradient et le rotationnel d'une homographie ou nombre en particulier), dont on va exposer les propriétés principales. Pour les opérateurs différentiels du second ordre (symbole

pour l'équation de Laplace), Δ, Δ', on démontre clairement en quoi ils diffèrent au sujet des champs d'applications, quoiqu'ils présentent la même forme tachygraphique (avec les coordonnées), ce qui porte à tort à penser que les deux espèces d'opérateurs se confondent. Les propriétés de ces opérateurs et celles des produits possibles du 2e, 3e, 4e ... ordre des opérateurs différentiels mêmes sont exposées à la fin du Chapitre II.

Le Chapitre III, sur les *intégrales et équations différentielles*, s'ouvre avec les formules fondamentales pour la transformation d'intégrales étendues, soit à une surface fermée, soit à un contour linéaire fermé, dont on va déduire, entre autres, les théorèmes de Green et de Gauss (sous forme absolue). Après avoir établi très simplement quelques propriétés importantes sur les différentielles exactes, on en déduit les théorèmes fondamentaux sur les surfaces et les lignes de tourbillon et de courant (de Jacobi, etc.), l'existence de solutions de l'équation de Laplace et de Poisson. Suivent le théorème de Clebsch sur les vecteurs et son analogue sur les homographies, avec d'autres théorèmes fonctionnels. Les Auteurs terminent le Chapitre en donnant, pour les équations différentielles, relatives aux opérateurs différentiels du premier ordre, les solutions générales lorsque le second membre est nul, et des solutions particulières lorsque le second membre est constant ou bien fonction d'un point.

Dans l'*Appendice*, en exposant les lois générales suivies pour les opérateurs, on démontre qu'il est possible de déduire des homographies les quaternions d'Hamilton, et qu'il est impossible de déduire de ceux-ci les homographies [1]; on y démontre aussi la dépendance du système de référence, des homographies représentées par Gibbs au moyen des dyades. On trouve de même indiqué le passage possible du système absolu des Auteurs aux coordonnées cartésiennes, et, parmi ces dernières, les transformations sous forme tachygraphique des principales relations trouvées dans le texte.

L'Ouvrage se termine par trois Notes de M. M. Pieri sur la

---

[1] Pas même les homographies dans le plan, ainsi qu'il est démontré dans le Mémoire : M. Bottasso, *Omografie vettoriali del piano* (*Rendic. del Circ. mat. di Palermo*, n° 26, t. XXXV, 1913).

représentation géométrique, sur les quadriques indicatrices et sur les directions principales d'une homographie.

Des Notes bibliographiques et historiques rendent plus complet le beau Volume, qui marquera une vraie étape pour la propagation des méthodes si élégantes et si puissantes du calcul vectoriel.

MATTEO BOTTASSO.

CRÉPIN DE BEAUREGABD (P.). — GUIDE SCIENTIFIQUE DU GÉOGRAPHE EXPLORATEUR. Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences (prix BINOUX, 1910). 1 vol in-8° jésus, X-250 pages, 2 planches. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Pour montrer l'importance et l'utilité de ce Livre, il nous suffira, d'abord, de reproduire une partie du Rapport que fit M. Hatt avant de proposer à l'Académie des Sciences d'accorder à l'Auteur du manuscrit de cet Ouvrage une partie du prix BINOUX, ensuite de donner une Table des principales questions traitées dans le Volume.

« Le Commandant Crépin de Beauregard a voulu faire plus qu'un simple Manuel destiné au géographe explorateur. Il a cherché à justifier les méthodes par le raisonnement ; à munir, en outre, ses lecteurs de notions scientifiques indispensables pour résoudre les difficultés imprévues que le hasard ne manque jamais de semer sur le chemin des praticiens de la Géographie expéditive. »

Dans le Chapitre I, des notions de Cosmographie, de Trigonométrie rectiligne et sphérique, d'usuels développements en séries forment une partie théorique.

Dans le Chapitre II sont examinées, dans le sens le plus pratique, les questions de réglage des niveaux, les corrections des inévitables défauts de ce réglage, la marche des chronomètres.

Le Chapitre III est consacré aux observations astronomiques nécessaires pour déterminer des positions géographiques, quand celles-ci ne peuvent être obtenues par une triangulation régulière.

« Il faut louer l'Auteur d'avoir apporté un soin tout particulier à ces Chapitres essentiels en donnant de nombreux exemples empruntés à ses propres observations, et fournissant des types

de calcul que chaque observateur pourra confectionner en recourant aux procédés de la polycopie. »

En parcourant cet Ouvrage, j'ai pensé qu'il serait utile de donner au Lecteur de cette succincte analyse les titres des principaux sujets développés par M. Crépin de Beauregard.

I. *Résumé des connaissances scientifiques nécessaires à l'étude de l'Astronomie de campagne et de la Géodésie.*

II. *Des instruments.*

III. *Opérations pratiques d'Astronomie de campagne.* Détermination de l'heure d'un lieu. Détermination de la latitude. Des azimuts. Des longitudes.

IV. *Géodésie élémentaire.* Marche des opérations. Mesure des bases. Mesure des angles et calculs des triangles. Calculs des coordonnées. Des altitudes.

V. *Projections des Cartes géographiques.* Projections perspectives : orthographique; de Babinet; de Lorgna; stéréographique; de La Hire; gnomonique. Projections par développement : cylindrique de Mercator et de Cassini ; conique de Ptolémée ; de Bonne.

VI *Géodésie astronomique expédiée.* Exposé et application de la méthode. Construction de la chaîne de jonction. Degré de précision de cette méthode.

VII. *Nivellement direct.* Exposé de la méthode. Niveaux. Mires. Opérations sur le terrain. Réglage du niveau à bulle d'air. Calage de l'instrument. Centrage de la lunette. Causes d'erreurs : sphéricité des surfaces de niveau, réfraction.

Appendice. Indications pratiques.

L'Auteur n'expose que les méthodes et ne signale que les instruments dont lui-même s'est servi dans ses nombreuses missions.

Son Ouvrage est à la portée du plus grand nombre et exige peu de connaissances scientifiques de la part du Lecteur ; il est rédigé de telle sorte qu'on peut laisser de côté les formules dont on n'a pas besoin ; il dispense le voyageur inexercé, mais de bonne volonté, de recourir à quelqu'un qui lui enseigne la pratique des instruments et la manière de faire les observations.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR UNE FORME DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DANS LE VOISINAGE DE CERTAINES VALEURS SINGULIÈRES :

PAR M. HENRI DULAC.

Étant donnée l'équation différentielle

$$(1) \qquad (px + \ldots)\,dy - (qy + \ldots)\,dx = 0,$$

où p et q sont des entiers positifs et où les coefficients de dx et dy sont des polynomes ou des séries entières en x et y [1], considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad (px + \ldots)F'_x - (qy + \ldots)F'_y = 0.$$

On peut, dans un cas particulier (cas d'un *centre*), vérifier cette équation (2) par un développement de la forme

$$(3) \qquad F = x^q y^p + \ldots.$$

Cette fonction F peut d'ailleurs, dans ce cas, toujours se mettre sous la forme

$$F = A^q B^p,$$

avec

$$A = x + \ldots, \qquad B = y + \ldots.$$

En général, il est impossible de déterminer une solution de la forme (3) pour l'équation (2). Je me propose de montrer qu'*on peut dans tous les cas trouver une solution de la forme*

$$(4) \qquad F = \frac{A^{aq} B^{bp}}{1 + C + A^{aq} B^{bp} \log A^a B^b},$$

où r désigne un certain entier, a et b des constantes déterminées,

[1] Ici, comme dans la suite, nous n'écrirons que les termes de moindre degré de ces polynomes ou séries entières.

A et B des séries de la forme indiquée plus haut: C est une série entière en x et y, sans terme constant. Les séries A et B peuvent toujours être supposées convergentes, pour $|x|$ et $|y|$ assez petits, mais je montre, par un exemple, que la série C peut être divergente.

Dans le cas où C est convergent, je démontre à l'aide de l'intégrale (4) le théorème suivant : *Si l'on considère, dans le voisinage de $x=0$, $y=0$, une solution quelconque de l'équation* (1), *on peut faire tendre simultanément x et y vers zéro.* Ce théorème est d'ailleurs exact dans tous les cas, ainsi que je l'ai déjà démontré.

Par analogie avec ce qui se produit pour ce théorème, on peut penser que les propriétés de l'équation (1) établies à l'aide de l'intégrale (4), lorsque C est convergent, pourront être étendues au cas où C est divergent. A ce titre, il m'a paru intéressant de signaler la forme (4) d'intégrale. Dans le cas où C est convergent, cette intégrale présente sur les formes signalées jusqu'ici [1] pour l'intégrale générale de (1) l'avantage d'être notablement plus simple et d'être valable pour toutes les valeurs de x et y assez petites en module, tandis que la convergence des autres formes d'intégrales n'est établie que pour certaines lois de variation de x et y. Cette circonstance rend douteux l'emploi de ces formes d'intégrales dans presque tous les cas où cet emploi serait utile.

2. *Formes que l'on peut donner à l'équation* (1). — Nous savons que l'équation (1) admet une solution $y=f(x)$ et une solution $x=g(y)$, f et g étant des séries entières, la première en x, la seconde en y; les termes de moindre degré de f et de g étant de degré supérieur au premier. Si nous faisons le changement de variables

$$x_1 = x - g(y), \qquad y_1 = y - f(x), \tag{5}$$

l'équation (1) prend la forme

$$x_1(p+M)\,dy_1 + y_1(q-M)\,dx_1 = 0. \tag{6}$$

---

[1] Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 3, article de M. Painlevé, p. 41; P. Boutroux, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXIX, 1910, p. 283; *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. VI, 1910, p. 149.

M et N étant des séries entières en x_1 et y_1, nulles pour

$$x_1 = y_1 = 0.$$

Si nous considérons en particulier le cas où l'on a $p = q = 1$, et si nous désignons par H une fonction de même nature que M et N, nous pouvons mettre l'équation (6) sous la forme

$$(7) \qquad x_1(1 - H)\,dy_1 + y_1(1 - H)\,dx_1 = 0.$$

Il suffit qu'on ait

$$H = \frac{M - N}{2 + M - N}.$$

Si donc nous mettons, pour $p = q = 1$, l'équation (1) sous la forme

$$(8) \qquad x(1 + H)\,dy + y(1 - H)\,dx = 0,$$

l'équation (2) prend la forme

$$(9) \qquad xF'_x - yF'_y - H(xF'_x + yF'_y) = 0.$$

On voit immédiatement que, s'il existe un développement

$$(10) \qquad F = xy + \ldots$$

vérifiant (9), tous les termes de F contiennent en facteur le produit xy et l'on peut écrire

$$F = xyG, \qquad G = 1 + \ldots,$$

G vérifie l'équation

$$(11) \qquad yG'_y - xG'_x = H(2G - xG'_x - yG'_y).$$

Si l'on cherche à déterminer une série G vérifiant cette équation, on sera, en général, arrêté par une impossibilité dans la détermination du terme en xy. Supposons, plus généralement, qu'on puisse déterminer les termes de G dont le degré est inférieur à $2r$, et qu'on rencontre une impossibilité dans la détermination du terme en $x^r y^r$. Soit P l'ensemble des termes de G dont le degré est inférieur à $2r$. Nous supposons les termes de P déterminés [1]

[1] Les coefficients des termes en xy, x^2y^2, ..., $x^{r-1}y^{r-1}$ peuvent être pris arbitrairement. Nous supposons que l'on ait fait un choix, du reste quelconque, pour les valeurs de ces coefficients.

en identifiant dans les deux membres de (11) les termes de degré inférieur à $2r$. Cela revient à dire que les termes de H de degré inférieur à $2r$ sont identiques aux termes de même espèce de l'expression

$$E = \frac{yP'_y - xP'_x}{2P - xP'_x x - yP'_y}$$

supposée développée suivant les puissances de x et y.

Il en résulte que, si l'on considère l'équation qui a pour intégrale générale

$$xyP = \text{const.},$$

et si l'on met cette équation sous la forme

$$x(1 - K)\,dy + y(1 - K)\,dx = 0,$$

les termes de K de degré inférieur à $2r$ seront identiques aux termes de même espèce de H. Si nous faisons le changement de variables

$$y_1 = yP,$$

l'équation précédente devient

$$x(1 - K_1)\,dy_1 + y_1(1 - K_1)\,dx = 0 \qquad (K_1 \equiv 0)$$

et l'équation (8) devient

$$x(1 + H_1)\,dy_1 + y_1(1 - H_1)\,dx = 0.$$

Les termes de H_1 dont le degré est inférieur à $2r$ seront donc identiques aux termes de même espèce de K_1, c'est-à-dire seront nuls. Nous pouvons donc toujours supposer que, dans l'équation mise sous la forme (8), H ne contient aucun terme de degré inférieur à $2r$. De plus, le coefficient du terme $x^r y^r$ de H n'est pas nul; en effet, on voit que si les termes de H de degré moindre que $2r$ sont nuls, il faut et il suffit pour qu'on soit arrêté par une impossibilité dans la détermination du terme en $x^r y^r$ de G, que le coefficient du terme en $x^r y^r$ de H ne soit pas nul. Nous arrivons donc à l'énoncé suivant : *S'il n'est pas possible de vérifier l'équation* (2) (*dans le cas de* $p = q = 1$) *par un développement de la forme de* (3), *il est toujours possible de mettre, par un changement de variables, cette équation sous la forme* (9), H *ayant comme termes de degré minimum des termes de degré* $2r$, *parmi lesquels figure, avec un coefficient différent de zéro, un terme en* $x^r y^r$.

Cette forme donnée à l'équation (2) et à H nous facilitera certaines démonstrations. Les deux propriétés suivantes deviennent en particulier évidentes :

1° Si l'on cherche à vérifier l'équation (9) par un développement de la forme (10), il sera impossible de disposer des coefficients arbitraires des termes en x^2y^2, x^3y^3, ..., x^ry^r de F de manière à rendre possible la détermination du terme en $x^{r+1}y^{r+1}$ de F. Le même énoncé s'applique donc aussi à l'équation (2), dans le cas où $p = q = 1$.

2° Si l'on cherche à vérifier l'équation (9) par un développement

$$F \equiv x^s y^s + \ldots,$$

on ne rencontrera aucune impossibilité dans la détermination des termes de F dont le degré est inférieur à $2(r+s)$, mais on sera arrêté par une impossibilité dans la détermination du terme en $x^{r+s}y^{r+s}$. Le même énoncé s'applique donc aussi à l'équation (2), pour $p = q = 1$.

3. *Intégrale de l'équation* (9). — Je vais montrer qu'*il est toujours possible de vérifier formellement l'équation* (9) *par une solution de la forme*

$$(11) \qquad F \equiv \frac{x^r y^r}{1 + f + x^r y^r \log x^a y^b},$$

a et b étant des constantes convenablement choisies et f désignant une série entière entre x et y, sans terme constant

$$f \equiv \Sigma a_{mn} x^m y^n \qquad (m = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots).$$

Nous avons

$$\frac{(1 + f + x^r y^r \log x^a y^b)^2}{x^r y^r} F'_x = r + rf + xf'_x + a x^r y^r,$$

$$\frac{(1 + f + x^r y^r \log x^a y^b)}{x^r y^r} F'_y = r + rf + yf'_y + a x^r y^r.$$

$$(12) \qquad yf'_y - xf'_x = \alpha x^r y^r + H(2r + 2rf + xf'_x + yf'_y + \beta x^r y^r),$$

en posant

$$\alpha = b - a, \qquad \beta = -a - b.$$

Si nous égalons dans les deux membres de (12) les coefficients

des termes en $x^m y^n$, nous avons

$$(13) \qquad (n-m)a_{mn} = C_{mn}.$$

C_{mn} sera (puisque les termes de H sont au moins de degré $2r$) une fonction des coefficients a_{ij} pour lesquels on a

$$i+j \leqq m+n-2r.$$

Nous appellerons coefficients de *catégorie* 1 les coefficients a_{mn} de f pour lesquels on a $m+n<2r$.

Les coefficients de *catégorie* p seront ceux pour lesquels on a

$$2(p-1)r \leqq m+n < 2pr.$$

Nous déterminerons successivement les coefficients de catégorie 1, ensuite ceux de catégorie 2, 3, ... Dans la détermination des coefficients de catégorie p, les expressions C_{mn} ne dépendent que des coefficients des catégories inférieures à p. Aucune difficulté ne se présente dans la détermination des coefficients pour lesquels on a $m \neq n$, dès que l'on suppose déterminés les coefficients des catégories précédentes, mais il semble qu'il puisse se présenter des impossibilités, lorsqu'on a $m=n$. Nous allons voir que nous disposons d'un nombre suffisant d'arbitraires pour rendre nulles les expressions C_{mn}, pour lesquelles $m=n$ et éviter ainsi les impossibilités signalées.

Les termes de catégorie 1 se réduisent à

$$a_{11}xy + a_{22}x^2y^2 + \ldots + a_{r-1,r-1}x^{r-1}y^{r-1};$$

tous ces coefficients a_{ii} sont pour le moment arbitraires. Dans la détermination des termes de catégorie 2, nous devons rendre nulles toutes les expressions C_{nn} pour lesquelles on a $r \leqq n < 2r$. Désignons par $\alpha_1 x^r y^r$ le terme en $x^r y^r$ de H, α_1 n'est pas nul. En égalant C_{rr} à zéro nous avons

$$(14) \qquad \alpha + 2r\alpha_1 = 0,$$

ce qui détermine α. Nous avons ensuite, pour

$$n = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ 2r-1,$$

$$(15) \qquad C_{nn} \equiv 2\alpha_1(r-n)a_{n-r,n-r} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits ne contenant que des coefficients a_{ii} pour lesquels on a $i < n-r$. En donnant alors successivement à n les valeurs $r+1$, $r+2$, ..., $2r-1$, l'égalité (15) déterminera les

coefficients $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{r-1,r-1}$. Les coefficients a_{nn} de catégorie 2 resteront arbitraires pour le moment, tandis que tous les autres coefficients de catégorie 2 seront déterminés sans ambiguïté par l'égalité (13).

Si nous passons aux termes de catégorie 3, et si nous considérons d'abord le terme en $x^{2r}y^{2r}$, nous obtenons

$$C_{2r,2r} = \alpha_1 \beta - \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant déjà connus. Cette égalité détermine β. Si dans (15) nous faisons ensuite successivement

$$n = 2r-1, 2r+0, \ldots, 3r-1,$$

les termes non écrits ne contiennent en dehors des coefficients a_{ij} déjà déterminés que des coefficients a_{ii} pour lesquels on a $i < n - r$. Nous déterminerons ainsi successivement $a_{r+1,r+1}$, $a_{r+2,r+2}$, ..., $a_{2r-1,2r-1}$. Le coefficient a_{rr} restera arbitraire, ainsi qu'il fallait s'y attendre *a priori*. Les coefficients a_{nn} de catégorie 3 resteront arbitraires pour le moment, tandis que les autres coefficients de catégorie 3 seront déterminés par l'égalité (13).

En continuant de même, on voit que, si l'on considère les termes de catégorie p, on détermine les coefficients a_{nn} de catégorie $p-1$, ainsi que tous les coefficients a_{mn} de catégorie p, pour lesquels on a $m \neq n$, tandis que les coefficients a_{nn} de catégorie p ne seront déterminés qu'en considérant les termes de catégorie $p+1$.

Nous avons donc démontré l'existence d'une solution de la forme (11') vérifiant formellement l'équation (9).

Remarque. — Pour être ramené au cas où H ne contient pas de termes de degré inférieur à $2r$, nous avons dû faire un changement de variables. Pour revenir aux variables primitives et rentrer dans le cas où H est quelconque, nous devons, dans (11'), remplacer y par $y\mathrm{P}$. Cette solution (11') devient

$$\frac{x^r y^r \mathrm{P}^r}{1 - f(x, y)\mathrm{P} - x^r y^r \mathrm{P}^r \log x^r y^r \mathrm{P}}$$

$$\frac{x^r y^r}{\mathrm{P}^{-r}\left[1 - f(x, y)\mathrm{P}\right] - x^r y^r \log \mathrm{P} - x^r y^r \log x^r y^r},$$

ce qui, puisque P contient un terme constant égal à 1, est encore une solution de la forme (11').

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

COTTY (Gaston). — Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques*, soutenue le 8 mars 1913, sous la présidence de M. *Émile Picard*, 1 vol. in-4°, II-171 pages. Toulouse, Édouard Privat, 1912.

La lecture approfondie du Mémoire célèbre d'Hermite sur la transformation des fonctions abéliennes a été l'origine de l'excellent travail que M. Cotty vient de présenter comme Thèse à la Faculté. On sait que Hermite a considéré seulement dans cette question les fonctions abéliennes générales et que l'étude des fonctions abéliennes singulières a été faite par M. Humbert dans une suite de Mémoires du plus haut intérêt. Ce sont précisément les fonctions singulières qui présentent le plus d'analogies avec les fonctions elliptiques. Ainsi, ce sont les seules fonctions singulières qui présentent des multiplications complexes ; certaines fonctions abéliennes singulières ont aussi conduit jadis M. Picard à un premier exemple de fonctions hyperabéliennes, fonctions présentant une analogie étroite avec les fonctions modulaires de la théorie des fonctions elliptiques.

C'est au point de vue arithmétique, plutôt que fonctionnel, que M. Cotty se place le plus souvent dans son travail. Avant d'arriver aux fonctions singulières, il examine, après MM. Traynard et Remy, les fonctions abéliennes correspondant au Tableau des périodes

$$(T_n)\quad \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 & g & h, \\ 0 & 1 & h & g^1. \end{cases}$$

Au point de vue arithmétique, ces Tableaux T_n conduisent à des systèmes linéaires de seize nombres entiers, plus généraux que le système classique d'Hermite.

L'introduction de ces Tableaux permet d'étendre, à certains

modules de nombres algébriques du second degré, les notions et les problèmes se présentant relativement aux entiers des corps quadratiques dans la transformation des fonctions abéliennes habituelles. Auditeur assidu du cours de M. Humbert au Collège de France, M. Cotty manie avec habileté l'interprétation géométrique de la transformation, où apparaît une liaison intime entre les propriétés de l'espace réglé et celles des fonctions abéliennes. Dans le cas des fonctions singulières, la réduction des relations singulières de genre n est heureusement effectuée; les transformations singulières liées à une relation de genre n sont ensuite déterminées et l'Auteur donne une solution nouvelle du problème de la multiplication complexe, en utilisant l'interprétation géométrique précédemment développée.

Dans la deuxième Partie, M. Cotty considère l'ensemble des systèmes de fonctions abéliennes dont les périodes normales vérifient une même relation singulière. On peut, dans ce cas, donner aux périodes une forme qui met en évidence des groupes hyperabéliens. Le cas de l'invariant pair pour la relation singulière amène aux groupes hyperabéliens de MM. Picard et Bourget.

L'invariant impair conduit, comme le montre M. Cotty, à des groupes hyperabéliens nouveaux qu'il étudie sous le nom de groupe arithmétique et de groupe modulaire du corps $\sqrt{4N+1}$. On peut les rattacher aux substitutions semblables arithmétiques de certaines formes quadratiques quaternaires. L'Auteur indique quelques propriétés intéressantes de ces groupes, dont il se propose de poursuivre l'étude dans un autre travail en même temps que celles des fonctions hyperabéliennes correspondantes.

Dans la troisième Partie nous revenons à un problème posé par Hermite. Ce savant a été conduit, par le problème de la transformation, à isoler, parmi les formes quadratiques quaternaires, les formes spéciales dont les coefficients sont liés par certaines relations. Celles-ci restent invariables, quand on effectue sur les variables une substitution correspondant aux seize entiers du problème de la transformation. Le problème de l'équivalence arithmétique de telles formes et les problèmes connexes se posent alors pour cette classe spéciale de formes. C'est à ces questions posées par Hermite que s'attaque avec succès M. Cotty. La méthode qu'il emploie est fort intéressante et distincte des méthodes généralement employées

dans la théorie arithmétique des formes. Pour traiter le problème de l'équivalence arithmétique des formes dont nous venons de parler, qu'il appelle *abéliennes*, M. Cotty utilise les propriétés de l'espace réglé étudiées plus haut, et est ainsi conduit à associer à chaque forme abélienne ou quadratique d'Hermite une forme binaire qui représente les invariants de tous les couples de droites tracées sur cette quadrique ; il obtient de cette manière une condition nécessaire pour l'équivalence de deux formes abéliennes. Ces considérations mettent en évidence la liaison des formes abéliennes avec les corps quadratiques et avec certaines formes bilinéaires liées à ces corps. L'Auteur traite successivement le cas des formes abéliennes définies et celui des formes indéfinies. Nous ne pouvons le suivre ici dans le détail des ingénieuses considérations qu'il emploie, et nous dirons seulement que des théorèmes nouveaux sont établis relativement à la distribution en un nombre limité de classes de certaines formes à indéterminées conjuguées de même déterminant.

Nous en avons dit assez pour montrer l'intérêt et l'importance du travail de M. Cotty, qui contient nombre de résultats personnels et présente souvent, sous un jour nouveau, des questions auparavant étudiées. Il témoigne d'une grande souplesse d'esprit. M. Cotty sait se placer, suivant les cas, à des points de vue divers, arithmétique, géométrique, fonctionnel. L'Auteur trouvera, d'ailleurs, dans l'étude commencée matière à des travaux ultérieurs dont il esquisse le programme et qui compléteront cette remarquable Thèse. *La R.*

C. Г. ПЕТРОВИЧЪ. — Курсъ теоретической механики. часть I : кинематика. часть II : динамика точки. — Cours de Mécanique rationnelle. Tome I : *Cinématique*. 1 vol. gr. in-8, avec 98 figures, IV + II + 312 pages. Tome II : *Dynamique du point*, 1 vol. gr. in-8, avec 63 figures, V-263 pages. Saint-Pétersbourg, Typographie du Ministère des Ponts et Chaussées, 1912. (En langue russe.)

Cet Ouvrage représente, avec quelques compléments, une partie du Cours fait par M. Petrovitch à l'Académie d'Artillerie Michel, à Saint-Pétersbourg.

TOME I.

L'*Introduction* est consacrée à la théorie des vecteurs : on y trouve l'exposé ordinaire de la conception du vecteur, des moments par rapport à un point et par rapport à un axe d'un système de vecteurs, et la classification de ces systèmes. Dans son exposition, l'Auteur n'utilise pas l'Analyse vectorielle moderne et les simplifications qu'elle apporte : ainsi, il n'est pas fait mention de la notion de vecteur-fonction ni de celle de dérivée géométrique.

Dans le premier Chapitre de la *Cinématique*, M. Petrovitch expose la manière dont peut être donné le mouvement d'un point dans l'espace. Le second Chapitre traite de la vitesse : l'Auteur définit la vitesse et détermine ses projections sur les axes de coordonnées, sur une direction mobile ou fixe. Ensuite, il traite le problème inverse de la détermination du mouvement, la vitesse étant donnée en fonction du temps. Dans le Chapitre III, l'Auteur considère l'accélération du point, ses relations avec l'hodographe et ses projections. Comme exemple, il considère le mouvement képlérien, et donne la formule de Binet. Le Chapitre se termine par la question de la détermination du mouvement, lorsque l'accélération est donnée.

La dernière partie du Livre est consacrée à la *Cinématique des corps solides*. Le Chapitre IV traite du mouvement des corps solides, des angles d'Euler et des formules d'Olinde Rodrigues. Dans le Chapitre V, l'Auteur étudie le calcul des vitesses des difrents points du corps solide, et donne successivement les cas du mouvement de translation, de la rotation et le cas général. Le Chapitre VI traite des axes de vis dans le mouvement hélicoïdal, en exposant, chemin faisant, les théorèmes nécessaires concernant les surfaces. Dans le Chapitre VII, l'Auteur considère l'accélération des points du corps solide et démontre le théorème de Coriolis. Puis il discute le cas général du mouvement et termine par la démonstration de l'existence du point dont l'accélération est nulle. Le Chapitre VIII est consacré à l'étude du mouvement d'une figure plane dans son plan et à celle du centre instantané de rotation. Le dernier Chapitre traite de la composition des mouvements d'un corps solide.

TOME II.

Dans le Chapitre I, l'Auteur introduit les notions principales de la Dynamique, la masse et la force, d'après le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. P. Appell; il indique les équations du mouvement et de l'équilibre d'un point matériel libre. Les notions de la quantité de mouvement, de l'impulsion de la force, de la force vive et du potentiel sont exposées dans le Chapitre II : il faut remarquer ici que l'Auteur ne distingue pas les deux notions de fonction des forces et de potentiel, fonctions qui sont égales et de signe contraire, et déterminent, l'une les composantes de la force par ses dérivées partielles et l'autre l'énergie potentielle. Dans le Chapitre III sont les théorèmes du moment de la quantité de mouvement et des forces vives, ainsi que les conditions d'existence des intégrales correspondantes.

Le Chapitre IV est consacré aux équations de Lagrange, aux équations canoniques, et à l'équation aux dérivées partielles correspondante. Au point de vue pédagogique, il est très utile d'aborder toutes ces importantes questions dès la Dynamique du point : cela constitue une introduction naturelle à la Dynamique des Systèmes. Malheureusement, l'exposition de ce Chapitre n'est pas partout d'une entière rigueur : ainsi l'Auteur n'indique pas (p. 92), par l'analyse d'un déterminant, qu'on peut toujours déterminer les vitesses q'_1, q'_2, q'_3, en fonction linéaire des nouvelles variables p_1, p_2, p_3.

Les trois Chapitres suivants traitent les questions du mouvement du point sur une surface et sur une courbe fixe ou mobile : l'Auteur utilise souvent, dans les exemples, les équations de Lagrange. Viennent ensuite deux Chapitres concernant le mouvement relatif et la percussion. Dans le dernier Chapitre, l'Auteur étudie l'équilibre d'un point; il démontre le théorème de Lejeune-Dirichlet; il expose avec quelques détails les conditions d'équilibre d'un point sur une surface et sur une courbe sans ou avec frottement.

L'exposition théorique est illustrée par un grand nombre d'exemples, qui sont pour la plupart le complément nécessaire de

la théorie. Le souci du détail amène, en quelques endroits, une prolixité qui, parfois, n'est pas sans nuire à l'immédiate compréhension du texte.

A. Bilimovitch.

DUCHESNE (Armand). — Recherches sur les propriétés de la vapeur d'eau surchauffée. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le titre de Docteur de l'Université*, soutenue le 23 juin 1911. 1 vol. in-4, 111-119 pages, Paris, H. Dunod et L. Pinat, 1911.

1. Depuis que les moteurs thermiques à combustion interne ont accentué, sous les formes les plus variées, leur progrès d'abord hésitant; depuis l'adoption des hautes compressions, depuis l'adaptation de ces moteurs aux carburants les plus divers et les plus économiques, les fabricants de machines à vapeur ont dû se préoccuper de soutenir la lutte contre la concurrence que leur faisaient les nouveaux moteurs et, à cet effet, ils se sont efforcés de faire rendre à la machine à vapeur tout ce que la construction moderne peut en attendre.

Malgré qu'il ne semble pas que la vapeur surchauffée soit une panacée universelle, son emploi se trouve cependant avantageux dans un assez grand nombre de cas et constitue ainsi un de ces moyens de perfectionner la machine à vapeur que recherchent nos constructeurs.

Malheureusement, l'opportunité de l'usage de la vapeur surchauffée résulte dans chaque cas de la discussion de conditions extrêmement complexes, et la critique de cette étude est d'autant plus malaisée que l'on connaît mal les lois thermodynamiques de la vapeur surchauffée.

La plupart des essais qui ont été faits ont eu un caractère technique. Ils ont consisté à faire fonctionner de la vapeur surchauffée dans une machine donnée et à étudier les caractéristiques de cette machine, sans que le résultat de cette expérience, bon ou mauvais, offre un degré suffisant de généralité ou de fine analyse pour pouvoir être transporté à une machine analogue, mais de type différent.

2. On a bien essayé d'assimiler à la théorie d'un gaz parfait celle de la vapeur surchauffée et l'on trouve de bons ouvrages techniques qui prennent pour base cette hypothèse. Mais, eu égard à ses conditions industrielles d'emploi, la vapeur surchauffée évolue trop près de la courbe de saturation pour que l'assimilation à un gaz parfait soit suffisamment exacte.

Aussi pendant longtemps, les praticiens, après Zeuner, ont-ils pris comme point de départ de la thermodynamique de la vapeur surchauffée l'hypothèse de Regnault, d'après laquelle le coefficient C' de chaleur spécifique sous pression constante serait constant et voisin de 0,48.

On sait que dans ces dernières années, M. Boulvin a construit sur cette hypothèse une théorie graphique de la vapeur surchauffée, qui a été pour lui l'occasion de constructions géométriques d'une rare élégance.

L'importance de C' dans la question n'était pas du reste nouvelle. Déjà, dans son Mémoire célèbre *Sur les fonctions caractéristiques*, inséré au *Recueil des Savants étrangers* (¹), Massieu avait consacré un Chapitre spécial à la vapeur surchauffée et montré comment la connaissance de la fonction C' permettrait de construire tous les éléments thermodynamiques de la vapeur surchauffée. Il n'est pas mauvais de rappeler ici que, dans son Mémoire, Massieu introduit ingénieusement comme variables, d'abord la température absolue T de la vapeur surchauffée, puis, au lieu de sa pression p, la température Θ de la vapeur saturée sous cette même pression. Ce procédé n'est pas, au fond, très différent dans son esprit de celui mis en œuvre plus tard par M. Boulvin sous la forme graphique.

3. Mais ces hautes considérations thermodynamiques restent pratiquement lettre morte si l'on ne connaît pas la fonction C' qui leur sert de base, car C' n'est pas constant.

En présence des incertitudes et des formules franchement empiriques que divers physiciens avaient proposées, il n'y avait qu'un seul recours possible, l'expérimentation.

Or celle-ci est rendue particulièrement difficile d'une part par

(¹) Tome XXII, Mémoire 2, 1876.

l'instabilité du phénomène de la surchauffe, et d'autre part par l'imprécision des prises de température d'un milieu de vapeur surchauffée.

La série d'expériences entreprise par MM. Knoblauch et Jakob doit compter parmi les plus importantes, tant au point de vue des frais considérables d'installation qu'au point de vue de l'étendue des phénomènes observés. Ces expérimentateurs, dont les recherches se sont prolongées jusqu'en ces derniers temps, ont tout d'abord employé des thermomètres à mercure. La méthode consiste à communiquer électriquement des calories à de la vapeur surchauffée et à mesurer l'élévation de température produite. Ce qu'ils mesurent ainsi, c'est plutôt le coefficient moyen de chaleur spécifique de la vapeur surchauffée entre les deux températures T et T′ observées. Une méthode de ce genre serait d'autant plus exacte que T et T′ seraient plus rapprochées ; or les écarts étaient ici assez considérables pour donner prise à la critique. En outre, ainsi qu'on le dira plus loin, l'emploi des thermomètres à mercure donne lieu à de sérieuses objections.

4. M. Armand Duchesne à son tour, et par une méthode nouvelle des plus ingénieuses, s'est attaqué à ce problème difficile.

Voici le principe de sa méthode. On sait que, lorsque dans une machine à vapeur à piston et cylindre l'orifice d'échappement se ferme, il reste encore dans le cylindre une portion de fluide emprisonnée ; sur cette portion résiduelle de fluide s'exerce une compression qui précède immédiatement l'admission anticipée de la nouvelle vapeur.

Quel est l'état de la vapeur résiduelle au moment précis où, emprisonnée par suite de la fermeture de l'orifice d'échappement, elle va subir la compression ? La réponse à cette question a longtemps divisé les physiciens. Zeuner et ses élèves tenaient qu'elle était saturée ; Hirn et les siens soutenaient, au contraire, qu'elle était surchauffée.

C'est parce qu'il subsiste de l'eau liquide dans le cylindre, disait Zeuner, que la nouvelle vapeur accédante, au moment de l'admission anticipée, perd des calories, employées à volatiliser cette eau liquide.

Nullement, répondait Hirn ; la vapeur résiduelle est surchauffée,

et si la vapeur accédante perd des calories, c'est au contact du fer de la paroi. Cette querelle entre les partisans de l'action de l'eau liquide et ceux de l'action du fer dura de longues années et, de fait, des expériences décisives n'étaient pas faciles à réaliser. Mais ce que l'expérience directe ne pouvait atteindre, une discussion sagace de diagrammes soigneusement pris de la période de compression, a permis à Georges Duchesne, regretté frère de M. Armand Duchesne, de l'obtenir. L'étude approfondie, menée avec critique, d'un certain crochet que présente le diagramme au cours de la compression a fourni à Georges Duchesne les éléments suffisants pour se prononcer en faveur de l'existence de la surchauffe dans la vapeur résiduelle au début de la compression.

C'est ce résultat décisif de son frère que M. Armand Duchesne a pris comme base de son étude.

En réalisant de longues compressions allant jusqu'à $\frac{9}{10}$ de la course, dans le moteur expérimental du laboratoire de l'Université de Liége, M. Armand Duchesne avait un terrain tout trouvé pour l'étude expérimentale de la vapeur surchauffée.

5. Mais ce n'était pas tout d'avoir le terrain, il lui fallait encore l'instrument d'études. Or, si les diagrammes soigneusement relevés lui donnaient les valeurs simultanées de la pression et du volume, il lui restait à déterminer les valeurs concomitantes de la température, de façon à être à même d'établir l'équation qui, pour la vapeur surchauffée, relie la pression p, le volume spécifique v et la température t, équation appelée souvent l'*équation de compressibilité*.

En ce qui concerne le rapprochement avec les gaz parfaits, M. Armand Duchesne a fait une remarque capitale, qui paraît avoir échappé aux expérimentateurs antérieurs : c'est que, si la vapeur surchauffée n'est pas assimilable à un gaz parfait, elle s'en rapproche cependant par un point, à savoir sa mauvaise conduction. Il en résulte qu'un thermomètre à mercure, dont le réservoir offre une masse appréciable, lorsqu'il est plongé dans un milieu de vapeur surchauffée, se trouve entouré d'une couche de cette vapeur qu'il refroidit, sans que le reste de la vapeur, étranger à cette couche, intervienne utilement pour y maintenir la température générale. Si l'on joint à cet inconvénient la lenteur avec laquelle un thermomètre à mercure se met en équilibre de tempé-

rature, on conçoit que cet instrument se soit montré peu propre aux recherches spéciales de M. Armand Duchesne.

Aussi l'auteur a-t-il adopté un thermomètre thermo-électrique à couple platine-argent, dont la masse réduite permet des indications instantanées, tout en échappant aux critiques tenant à la mauvaise conduction de la vapeur surchauffée. L'importance de la question a conduit l'auteur à faire une comparaison approfondie du thermomètre à mercure et du sien, qu'en raison de sa précision exceptionnelle il a pu appeler justement un *hyperthermomètre*.

Les graphiques qui traduisent les résultats de ses observations mettent nettement en évidence ce fait, dont on peut du reste *a priori* se rendre compte, que les divergences du thermomètre à mercure vont en s'accentuant à mesure que la température de surchauffe augmente, tandis qu'une augmentation de la pression aurait au contraire pour effet d'atténuer ces erreurs.

6. Dans le Chapitre II, l'auteur s'est proposé de rechercher la loi de compressibilité de la vapeur surchauffée. Après avoir rappelé les formules proposées successivement par Zeuner, Tumlirz, Weyrauch, Callendar, il montre comment l'étude de la compression, dans des conditions variées, permet d'instituer des expériences propres à reconnaître cette loi. Il suffit, pour cela, d'accompagner chaque diagramme de prises de températures correspondant chacune à un point de celui-ci. A cet effet, le courant qui se produit dans l'hyperthermomètre est lancé à un instant donné, pendant un dixième de seconde, dans un galvanomètre balistique dont la déviation fournit la température moyenne pendant ce dixième de seconde, suivant une tare soigneusement établie. On réalise cette condition au moyen de la chute d'un poids soutenu par un électro-aimant, chute qui dure exactement un dixième de seconde. Or, à la vitesse de 30 tours par minute, un dixième de seconde correspond à un vingtième de tour de la machine ; il suffit donc de provoquer la chute du poids au début de chaque vingtième de tour pour avoir la température moyenne pendant tous les vingtièmes successifs.

La crosse elle-même de la machine servait du reste à rompre le courant dans l'électro-aimant et à faire tomber le poids au temps voulu.

Il est clair que si la machine tourne à une autre allure, il suffira, pour obtenir un résultat analogue, de régler la chute du poids de façon qu'au lieu de durer un dixième de seconde, elle dure un temps approprié. Le principe est toujours le même.

Nous ne saurions entrer ici dans le détail des essais et des précautions minutieuses prises par l'auteur, non plus que dans les discussions très serrées dont il accompagne chaque série d'expériences.

Notons simplement les résultats qui se traduisent dans les propositions suivantes :

Pour une pression donnée, la vapeur d'eau surchauffée obéit à la loi de Gay-Lussac à partir d'une certaine limite de température; c'est-à-dire qu'à pression constante le produit pv est proportionnel à la température absolue T. Au-dessous de cette limite, jusqu'à la température de saturation, la loi de compressibilité est représentée par une courbe qui a un point d'inflexion, et dont la forme répondrait assez bien à une équation complète du troisième degré.

Du reste, la température à partir de laquelle la vapeur suit la loi de Gay-Lussac varie avec la pression. L'auteur a construit la courbe qui représente cette dépendance, et qu'il est intéressant de rapprocher de la courbe de saturation construite sur le même dessin. Les deux lignes s'écartent l'une de l'autre, mais plus rapidement aux basses pressions qu'aux hautes, en sorte même que, pour celles-ci, la différence des températures tend à devenir constante.

En somme, si une vapeur surchauffée se trouve à une température assez élevée au-dessus de son point de saturation, son assimilation à un gaz parfait sera d'autant plus légitime que sa pression sera plus élevée.

7. L'auteur ne s'en est pas tenu, du reste, au mode expérimental précédent. Si l'on part d'un kilogramme d'eau à zéro sous une pression p donnée, on sait que l'on appelle *chaleur totale* de la vapeur saturée et sèche le nombre de calories qu'il aura fallu fournir pour réduire sous la pression p ce kilogramme d'eau à l'état de vapeur saturée et sèche; cette chaleur totale λ est la somme de la chaleur q du liquide et de la chaleur de vaporisation r : si Θ est la température de saturation sous la pression p, on

peut se proposer (et c'est là précisément la pratique industrielle) de surchauffer la vapeur en la portant, toujours sous la pression p, de la température Θ à la température $T > \Theta$. Les nouvelles calories à fournir auront pour valeur $\int_{(\Theta)}^{T} C' dT$, où C' est le coefficient de chaleur spécifique sous pression constante. Ces calories, s'ajoutant aux λ calories précédentes, constituent la chaleur totale λ' de la vapeur surchauffée,

$$\lambda' = q - r + \int_{(\Theta)}^{T} C' dT.$$

M. Armand Duchesne a institué une méthode calorimétrique directe pour la mesure de λ', dans laquelle il emploie concuremment le thermomètre à mercure et son hyperthermomètre.

La formule qui précède montre du reste que l'étude de λ' est connexe de celle de C', car, en faisant abstraction des $q + r$, ou en construisant la courbe $\lambda' - \lambda$, C' est précisément le coefficient angulaire de la tangente à cette isobare. Comme, d'un autre côté, la Thermodynamique générale apprend que C' n'est point indépendante de la loi de compressibilité, les résultats obtenus plus haut par l'auteur doivent lui fournir des occasions de concordance, c'est-à-dire des vérifications, dans cette nouvelle recherche. On se rend compte du degré de sûreté que ce concours de deux méthodes donne aux investigations de l'auteur, et il n'en est que plus intéressant de comparer ses résultats à ceux que d'autres avaient déjà obtenus avant lui.

Les graphiques de C' (courbes isobares pour chacune desquelles p reste constant et C' variable avec T) diffèrent à certains égards de ceux que Knoblauch et Jakob avaient déjà obtenus, et l'auteur trouve l'origine de ces divergences dans celles que fournissent les mesures thermométriques faites avec le thermomètre à mercure et avec l'hyperthermomètre.

Notamment, les minima que MM. Knoblauch et Jakob avaient trouvés ne semblent pas exister, non plus que la croissance considérable de C' avec la pression, dans le voisinage de la courbe de saturation.

Du reste, dans de récents travaux, MM. Oskar Knoblauch et Hilde Mollier ont abandonné le thermomètre à mercure pour le thermomètre électrique.

8. Comme on le voit, le travail de M. Armand Duchesne constitue une belle contribution à une difficile question de Physique qui intéresse également la Science pure et la Science appliquée. Il fait honneur au laboratoire fondé à Liége par M. Dwelshauwers Déry, et actuellement dirigé par M. Hubert, où l'auteur a heureusement trouvé l'agencement nécessaire à ses délicates expériences. Il montre très significativement combien les praticiens auraient tort de se désintéresser de la Science pure et quelles ressources la technique peut trouver dans une convenable adaptation à ses besoins de l'esprit de critique et de précision.

G. Kœnigs.

STUDY (E.). — Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Erstes Heft : ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. 1 vol. in-8°, IV-126 pages, mit 9 Figuren. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1911.

Le premier Fascicule des *Vorlesungen* de M. E. Study est consacré à la représentation des points imaginaires d'un plan à l'aide de couples de points réels de ce plan. Il s'agit donc d'une question déjà ancienne et qui a fait l'objet de nombreux travaux : M. E. Study cite notamment ceux de M. von Staudt qui représentent un point imaginaire d'un plan par une involution elliptique sur une droite réelle D du plan, associée à un sens de parcours défini sur D. Ce mode de représentation conduit d'ailleurs à des constructions fort compliquées : il est beaucoup plus simple de représenter un point imaginaire (ξ, η) par les deux points réels w et z qui se trouvent sur les deux droites isotropes passant par (ξ, η) [1]. Associons à ces points les deux autres sommets W et Z du carré Ω, de centre ω, admettant w et z comme sommets opposés ; nous obtiendrons ainsi, dans les couples (w, z) et (W, Z), ce que M. E. Study appelle la *première* et la *seconde image* du point (ξ, η) [2]. C'est en se proposant d'obtenir une représentation

[1] Cette représentation peut s'étendre aux points imaginaires de la sphère (*Cf.* p. 121).

[2] La seconde représentation du point (ξ, η) peut aussi s'étendre aux points de l'espace à trois dimensions (*Cf.* p. 121-122).

invariante par rapport aux déplacements euclidiens que M. E. Study a été naturellement conduit à ce mode de figuration des points imaginaires : il n'est donc pas surprenant que, dans la solution d'un problème d'énoncé aussi élémentaire, l'Auteur ait été précédé, comme il le rappelle lui-même, par Laguerre, Paulus, Mouchot et M. Tarry [1]. Mais il appartenait en propre au savant et ingénieux professeur de Bonn d'exposer systématiquement cette double méthode de représentation avec toutes ses conséquences. J'insisterai notamment sur la suivante :

Avec M. E. Study appelons *pivotement* (Schwenkung) la rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de ω qui substitue les points W, Z aux points w, z. Le pivotement effectue le passage d'une représentation à l'autre ; il jouit de propriétés cinématiques et analytiques élégantes (p. 13-24), telle la suivante : si la transformation $z \to w$ est *proprement* conforme, il en est de même, en général, de la transformation $Z \to W$ déduite de la première par pivotement (p. 15), et encore : si la transformation $w \to z$ conserve les aires *au signe près* (uneigentlich-flächentreu), il en est de même, en général, de la transformation $Z \to W$ déduite de la première par pivotement (p. 17). Ces résultats acquièrent une grande importance dans la représentation des courbes planes analytiques qui est le but principal de M. E. Study.

Soit Γ une courbe analytique (plane) ; on doit la regarder comme une multiplicité à deux dimensions (réelles), ou *membrane* suivant l'expression de M. E. Study (p. 24). Lorsque le point (ξ, η) décrit Γ, les couples de points w, z et W, Z décrivent tout ou partie du plan : on conçoit ainsi que la courbe Γ établit, par l'intermédiaire de l'une et l'autre représentation, deux transformations du plan en lui-même. M. E. Study appelle ces deux transformations la *première* et la *seconde image* de la courbe Γ. En général, la première image d'une courbe Γ est une transformation $z \to w$ *improprement* conforme ; la seconde est, en général, une transformation $Z \to W$ qui conserve les aires (en grandeur et en signe) (p. 48). C'est ainsi que M. E. Study étudie les droites (réelles,

---

[1] Rappelons un travail de M. P. Appell qui représente les points imaginaires d'un plan à l'aide des points de l'espace à trois dimensions (*Archiv. des Math. und Phys.*, 61 Teil, p. 351-360).

de directions réelles, isotropes et quelconques), le cercle (p. 25-38), puis passe aux courbes analytiques quelconques et à leurs singularités (p. 38-104). L'espace nous manque pour rendre compte de tous les résultats de M. E. Study ; nous nous bornerons à citer l'étude des courbes rapportées à l'arc $s = \sigma + i\tau$ pris pour paramètre. Les courbes $\sigma =$ const. et $\tau =$ const. du plan (z) ou, suivant l'expression de M. E. Study, les *fils* $\sigma =$ const. et $\tau =$ const. de la membrane $\xi = \xi(\sigma + i\tau)$, $\eta = \eta(\sigma = i\tau)$ forment un réseau isotherme dont l'étude conduit l'Auteur à d'élégants résultats (p. 66-84).

L'Ouvrage de M. E. Study se termine par deux Chapitres dont le premier développe un théorème sur le prolongement analytique des fonctions harmoniques de deux variables [1] (p. 105-113) : soient $u = \varphi(x, y)$ et $v = \psi(x, y)$ deux fonctions harmoniques conjuguées ; attribuons à x et y des valeurs complexes et cherchons si la variation de x et de y à l'intérieur du domaine à quatre dimensions ainsi défini ne pourra pas conduire à un couple de de fonctions harmoniques conjuguées (réelles) différent du premier. La réponse est négative comme le montre M. E. Study.

Enfin, le dernier Chapitre (p. 113-122), conclusion de l'Ouvrage, renferme diverses applications des représentations de M. E. Study à la théorie des membranes considérée dans ses rapports avec les transformations analytiques, notamment avec les transformations conformes. L'Auteur traite également des rapports des théories précédentes avec les congruences de normales et la Géométrie projective générale, et termine en proposant d'intéressants problèmes à résoudre ; à cet égard, les Leçons de M. E. Study constituent un excellent guide : d'une lecture facile, elles sont, en outre, d'un intérêt soutenu, grâce à la variété des théories qu'elles évoquent et des aperçus qu'elles laissent entrevoir.

René Garnier.

---

[1] Cf. *Math. Ann.*, t. LXIII (1906) et t. LXVI (1908).

MULLER (Emil). — Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Zweiter Band. Erstes Heft, mit 140 Figuren in Text. 1 vol. in-8°, VII-129 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1912.

Dans la Préface, M. Muller s'excuse de ne donner, 4 ans après la publication du premier Volume, qu'une partie du second. Il invoque les exigences de son enseignement et des examens, l'engagement qu'il a pris de fournir des articles pour l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, et un Rapport étendu à la Commission internationale de l'enseignement des Mathématiques dont il fait partie. Tous travaux qui marquent la compétence de l'auteur et recommandent son Livre à notre attention.

Rappelons que l'Ouvrage du Dr Müller est divisé en plusieurs Parties.

Les deux premières Parties : *Représentation au moyen de projections orthogonales*, *Étude des courbes et des surfaces en projection orthogonale*, font l'objet du Tome I, qui a été analysé dans le numéro de septembre 1909 du *Bulletin*. Le fascicule qui vient de paraître contient les deux Parties suivantes.

La troisième Partie traite des *projections cotées*. Elle comprend trois Chapitres.

Le *Chapitre I* est consacré à la représentation des éléments des figures : point, droite et plan, et aux problèmes qui résultent de la combinaison des droites et des plans : droites et plans parallèles, droites et plans perpendiculaires, intersection de droites et de plans, avec trois applications pratiques : plate-forme rectangulaire sur un terrain uni incliné; bassin d'élargissement d'un canal d'écoulement des eaux sur un versant plan; fossé à fond elliptique horizontal et à talus réglés, établi aussi sur un versant plan.

Le *Chapitre II* traite de la surface du sol et de la résolution des problèmes qui s'y rapportent : courbes de niveau, tracé rapide des courbes intercalaires au moyen d'une bande de papier divisé; tracé des lignes de pente comme trajectoires orthogonales des lignes de niveau; construction du plan tangent en un point; intersection de la surface du sol avec une ligne droite ou courbe. Il

contient l'intersection de la surface du sol et d'une surface d'égale pente qui passe par une courbe donnée, question qui se présente souvent dans la pratique, et trois applications usuelles intéressantes : tracé d'une route sur un terrain représenté en courbes de niveau, avec déblai, remblai et fossé; question analogue avec rampe d'accès à la route; établissement d'une voie ferrée au moyen des profils en travers, sur un terrain défini par ses courbes de niveau. Ce Chapitre se termine par l'étude de quelques points remarquables de la surface du sol : sommet, fond et col, avec la représentation des courbes de niveau et des lignes de pente aux environs de ces points.

Le *Chapitre III* s'occupe de la représentation des toits et des questions que l'architecte peut avoir à résoudre dans ses projets de construction.

L'idée d'avoir incorporé à la Géométrie cotée cette partie du bâtiment me semble assez logique : la surface d'un toit présente, en effet, le caractère des surfaces topographiques, de n'être rencontrées qu'en un seul point par une verticale. Dès qu'un toit est un peu compliqué, sa projection verticale devient confuse, tandis que sa projection horizontale se déroule avec la plus grande clarté. Cela n'empêche pas l'auteur de faire usage de projections verticales auxiliaires ou de profils lorsqu'il le trouve utile. C'est ainsi qu'il étudie, en combinant les deux méthodes, les toits simples, les toits composés ou juxtaposés et les toits qui se pénètrent.

Dans l'établissement d'un toit, le contour de la projection horizontale est presque toujours imposé, et, si l'on veut s'assujettir à n'avoir que des faces planes pour les égouts, certaines formes de ce contour conduisent à des lignes de faîte inclinées. Pour éviter l'effet désagréable que produiraient ces lignes, l'auteur indique l'emploi d'une surface gauche à plan directeur horizontal, et, en particulier, un paraboloïde hyperbolique, pour former la surface de l'un des égouts de long pan du toit.

La QUATRIÈME PARTIE traite de l'*axonométrie normale*. L'auteur avait déjà indiqué dans le Tome I l'importance qu'il attache au dessin axonométrique. Il insiste ici sur un mode de représentation très répandu (au moins en Allemagne; en France et en Belgique, on emploie de préférence la perspective cavalière) et d'une com-

préhension facile. La détermination des contours apparents des surfaces de révolution et de leurs ombres est plus aisée en axonométrie normale qu'en axonométrie oblique. En particulier, le contour apparent d'une sphère est représenté par un cercle dans le premier cas et par une ellipse dans le second. La représentation de solides limités par des surfaces planes, cylindriques ou coniques, est analogue dans les deux méthodes. Cette Partie est divisée en deux Chapitres.

Le *Chapitre I* comprend les principes de la représentation d'un corps en axonométrie normale. Dans un objet usuel, on distingue, en général, trois directions principales rectangulaires deux à deux, formant par suite un trièdre trirectangle. Les projections de l'objet sur les faces de ce trièdre constituent ses figures géométrales dans la méthode de Monge. Il ne s'agit pas ici de construire ces figures, mais de donner une représentation qui fasse image. A cet effet, on projette la figure et le trièdre qui lui est invariablement lié sur un plan qui sera le tableau, et l'on détermine chaque point de la figure au moyen de la projection du contour de ses coordonnées. Cette projection s'obtient aisément au moyen de trois échelles relatives aux trois axes.

Des objets usuels sont représentés dans ce mode avec leurs ombres, en partant des figures géométrales : un piédestal et un assemblage de charpente composé d'un pilier supportant deux traverses rectangulaires, dont l'une est soutenue par des aisseliers.

M. Muller examine ensuite le choix de la position du trièdre et les simplifications qu'apporte dans le dessin l'emploi d'axes également inclinés sur le tableau. Il donne l'exemple bien connu, mais intéressant, de la projection isométrique d'un cube.

Le *Chapitre II* comprend l'étude des constructions faites directement sur le tableau et son application à la résolution des problèmes fondamentaux et à la représentation des corps à surface courbe. Entrons dans quelques détails.

Un point de l'espace est défini sur le tableau par son image axonométrique et celle de sa projection orthogonale sur un plan auxiliaire. Avec cette représentation, l'auteur détermine l'intersection d'une droite et d'un plan, l'éclairement d'un plan, les ombres d'un prisme.

Il montre, dans une remarque intéressante, que les deux projec-

tions d'une figure, dans la méthode de Monge, peuvent être regardées comme les représentations axonométriques d'une autre figure, quand on prend pour tableau le plan vertical et comme plan auxiliaire un plan passant par la ligne de terre. Si ce plan auxiliaire est le second bissecteur, les deux figures sont en affinité, le plan d'affinité étant le second bissecteur [1]. Il en résulte que les problèmes de position se résolvent, en axonométrie normale, par des tracés analogues à ceux des projections ordinaires.

Dans la résolution des problèmes de mesure : distance de deux points, distance d'un point à un plan, détermination de la grandeur d'un angle et de sa bissectrice, etc., l'auteur utilise une projection auxiliaire de profil.

La représentation des cônes et des cylindres est précédée de la détermination des ellipses projections de cercles situés dans les faces du trièdre de référence, et appliquée aux constructions que l'on rencontre en architecture. A cet effet, l'auteur fait une digression sur la taille des pierres qui lui permet de faire la perspective axonométrique d'une voûte d'arêtes appareillée. Suivent deux autres applications : ombres d'un ouvrage d'architecture en saillie sur un mur; rail de chemin de fer sur sa traverse, avec ombres.

La représentation de la sphère donne lieu à un exercice sur la construction de parallèles et de méridiens de la Terre, ainsi que d'un grand cercle tangent aux tropiques; puis à la représentation d'une niche sphérique appareillée, avec ses ombres.

Pour la représentation des surfaces de révolution autres que la sphère, M. Muller utilise une projection de profil, le tableau étant vertical et l'axe de révolution de profil. Deux exemples, empruntés à l'architecture, représentent : l'un un vase amphore grec sur un pied carré, l'autre un chapiteau de colonne dorique.

Il termine par la représentation du tore, dont il détermine la courbe de contour apparent au moyen de sphères inscrites. Les différentes formes de la projection de cette courbe qui est, comme on sait, une courbe parallèle à une ellipse, composée de deux

---

[1] Dans la première édition (1897) de mon *Cours de Géométrie descriptive* après avoir montré l'invariabilité du second bissecteur (note, page 223), j'avais signalé la correspondance homologique qui existe entre les deux projections d'une figure plane (exercice 3, p. 225).

branches distinctes, sont examinées et discutées suivant la grandeur du rayon du cercle méridien et l'inclinaison de l'axe du tore. La projection de la même courbe sur un plan parallèle à l'axe du tore est tout entière formée de points doubles apparents, et se réduit par conséquent au 4e degré. L'auteur donne une construction très simple de cette projection, au moyen d'une correspondance entre les points de la courbe et les points du cercle méridien parallèle au plan de projection.

Dans une remarque intéressante, il généralise cette correspondance, qui devient une affinité quadratique.

L'ensemble de ce fascicule présente les qualités du premier Volume : de nombreuses applications pratiques présentées dans des figures nettes et appuyées sur une bonne théorie.

C. Rolbaudi.

GALLE (A.). — Mathematische Instrumente. Mit 86 Abbildungen und Figure (*Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende*, herausgegeben von E. Jahnke, 15). 1 vol. in-8, vi-187 p. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1912.

Ce Volume fait partie d'une collection d'Ouvrages de Mathématique et de Physique, à l'usage des ingénieurs et des étudiants, publiés sous la direction de M. Jahnke. Il est consacré à la description, la théorie et l'historique des divers appareils pouvant servir, soit à faciliter les calculs, comme le font les différents types de règles à calcul, soit à remplacer des opérations de calcul par des opérations d'un autre genre, comme le font les machines à calculer, les curvimètres, les planimètres et les analyseurs harmoniques. En somme, il n'est question, dans ce Livre, que des appareils se rapportant au calcul, à l'exclusion des systèmes articulés, qui ont surtout des applications géométriques ou mécaniques.

La première règle à calcul, celle de Gunter (1581-1626), est connue des marins sous le nom de *Gunter's scale* ou de *Gunter's line* : c'était un simple prisme, portant sur ses faces des échelles logarithmiques. Elle fut perfectionnée par Seth Partridge (1650), qui imagina la disposition, bien connue maintenant, consistant à

faire glisser dans une coulisse une réglette; puis par Mannheim (1851) qui, au moyen du *curseur*, permit d'établir la correspondance entre les points d'échelles parallèles [1].

Il y a un très grand nombre de règles à calcul pour des usages spéciaux, usages commerciaux, usages tachymétriques (avec échelles donnant sin α, cos α, cos α^2) etc. M. Favaro, en 1879, comptait déjà 44 types de règles à calcul.

On peut rattacher aux règles à calcul des instruments d'une autre forme, où l'échelle logarithmique est disposée, non plus le long d'une droite, mais le long d'une circonférence d'une hélice ou d'une spirale. M. Galle signale un assez grand nombre de ces instruments, tels que le disque à calcul de Sonne, l'hélice à calcul de Fuller, etc.

Après avoir cité la machine arithmétique de Blaise Pascal, l'additionneur de Roth (1843), l'*Adder* de Webb (1868), etc., M. Galle donne quelques détails sur la machine de Thomas (de Colmar), directeur d'assurances à Paris (1821), machine perfectionnée par Burkhardt (1878); puis il décrit, avec figures à l'appui, les machines dénommées *Mercedès-Euklid* et *Gauss*, construites par Ch. Hamann, l'arithmomètre de Odhner, les machines de Bollée et de Otto Steiger, et enfin la machine à différences de Ch. Babbage. Cette simple énumération, qui est d'ailleurs très incomplète, car M. Galle parle de bien d'autres machines, donne une idée de la variété d'appareils dont il est question.

M. Galle mentionne ensuite un certain nombre d'appareils spéciaux, dans lesquels une roulette entre comme élément essentiel; en particulier, l'appareil à fonctions trigonométriques et hyperboliques de M. Ch. Hamann, qui comporte en plus des verniers, que les Allemands appellent *Nonius*. Un court Chapitre, deux pages seulement, est consacré aux *différentiateurs*. Il peut être bon de faire remarquer que l'utilité pratique de ces derniers appareils est douteuse. M. Bouasse dit, en effet, dans son *Cours de Mathématiques générales* (p. 212), qu'il est impossible d'avoir un appareil de ce genre qui ne soit pas illusoire.

Une grande partie du Volume de M. Galle, les deux cinquièmes,

---

[1] M. d'Ocagne fait remarquer (*Encyclopédie des Sc. math.*, t. I, 4e vol., p. 412) que le curseur semble avoir déjà été utilisé avant Mannheim.

est consacrée surtout à des instruments servant à la mesure de grandeurs géométriques, longueurs ou surfaces, ou à divers problèmes se rapportant à des figures géométriques. Il y a peu de choses à noter sur les curvimètres, dont le principe, comme le fait remarquer M. Galle, a été utilisé pour la première fois par le médecin français Fernel, vers 1525, lorsque celui-ci a évalué, pour obtenir la longueur d'un arc de méridien, la longueur d'une route en comptant le nombre de tours effectués par la roue d'une voiture.

Les planimètres sont extrêmement nombreux, et d'ailleurs construits d'après des principes très variés. On retrouve parmi ces principes ceux qui servent de bases aux différentes formules permettant d'évaluer une aire, soit approximativement, soit exactement. Certains d'entre eux (planimètres de Oldendorp, de Mönkermoller, de F. Günther) se rattachent à des formules telles que les formules classiques de Simpson ou de Poncelet; d'autres (planimètres de Hofmann, de Gengloff et de Schlesinger), à la transformation élémentaire qui permet de passer d'un polygone quelconque à un triangle de surface équivalente; d'autres enfin (planimètres de Gonella, d'Amsler, etc.), aux formules permettant d'évaluer les aires au moyen d'intégrales définies relatives à divers systèmes de coordonnées. Certains sont assez compliqués, comme les planimètres de Hohmann-Coradi; d'autres sont très simples, comme le planimètre du capitaine danois Prytz (1886), qui se compose d'une simple tige, courbée deux fois à angle droit, et terminée à un bout par une sorte de hachette, à l'autre par une pointe mousse. Certains appareils analogues aux planimètres servent à déterminer des moments statiques et des moments d'inertie.

Un Chapitre de l'Ouvrage de M. Galle est consacré spécialement aux appareils connus sous le nom d'*analyseurs harmoniques* (*analysatoren*). Ces appareils permettent d'évaluer la somme d'un certain nombre de termes d'une série de Fourier, ou inversement de déterminer les coefficients de la série de Fourier qui représente une fonction dont un certain nombre de valeurs ont été déterminées expérimentalement. M. Galle consacre quelques pages à décrire les analyseurs harmoniques de Yule, de Le Conte, de William Thompson (Lord Kelvin), de Henrici-Coradi, de Sharp, de Sommerfeld et Wiechert, de Michelson et Stratton, et enfin l'appareil de Terrada, pour l'analyse et la synthèse des oscillations.

Le dernier Chapitre est consacré aux intégrales (appareils d'Abdank-Abakanowicz, 1878, de Boys, d'Ernesto Pascal, 1909) et enfin aux appareils ayant pour objet l'intégration d'équations différentielles (appareils de Lord Kelvin, 1876, de Torrès, 1895, de Petrovitch, 1897). Il se termine enfin par la description d'appareils dus à un savant français L. Jacob, auteur d'un Ouvrage intitulé : *Le Calcul mécanique*, qui fait partie de la *Bibliothèque de Mathématiques appliquées*, dirigée par M. d'Ocagne. M. Galle a ajouté à la fin de son Ouvrage l'indication de près de 120 Ouvrages ou Articles traitant des instruments mathématiques, sans compter un certain nombre d'autres références bibliographiques données au cours de l'Ouvrage.

Ch. Bioche.

MÉLANGES.

SUR UNE FORME DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DANS LE VOISINAGE DE CERTAINES VALEURS SINGULIÈRES;

Par M. Henri DULAC.

(*Suite et fin.*)

4. *Intégrale de l'équation* (2). — Si nous considérons maintenant l'équation

$$x^{\alpha} p + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x} + y^{\beta} q + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

et si l'on cherche à vérifier cette équation par un développement

$$F = x^{q} y^{p} + \ldots,$$

on voit immédiatement que ce développement, s'il existe, peut se mettre sous la forme

$$F = x^{q} y^{p} G, \qquad G = 1 + \ldots.$$

Si l'on cherche à déterminer les termes de G, on est en général arrêté dans la détermination du terme en $x^q y^p$. Supposons plus généralement qu'on puisse calculer les termes de G dont le degré est inférieur à $2(q+p)$ et qu'on soit arrêté par une impossibilité dans la détermination du terme en $x^{rq} y^{rp}$.

Si nous posons

$$(17) \qquad x = x_1^p, \qquad y = y_1^q,$$

l'équation (16) devient

$$(18) \qquad x_1(1 + \ldots)\frac{\partial F}{\partial x_1} - y_1(1 + \ldots)\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$$

Cette équation n'admet pas de solution de la forme

$$F = x_1^{pq} y_1^{pq} K, \qquad K = 1 + \ldots.$$

Nous pourrons déterminer les termes de K dont le degré est inférieur à $2rpq$, mais nous serons arrêtés par une impossibilité dans la détermination du terme en $x_1^{rpq} y_1^{rpq}$, puisque K se déduit de G par le changement de variable (17). Il résulte de là, d'après la propriété 2° signalée à la fin du n° 2, que si l'on cherche à déterminer pour l'équation (18) une solution de la forme

$$F = x_1 y_1 L, \qquad L = 1 + \ldots,$$

on pourra déterminer les termes de L dont le degré est inférieur à $2rpq$, mais on ne pourra déterminer le terme en $(x_1 y_1)^{rpq}$. L'équation (18) admettra donc une solution de la forme

$$(19) \qquad \frac{x_1^{pq} y_1^{pq}}{1 - f(x_1, y_1) + x_1^{pq} y_1^{pq} \log x_1^q y_1^p};$$

f vérifie une équation tout à fait analogue à (12) et que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} & y_1 f_{y_1} - x_1 f_{x_1} \\ & = 2 x_1^{pq} y_1^{pq} \Pi(x_1^p, y_1^q) + 2rpq - 2rpq f - x_1 f_{x_1} - y_1 f_{y_1} - 3 \log x_1^q y_1^p). \end{aligned}$$

Les termes connus de cette équation ne contenant que des puissances de x_1^p et de y_1^q, il paraît évident que le développement f ne contiendra aussi que des puissances de ces deux expressions. Pour le voir plus clairement, désignons par k et h des nombres

différents de 1 vérifiant respectivement les équations $k^p = 1$ et $h^q = 1$. Si nous changeons x_1 en kx_1 et y_1 en ky_1, nous voyons que $f(kx_1, hy_1)$ vérifie la même équation que la fonction $f(x_1, y_1)$. Or, nous avons vu que tous les termes d'un développement f vérifiant une équation de la forme (12) sont déterminés d'une façon unique, abstraction faite du terme en $x^r y^r$ qui reste arbitraire; nous avons donc, en désignant par l une constante,

$$f(kx_1, ky_1) = f(x_1, y_1) - l x_1^{rpq} y_1^{rpq}.$$

Cette identité n'est possible que si f ne contient que des puissances de x_1^p et de y_1^q.

En revenant aux variables primitives x et y, nous pouvons écrire

$$f(x_1, y_1) = \varphi(x, y)$$

et l'équation (16) admet la solution

$$F = \frac{x^{rq} y^{rp}}{1 - \varphi(x, y) - x^{rq} y^{rp} \log x^a y^b} \tag{20}$$

avec

$$a = \frac{a'}{p}, \qquad b = \frac{b'}{q}.$$

Dans la solution (11') nous n'avons jamais $a = b$, puisque d'après (14) on n'a jamais $\alpha = 0$. Dans la solution (11) nous n'aurons donc jamais $a' = b'$ et dans la solutions (20) jamais $ap = bq$.

Si nous voulons maintenant obtenir une solution de l'équation (2), de laquelle l'équation (16) a été déduite par le changement de variables (5) nous devons, pour faire le changement de variables inverse du changement (5), remplacer respectivement x et y par A et B, en prenant $A = x - g(y)$, et $B = y - f(x)$. *L'équation* (2) *a donc toujours une solution de la forme* (4).

5. Nous allons montrer par un exemple que le développement C qui figure dans (4) peut être *divergent*. Considérons l'équation

$$x(1 - x - xy)F'_x - y(1 - x - xy)F'_y = 0.$$

Nous cherchons à la vérifier par une solution de la forme

$$F = \frac{xy}{1 - f(x, y) - xy \log x^a y^b}.$$

Nous devons avoir, avec les notations employées pour l'équation (12)

$$(21)\quad xf'_x - yf'_y = \alpha xy + (x+xy)(xf'_x + yf'_y - 2f - 2 + \beta xy).$$

Soit $a_{nn}x^n y^n$ un terme de f pour lequel les exposants de x et y sont égaux. Démontrons que tous ces coefficients a_{nn} sont égaux pour $n > 1$. En effet, le premier membre de (21) ne contient aucun terme de la forme $x^n y^n$; ces termes doivent donc aussi disparaître dans le second membre. On a, par suite,

$$\alpha xy + xy\left[\beta xy - 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(2n-2)a_{nn}x^n y^n\right] = 0,$$

d'où

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 0, \qquad a_{nn} = 0, \qquad \text{pour} \qquad n > 1,$$

a_{11} reste arbitraire.

f ne contiendra pas non plus de termes $a_{mn}x^m y^n$ pour lesquels on ait $n > m$. En effet, si nous posons

$$f = f_1 + f_2 + f_3,$$

en désignant par f_i un polynome homogène et de degré i en x et y, nous avons, en identifiant les deux membres de (21),

$$f_1 = -2x, \qquad f_2 = x^2 - a_{11}xy,$$

et nous voyons que les termes de f_i sont semblables aux termes de l'expression

$$(i-1)xyf_{i-2} - (i-3)xf_{i-1};$$

f_1 et f_2 ne contiennent pas de termes en $x^m y^n$ pour lesquels on ait $n > m$; on voit ensuite de proche en proche qu'il en est de même de f_3 et de f_i quel que soit i.

Si nous posons

$$f = f_1 + f_2 + \varphi = -2x + x^2 + a_{11}xy + \varphi,$$

les termes de moindre degré dans φ seront du troisième degré, et nous aurons l'équation

$$x\varphi'_x - y\varphi'_y = 2x^2y - (x + xy)(x\varphi'_x + y\varphi'_y + 2\varphi).$$

Tous les termes $a_{mn}x^m y^n$ de φ sont à coefficients positifs. En

effet, on a toujours $m > n$ et un coefficient a_{mn} est fourni par une égalité de la forme

$$(m-n)a_{mn} = C_{mn},$$

où C_{mn} désigne un polynome à coefficients positifs formé avec les coefficients a_{ij} pour lesquels on a $i+j < m+n$. Les termes de moindre degré de φ se réduisant à $2x^2y$ et étant à coefficients positifs, on voit de proche en proche qu'il en sera de même de tous les termes de φ.

Nous ne pourrons que diminuer les coefficients de φ, si nous cherchons un développement g vérifiant l'équation

$$xg'_x - yg'_y = 2x^2y + xy(xg'_x + yg'_y - 2g).$$

Or, on voit immédiatement que g est de la forme

$$g = xh(xy), \qquad h(xy) = \alpha_1 xy + \alpha_2 x^2y^2 + \alpha_3 x^3y^3 + \ldots;$$

et h, qui est une fonction de la seule variable $u = xy$, vérifie l'équation différentielle

$$2u^2\frac{dh}{du} = h + hu - 2u.$$

On trouve, en cherchant les termes successifs de h,

$$h(u) = 2u[1 + u + 3u^2 + 3.5u^3 + \ldots + 3.5\ldots(2n-1)u^n + \ldots].$$

Ce développement est divergent quelque petit que soit u : le développement g et, *a fortiori*, φ seront donc divergents si petits que soient x et y [1].

6. Bien que le développement φ qui figure dans (20) ne soit pas toujours convergent, il me paraît intéressant de signaler une conséquence que l'on peut tirer de cette intégrale (20) lorsque φ est convergent. Nous pouvons, dans ce cas, après avoir mis par le changement de variables (5) l'équation (1) sous la forme (6),

---

[1] La divergence des développements que nous rencontrons est due à des causes analogues à celles étudiées par M. Remoundos (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVI).

écrire l'intégrale générale de (6)

$$\log x_1^a y_1^b + \frac{1 + \varphi(x_1, y_1)}{x_1^{qr} y_1^{qr}} = \text{const.}$$

Posons

$$x_1^a y_1^b = x'^a y'^b,$$

$$\frac{x_1^{qr} y_1^{pr}}{1 - \varphi(x_1, y_1)} = x'^{qr} y'^{pr},$$

ce qui nous donne

$$x_1 (1 + \varphi)^{-\frac{b}{r(ap - bq)}} = x',$$

$$y_1 (1 - \varphi)^{\frac{a}{r(ap - bq)}} = y'.$$

Au voisinage de $x = 0$, $y = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$, x' et y' s'expriment en fonction holomorphe de x et y et réciproquement. L'intégrale générale de l'équation (1) devient

$$(22) \qquad \frac{x'^{qr} y'^{pr}}{1 - x'^{qr} y'^{pr} \log x'^a y'^b} = \text{const.}$$

L'équation différentielle (1) devient par suite

$$(23) \qquad x'(pr + b x'^{qr} y'^{pq})\, dy' + y'(qr + a x'^{qr} y'^{pr})\, dx' = 0.$$

Telle est la forme à laquelle peut se réduire l'équation (1).

Montrons que, si l'on considère dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, *une solution quelconque de* (1), *on peut faire tendre x vers zéro de telle manière que y tende vers zéro.* Il suffit de montrer que les variables x' et y' qui figurent dans l'équation (23) peuvent tendre simultanément vers zéro.

Posons

$$x'^{qr} y'^{pr} = \frac{1}{z}, \qquad x'^a y'^b = e^u.$$

Nous avons, d'après (22),

$$z - u = \mathrm{K} = \text{const.},$$

$$(ap - bq) rq \log x' = -bq \log z + pqru = -bq \log z - pqrz - pqr\mathrm{K},$$

$$(ap - bq) rp \log y' = -ap \log z - pqru = -ap \log z - pqrz - pqr\mathrm{K}.$$

Si nous posons

$$\varepsilon = \frac{pqrz}{ap - bq}, \qquad \alpha = \frac{bq}{ap - bq}, \qquad \beta = \frac{-ap}{ap - bq}, \qquad \alpha + \beta = -1,$$

nous avons, en désignant par C_1 et C_2 deux constantes qui s'expriment au moyen de la constante arbitraire K

$$x'^{rq} = C_1 v^{\alpha} e^{v}, \qquad y'^{rp} = C_2 v^{\beta} e^{-v}.$$

Nous avons en désignant par α', α'', β', β'' des constantes réelles

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \qquad \beta = \beta' + i\beta'', \qquad \alpha' + \beta' = -1, \qquad \alpha'' + \beta'' = 0.$$

Nous pouvons, en changeant, si cela est nécessaire, v en $-v$, supposer que l'on $\alpha' \geqq \beta$.

Pour que x' et y' tendent simultanément vers zéro, il est nécessaire que $z = x'^{-qr} y'^{-pr}$ croisse indéfiniment; v doit également croître indéfiniment. Posons

$$v = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$P = \alpha' \log\rho + \rho\cos\theta - \alpha''\theta, \qquad Q = \beta' \log\rho - \rho\cos\theta - \beta''\theta.$$

Pour que x' et y' tendent simultanément vers zéro, il est nécessaire que, dans le plan de la variable complexe v, on puisse faire éloigner indéfiniment le point de coordonnées polaires ρ et θ, de telle manière que P et Q tendent vers $-\infty$, car nous avons

$$|x'^{qr}| = |C_1| e^{P}, \qquad |y'^{pr}| = |C_2| e^{Q}.$$

Prenons

$$\rho\cos\theta = \left(\frac{\beta' - \alpha'}{2} + h\right)\log\rho + k, \tag{24}$$

h et k étant deux constantes. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' \log\rho + \rho\cos\theta &= \left(-\frac{1}{2} + h\right)\log\rho + k, \\ \beta' \log\rho - \rho\cos\theta &= \left(-\frac{1}{2} + h\right)\log\rho - k. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Si nous avons

$$-\frac{1}{2} < h < \frac{1}{2},$$

ces deux expressions (25) tendront vers $-\infty$, lorsque ρ croît indéfiniment. Il nous suffit donc, pour faire voir que P et Q tendent vers $-\infty$, de montrer qu'on peut trouver, lorsque ρ grandit indéfiniment, des valeurs de θ vérifiant la relation (24) et restant finies.

La constante $\frac{\beta' - \alpha'}{2} + h$, que nous désignerons par l, peut être nulle; si elle n'est pas nulle, nous pouvons toujours la supposer positive, en changeant au besoin θ en $\theta + \pi$. La relation (24) s'écrit

$$\cos\theta = \frac{l \log \rho}{\rho} + \frac{k}{\rho}. \tag{26}$$

Si nous étudions la variation du second membre, lorque ρ varie de zéro à $+\infty$, nous avons immédiatement le tableau suivant :

ρ	0		$e^{\frac{l-k}{l}}$		$+\infty$.
$\frac{l \log \rho}{\rho} - \frac{k}{\rho}$	$-\infty$	croît	$l e^{\frac{k-l}{l}}$	décroît	0.

Il existe donc une valeur ρ_0 telle que, si ρ varie en croissant à partir de ρ_0, le second membre de (26) reste inférieur à l'unité. A une telle valeur de ρ correspond un angle θ compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$ et cet angle θ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque ρ croît indéfiniment.

Nous avons donc démontré qu'on peut, pour une solution quelconque de l'équation (1), faire tendre simultanément x et y vers zéro. Dans la loi adoptée pour exprimer la variation de θ en fonction de ρ figurent deux constantes arbitraires h et k. On peut adopter une loi de variation de forme différente et encore moins restrictive.

Désignons, en effet, par C la branche de courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation (26), branche le long de laquelle nous avons fait s'éloigner indéfiniment le point de coordonnées ρ et θ. Désignons par ω l'angle polaire d'un point de C correspondant à une valeur de ρ. Nous venons de voir que si, pour chaque valeur de ρ, on donne à θ la valeur de ω et si l'on fait éloigner indéfiniment le point de coordonnées ρ et θ, les expressions P et Q tendent vers $-\infty$. Il en sera encore de même lorsqu'on donne à θ une valeur telle que $\rho(\cos\theta - \cos\omega)$ reste fini. Il suffit pour qu'il en soit ainsi que, en désignant par m un nombre fixe, mais arbitraire, on ait

$$\rho\,|\theta - \omega| < m.$$

Donc, au lieu de prendre, pour chaque valeur de ρ, comme

affixe de c le point R de coordonnées ρ et ω situé sur C, nous pouvons prendre comme affixe de c un point M situé sur le cercle de centre O et de rayon ρ, ce point étant tel que l'arc de cercle RM soit inférieur à m.

Nous pouvons par suite dire que, si nous considérons une bande de largeur quelconque, mais fixe, entourant C, et si nous faisons éloigner indéfiniment à l'intérieur de cette bande le point de coordonnées polaires ρ et θ, *les valeurs correspondantes de x et y tendront simultanément vers zéro pour une solution quelconque de l'équation* (1).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Häfner (Philipp). — *Einführung in die Differential- u. Integralrechnung f. höhere Techniker.* Mit Anwendgn. aus den wichtigsten Gebieten der techn. Praxis zum Selbstunterricht geeignet. Gr. in-8, XII-564 p. avec 223 fig. Stuttgart, F. Enke. 16 m.; relié, 17 m. 20.

Hindrichs (Otto). — *Tabellen zur Berechnung v. Tagen, Zinszahlen u. Zinsen.* In deutscher, engl., französ., italien., russ. u. span. Sprache. In-8, XXI-188 p. Essen, Literatur-Verlag. Relié, 20 m.

Larminat (E. de). — *Topographie pratique de reconnaissance et d'exploration suivie de notions élémentaires pratiques de Géodésie et d'Astronomie de campagne.* 3e édition. 404 p. avec fig. et fascicule annexe contenant 1 modèle de carnet itinéraire, 6 tableaux modèles de calculs, 7 abaques, 2 tables numériques, 1 planisphère céleste. Paris, Charles Lavauzelle. 10 fr.

Low (D.-Allan). — *Practical geometry and graphics; with over* 800 *il. and over* 700 *exercises.* VI-448 p. New York, Longmans. 2 d. 50.

Smoley (Constantine). — *Smoley's Tables;* parallel tables of logarithms and squares, diagram for solving right triangles, angles and logarithmic functions corresponding to given bevels, common logarithms of numbers, tables of logarithmic and natural trigonometric functions, and others tables; for engineers, architects and students. 7e édition, rev. et augm- VI-I-329 p., diagr. New York, Mc Graw-Hill. 3 d. 50.

Osgood (W.-F.). — *Lehrbuch der Funktionentheorie.* (In 2 Bdn.) 1. Bd. 2. Aufl. (*Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.*) Neue Aufl. Gr. in-8, XII-766 p. avec 158 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 17 m.; relié, 18 m.

Wansborough (W.-Dyson). — *The ABC of differential calculus.* 3e édition, XII-148 p. New York, Van Nostrand. 1 d. 50.

Weber (Heinr.). — *Lehrbuch der Algebra.* Kleine Ausg. in 1 Bde. Gr. in-8, X-528 p. Braunschweig, F. Vieweg u. Sohn. 14 m.; relié, 15 m.

Rutherford (E.). — *Radioactive substances and their radiations.* In-8, 708 p. Cambridge, Univ. Press. 15 s.

Waals (J.-D. v. d.). — *Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht v. Systemen in gasförmig-flüssigen Phasen.* Nach Vorlesgn. bearb. v. *Ph. Kohnstamm.* 2. (Schluss-) Tl. Gr. in-8, XVI-646 p. avec 205 fig. Leipzig, J.-A. Barth. Relié, 24 m.

Rouse Ball (Wa.-W.). — *A short acccount of the history of mathematics.* 5e édition. XXIV-536 p. New-York, Macmillan. 3 d. 25.

Capito (Charles-A.-A.). — *A text-book of mathematics and mechanics; specially arranged for the use of students qualifying for science and technical examinations.* 7,75-5,25, 414 p. London, C. Griffin. 12 s. 6 d.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk.* Tome IV, volume V : *Systèmes déformables;* fascicule 1. In-8, 96 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr. 20.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien. Bd. VI, 1 B. Geodäsie u. Geophysik. Red. v. *Ph. Furtwängler* u. *E. Wiechert.* 3. Heft. In-8, 179-234 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. 80.

— Bd. VI, 2. Astronomie. Red. v. *K. Schwarzschild.* 5. Lfg. In-8, 557-665 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 40.

Kritzinger (H.-H.). — *Die Errungenschaften der Astronomie, nach den Orig.-Arbeiten der führ. Forscher dargestellt.* (*Erkenntnisbücherei.*) In-8, VIII-379 p. avec figures. Weimar, G. Kiepenheuer. Relié, 6 m.

Fehr (H.). — *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens.* 2e édition, rev. In-8, VIII-137 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOUASSE (H.). — COURS DE MÉCANIQUE PHYSIQUE. — Deuxième édition, complètement transformée et considérablement augmentée. Ouvrage formant, avec la *Mécanique rationnelle et expérimentale* du même Auteur un cours complet de *Mécanique expérimentale*. Tome premier du *Cours de Physique*, 1 vol. gr. in-8°, XI-684 pages. Paris, Ch. Delagrave, 1912.

Voilà un titre bien long. Les délicats humanistes de la Renaissance, les clairs penseurs du XVIIe siècle ne redoutaient pas ces sortes de titres; ils ont l'avantage de dire clairement ce que l'auteur a prétendu faire, et d'annoncer, avant qu'on ait ouvert l'Ouvrage, ce qu'on peut espérer d'y rencontrer; n'est-ce pas justement pour cela que les titres sont faits?

Celui-ci ne ment point. Si, au *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale* que M. Bouasse a publié il y a peu d'années et que nous avons analysé en ce *Bulletin* (¹), on joint le présent Volume, on obtient un traité complet de Mécanique expérimentale, le seul qui existe à notre connaissance. En effet, du *Treatise on natural Philosophy* de Lord Kelvin et P.-G. Tait, la première Partie seule a été produite; et, d'ailleurs, cette œuvre géniale est bien plus une collection de recherches et de tentatives originales qu'un traité didactique.

I.

Quelle est la pensée dominante de tout cet Ouvrage, comment M. Bouasse conçoit la Science mécanique, nous l'avons dit au cours de l'Analyse du premier Volume: il n'est donc pas utile d'y revenir ici. Il sera plus intéressant de nous attacher aux pensées, aux aperçus que l'auteur propose en ce *Cours de Mécanique physique* et qu'il n'avait pas encore eu occasion d'émettre.

Ces pensées ont surtout trait aux rapports de la Science pure

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXXIV, 1910, première Partie, p. 144-176.

et de la Science appliquée, ou, plus exactement, puisque c'est seulement de Mécanique qu'il est question ici, aux relations entre la Mécanique pure et la Mécanique appliquée.

On a beaucoup écrit, depuis un certain nombre d'années, sur la nature des théories physiques; toutes les réflexions qui ont été émises, à ce sujet, ont profondément bouleversé ce que nos devanciers croyaient de la Mécanique pure et de la Mécanique appliquée.

La Mécanique rationnelle formait, pour eux, avec l'Arithmétique et la Géométrie, la trinité des Sciences pures. Issues d'axiomes évidents de soi, ces trois sciences demandaient au seul raisonnement déductif le moyen de développer leurs conséquences. Les faits que l'expérience constate ne pouvaient manquer de se conformer à ces conséquences universelles; l'expérience n'intervenait en réalité que pour nous apprendre de quelle manière il fallait particulariser, dans chaque cas, les théorèmes généraux de la Mécanique rationnelle.

En ses axiomes, la Mécanique rationnelle tenait, d'une manière implicite, les lois de tous les mouvements qui s'observent dans la nature; une intelligence dont le pouvoir ne connaîtrait pas de limites saurait, de ces axiomes, extraire toutes ces lois; si notre esprit n'y peut parvenir, c'est simplement parce que tout problème trop compliqué l'égare.

Or, la pratique a besoin de connaître, au moins d'une manière approchée, les règles de phénomènes compliqués dont la Mécanique rationnelle donnerait les lois exactes si notre esprit était assez fort pour les développer. La débilité de notre intelligence nous oblige, alors, à recourir à un autre moyen, à raisonner sur ces phénomènes à partir de principes purement empiriques, à nous contenter d'une connaissance d'ordre inférieur que nous nommons Mécanique appliquée.

Ainsi, entre la Mécanique rationnelle et la Mécanique appliquée, il y a différence essentielle, différence de nature. Tirée de principes évidents, explicitée par le raisonnement déductif, la Mécanique rationnelle est certaine, immuable, rigoureuse. Fondée sur des expériences nécessairement particulières et entachées d'erreur, la Mécanique appliquée est douteuse, sujette à modifications et à transformations, et simplement approximative.

Telle fut, au sujet de ces deux branches de la Mécanique, la pensée communément reçue des savants et des ingénieurs pendant la plus grande partie du XIXe siècle.

Ils sont bien rares, aujourd'hui, ceux qui la regardent encore comme véritable.

La Mécanique rationnelle ne nous apparaît plus comme une science déduite *a priori* de principes qui seraient évidents par eux-mêmes. Nous la regardons seulement comme une partie, la première et la plus simple, de la Physique théorique. Elle n'échappe pas à ce qui peut être affirmé avec vérité de toute théorie physique. Suggérés par l'expérience, ses principes sont des postulats, des hypothèses qui n'ont, *a priori*, aucune évidence, aucune certitude. Leur rôle, c'est d'être des formules condensées d'où le raisonnement fera sortir une représentation, harmonieusement ordonnée, des lois révélées par l'observation; et cette représentation, si satisfaisante qu'on la suppose, n'est jamais qu'une image approchée et provisoire de la réalité.

Entre la Mécanique pure et la Mécanique appliquée, il n'y a plus distinction de nature; il y a seulement différence de degré. C'est ce que M. Bouasse nous expose en ces termes [1] :

« A côté des *Sciences pures* se sont constituées des *Sciences appliquées* dont le caractère est empirique et provisoire. Tandis que les premières ont pour idéal de classer les faits dans des formes très générales dérivant par déduction d'un petit nombre de principes, les secondes, *procédant exactement de même en pure logique*, classent les faits dans des formes distinctes moins générales, dérivant de principes plus nombreux, conséquemment plus voisins des faits à expliquer.

» Les Sciences appliquées sont moins exigeantes sur la valeur de leurs principes dont le peu de précision est connu.

» Ainsi le travail des savants se trouve échelonné.

» Pour les besoins de la pratique qui ne saurait attendre, les ingénieurs utilisent les Sciences appliquées dont les physiciens s'efforcent de ramener les principes provisoires aux principes plus généraux des Sciences pures; ils précisent la sorte d'approximation tolérée dans leur mise en œuvre; ils les remplacent, si

---

[1] Pages VII-VIII.

possible, par d'autres plus exacts et d'un usage plus commode.

» D'un point de vue, les Sciences appliquées sont en avance sur les Sciences pures qu'elles alimentent de problèmes; les nécessités journalières posent des questions dont les ingénieurs donnent des solutions pratiques mais imparfaites; les physiciens s'ingénient à les introduire dans leurs cadres, ce qui entraîne des abstractions, des simplifications dans leurs énoncés, simultanément des complications dans des calculs telles que les ingénieurs, tout en reconnaissant le progrès théorique, s'en tiennent le plus souvent à l'emploi de leurs outils moins précis, mais plus rapides, du reste suffisants.

» Les deux disciplines sont donc nécessaires; elles se maintiendront côte à côte. Raison de plus pour ne pas construire entre elles de cloisons étanches; raison de plus pour qu'elles ne s'ignorent pas. »

II.

Qu'est-ce à dire? Entre la Mécanique pure et la Mécanique appliquée, faut-il effacer toute démarcation? Faut-il les mêler et les confondre? Faut-il demander au professeur de Mécanique rationnelle de se faire praticien, à l'ingénieur de démontrer des théorèmes de Mécanique rationnelle? Rien n'est plus éloigné de la pensée de M. Bouasse. Pour être de degré, et non de nature, une différence n'en est pas moins réelle. Encore que toutes les marches d'un escalier soient pareilles, se trouver en haut ou en bas de l'escalier n'est pas même chose; il est toujours ridicule, et parfois dangereux, de l'oublier. En diverses circonstances, M. Bouasse s'est montré sévère pour les travers des professeurs de Sciences pures qui veulent jouer à l'ingénieur. Aujourd'hui, il dit de rudes, mais utiles, vérités aux ingénieurs qui confondent les procédés de la Science appliquée avec ceux de la Science pure :

« Je soutiens [1], dans l'intérêt des Sciences pures comme des Sciences appliquées, que l'esprit dans lequel il faut les cultiver est absolument différent. Que les ingénieurs se contentent de formules empiriques correctes, qu'ils analysent avec soin, avec conscience la marche expérimentale de leurs appareils; ils ren-

[1] Pages VIII-IX.

dront à eux-mêmes et aux savants de métier un bien autre service qu'en nous encombrant de leur Algèbre.

» Ils manquent de temps pour les travaux désintéressés; ils ont d'autres soucis que d'user plusieurs années de leur existence à effectuer, en toute rigueur et sans espoir de gain immédiat, des expériences difficiles. De cela, je ne leur fais pas un reproche. Mais on pourrait attendre un bénéfice scientifique appréciable de leurs observations journalières, si les études auxquelles ils se sont livrés comme étudiants les avaient préparés à bien voir. Malheureusement ils ne trouvent aucun rapport entre la Physique pure dont on les a gavés et les phénomènes qu'ils ont sous les yeux. Aussi, quand ils veulent raisonner sur leur métier, prennent-ils les problèmes à contre-sens, bâtissent-ils des théories insoucieuses des faits les mieux établis; il faut leur savoir gré quand ils se bornent à découvrir l'Amérique.

» Rien n'est lamentable comme les cours de Sciences appliquées dont on nous écrase, tout farcis de théories qui ne se rattachent en rien aux théories proprement scientifiques. Leurs auteurs ont-ils la sottise de s'imaginer qu'un ingénieur de quelque bon sens perdra vingt-quatre heures à les lire? Pensent-ils faire progresser la construction des machines en fournissant aux industriels plusieurs quintaux d'intégrales? Ou poursuivent-ils tout uniment des lauriers académiques?

» Voici le beau résultat qu'ils obtiennent à sortir de leur métier et à se guinder à des occupations auxquelles ils ne sont pas préparés : aujourd'hui, en Mécanique physique, c'est un gâchis épouvantable; tout est à recommencer, alors qu'il semble que tout soit depuis longtemps parachevé. »

III.

M. Bouasse assigne donc à l'ingénieur, comme objet propre de ses efforts, l'établissement et l'emploi de formules empiriques; il lui demande de renoncer au développement des théories, de laisser au savant de profession le soin de les faire progresser, d'y intégrer les phénomènes que l'ingénieur a découverts et étudiés. Pourquoi, dès lors, demande-t-il à cet ingénieur de s'être, au cours de ses années d'études, familiarisé avec les enseignements de la Science

pure? Quels services attend-il de cette science en faveur de l'art du praticien?

Ce que M. Bouasse demande à la Science pure, c'est de guider les tâtonnements empiriques de l'ingénieur; il ne veut pas que ces tâtonnements procèdent au hasard; il veut que les principes éclaircis par la théorie marquent les directions générales suivant lesquelles les essais techniques ont chance d'aboutir; et surtout, il veut que la connaissance de la Mécanique rationnelle empêche l'ingénieur de s'aventurer sur des routes déjà explorées et condamnées, qui le mèneront sûrement à des précipices.

« Que les ingénieurs [1] ne me reprochent pas de les réduire à l'établissement de formules empiriques! ou plutôt qu'ils prennent conscience de la difficulté d'établir de bonnes formules empiriques!

» Il paraît des tonnes de Mémoires sur l'aviation, écrits par des gens qui n'ont jamais ouvert un cours d'Hydrodynamique. Certes, l'Hydrodynamique expérimentale n'est pas avancée; pourtant, elle permet de préciser certaines conditions auxquelles les expériences doivent satisfaire. Tout homme ayant une teinture d'Hydrodynamique sait, par exemple, qu'il est absurde de traiter un fragment d'hélice indépendamment du système entier, voire des corps qui l'entourent. Du coup, meurent une kyrielle de théories qui n'auraient jamais dû naître; du coup, apparaît saugrenue dans l'état actuel de la question... la prétention d'une hélice *normale*, par exemple.

» Les Volumes sur la résistance des fluides sont en nombre prodigieux; pourtant c'est à peine si la question est bien posée. Les ingénieurs pensent-ils perdre leur temps en apprenant comment il faut la poser avant que de la résoudre? Ont-ils l'espoir de réussir par leurs propres forces, là où les plus grands savants n'ont produit que des essais médiocrement heureux? »

IV.

Les Sciences pures et, en particulier, la Mécanique rationnelle doivent donc être enseignées de telle manière qu'elles puissent

---

[1] Page IX.

guider les essais empiriques de l'ingénieur. Que faut-il pour cela? Trois choses.

Tout d'abord, les théories les plus achevées, les plus logiques de la Mécanique rationnelle sont au sommet d'une hiérarchie de sciences dont l'empirisme technique occupe le rang le plus humble. Que le professeur de Science pure ne se tienne pas, hautain et dédaigneux, au dernier degré de cette sorte d'escalier; qu'il daigne descendre quelques marches; il y trouvera des doctrines qui n'ont déjà plus la pureté et la rigueur de la Mécanique rationnelle et qui, cependant, par l'ordre logique qui y règne, se trouvent fort au-dessus du simple empirisme. Que le théoricien expose avec soin ces doctrines intermédiaires; qu'il s'attache à marquer exactement jusqu'à quel point les principes en sont justifiés par la Mécanique rationnelle, à partir de quel point ils aventurent des affirmations que la Science pure n'a pas encore autorisées. Par là, il diminuera la distance entre la théorie rigoureuse et la pratique empirique; il montrera à celle-ci comment, pour organiser les connaissances qu'elle a accumulées, elle peut s'éclairer des rayons que celle-là a émis.

Par exemple, au-dessous de la théorie rationnelle de l'*Élasticité* se trouve la doctrine intermédiaire qu'on appelle *Théorie de la résistance des matériaux*.

« Si particulière que soit la *Théorie de l'Élasticité* [1], elle est loin de fournir tous les résultats dont a besoin la pratique, soit que les formules auxquelles elle aboutit présentent une inextricable complexité, soit encore que les équations ne puissent s'intégrer. On a construit, comme auxiliaires de la *Théorie de l'Élasticité*, des théories particulières rassemblées sous le nom de *Résistance des matériaux*. Dans les cas les plus simples, elles coïncident avec la Théorie de l'Élasticité; elles résolvent les cas difficiles en leur appliquant des hypothèses *suggérées* par cette théorie, c'est-à-dire des hypothèses que cette théorie admet rigoureusement pour les cas simples, et considère comme des approximations plus ou moins grossières pour les cas complexes. »

L'Hydraulique est à l'Hydrodynamique ce que la Théorie de la Résistance des matériaux est à l'Élasticité.

---

[1] Page 27.

Si donc le professeur de Mécanique veut que son enseignement puisse servir de guide aux ingénieurs que seront plus tard ses élèves, il ne se contentera pas d'enseigner la Théorie de l'Élasticité et l'Hydrodynamique; il enseignera aussi la Théorie de la Résistance des matériaux et l'Hydraulique.

Pour donner ce dernier enseignement, il faut un sens critique plus sûr et plus affiné que pour le premier; il s'agit, en effet, d'exposer des sciences dont les hypothèses, pour être à la fois plus compréhensives et plus aisément maniables, sont forcées d'être plus aventureuses. Or, en échange des avantages qu'on attend de ces hypothèses nouvelles, on peut et l'on doit leur permettre un degré d'approximation dont la grossièreté ne serait pas tolérable de la part des principes de la Science pure. Mais on ne saurait admettre, cependant, des hypothèses que la Science pure dénoncerait comme dénuées de sens ou comme directement contraires à la vérité. De telles hypothèses doivent être condamnées sans merci. Comment il les faut exclure de la Science, M. Bouasse nous le montre par la façon dont il exécute [1], en Hydraulique, la proposition qu'on appelle théorème de Borda ou de Carnot. Ce sont là leçons qu'il convient de donner avec grand soin à de futurs ingénieurs; on ne saurait les mettre trop en garde contre les suppositions absurdes, en dépit de leur allure prétentieusement savante, qui font incessamment le siège de leur confiance.

V.

En cette hiérarchie de doctrines qui relient la Science pure à l'application, il ne faut pas que le savant se cantonne au degré le plus élevé, qu'il se refuse à descendre quelque peu pour se rapprocher de l'empirisme. A plus forte raison ne faut-il pas qu'il abandonne ce degré suprême qui est proprement le sien, et qu'il le laisse désert.

Or, d'un tel abandon, nous sommes trop souvent témoins. Il est, en la Science pure, maint Chapitre qui serait particulièrement apte à guider les essais de l'ingénieur, et dont le théoricien ne daigne plus s'occuper.

« Les Français, dit M. Bouasse [2], coupent la Physique pure

---

(1) Pages 273, 289-292.

(2) Pages v-vi.

en deux parties : celle des physiciens qui a les honneurs du programme ; celle des ingénieurs qu'on passe sous silence, bien qu'elle comprenne les phénomènes usuels. Par exemple, les cours de Physique insistent sur le baromètre, mais ignorent l'équilibre des corps flottants ; ils s'occupent du coefficient de Poisson, mais négligent la Résistance des solides ; ils connaissent tout des tubes capillaires, mais dédaignent la Résistance des fluides.

» L'Élasticité, l'Hydrostatique, l'Hydrodynamique, l'Acoustique, considérées comme *Sciences pures expérimentales* (elles font l'objet de ce cours) ont disparu des programmes de nos Universités ; ce qui explique (sans la légitimer) l'ignorance des physiciens français actuels sur ces matières.

» Au surplus, depuis un temps immémorial, le jury d'agrégation écarte systématiquement ces diverses branches de la Physique.

» Dieu me garde de blasphémer ! Pourtant, je trouve plus éducative *pour nos futurs professeurs de lycées* la science qui s'applique aux bateaux, aéroplanes, pianos, orgues, constructions de pierre et de fer, ... que les ions gros ou petits créés par le radium. On développe l'esprit scientifique des enfants en leur apprenant à regarder ce qu'ils trouvent autour d'eux, non pas en leur décrivant ce qu'il est probable qu'ils ne rencontreront jamais.

Bref, la *Science pure* française croit superbe de se désintéresser systématiquement de tout ce qui est applicable. Elle laisse inexplorés de riches domaines ; *surtout elle défaille à son rôle éminent de directrice des Sciences appliquées.*

» A leur tour, privées d'un contrôle salutaire, les *Sciences appliquées* oublient leur véritable motif d'exister ; elles assument, sans en être capables, le rôle qu'abandonnent les *Sciences pures*. Et cela constitue, pour l'observateur amusé, le plus beau gâchis du monde ! »

A cet abandon que déplore si justement M. Bouasse, il y a deux sortes de raisons, qui ne sont pas des excuses.

Les sciences en faveur desquelles il réclame sont sur la frontière de la Mécanique et de la Physique. Alors, le professeur de Mécanique, qui est en général un géomètre, s'empresse de laisser à son collègue de Physique le soin d'enseigner ces doctrines, dont le mélange avec l'expérience lui semble souiller la pureté.

D'autre part le physicien, désireux d'alléger un programme écrasant sous lequel ses élèves succombent, pose en principe que ces questions ont été étudiées par le mécanicien.

Et puis, le professeur a le très fâcheux désir de donner attrait à son enseignement en y sertissant l'exposé des découvertes sensationnelles. Le goût de la nouveauté lui fait oublier les principes les plus certains de la pédagogie : si l'on se propose de former le jugement, de dresser le raisonnement, d'affiner le sens critique de l'élève, c'est en analysant devant lui des problèmes résolus depuis longtemps, éclaircis jusqu'en leurs moindres détails, qu'on y parviendra : ce n'est pas en l'éblouissant par des affirmations qu'on prend aujourd'hui pour vérités et qui, demain, seront traitées d'erreurs.

Contre ce délaissement des diverses branches de la Mécanique expérimentale, M. Bouasse a combattu sans cesse et de la meilleure manière. La lecture de ces deux Volumes sur la Mécanique est bien la démonstration la plus convaincante que ces doctrines, soi-disant désuètes, fourmillent de questions où l'élégante rigueur du géomètre, l'habileté de l'expérimentateur, l'utile ingéniosité du praticien trouvent, à la fois, occasion de s'exercer : et que, parmi ces problèmes qu'on croit vieillis, il en est beaucoup dont l'intérêt est singulièrement actuel. L'abandon de ces doctrines par l'enseignement des Universités était blâmable avant la publication de ce *Cours complet de Mécanique expérimentale* : après cette publication, il serait criminel.

VI.

Celui qui enseigne la Mécanique et la Physique ne doit pas, trop épris de Science pure, dédaigner les doctrines intermédiaires qui rapprochent quelque peu celle-ci de la pratique. Il ne doit pas délaisser les parties de la Science pure qui se trouvent être les plus utiles à l'ingénieur. A plus forte raison, ne doit-il pas, par amour d'une élégante Algèbre, recevoir dans son enseignement des théories que l'expérience a définitivement condamnées : en le faisant, il gaspillerait le temps et le labeur de ses élèves qui ont d'autres soucis que la seule beauté d'un calcul ; il ferait pis : il égarerait l'expérimentateur et le praticien en les engageant dans des

voies au terme desquelles se trouvent des erreurs depuis longtemps reconnues.

On sait, par exemple, depuis Dalembert que, si l'on aborde l'étude du mouvement d'un solide dans un fluide en supposant les vitesses continues et exemptes de mouvements tourbillonnaires, on aboutit à des résultats inadmissibles. Et cependant, on persiste à traiter ce problème de cette manière, à le développer, à l'enrichir de cas nouveaux. C'est que l'algébriste y rencontre des équations qu'il sait traiter et dont il prend occasion de montrer sa dextérité. Il ressemble grandement à ce peintre d'Horace, qui voulait mettre quelques cyprès dans une marine, parce qu'il excellait à traiter les cyprès.

M. Bouasse arrête notre algébriste au milieu de ses calculs ; avec Horace, il lui crie : *Non erat his locus!* La Mécanique est une science expérimentale ; quand une doctrine a reçu le démenti flagrant de l'expérience, la Mécanique ne la veut plus connaître. Pas de calculs en Mécanique s'ils ne conduisent à des résultats que l'observation déclare à peu près exacts ! pas de cyprès dans une marine !

« Dans toutes les questions d'Hydrodynanique, dit M. Bouasse (1), où l'on calcule les forces exercées sur des corps solides plongés dans un fluide, il existe un malentendu perpétuel entre les mathématiciens et les physiciens.

» S'il est bien démontré dans les cas les plus simples que les solutions continues sont inapplicables, il est absurde de les maintenir dans les cas complexes, sous prétexte qu'il est impossible sans leur secours de pousser à bout l'étude de ces cas.

» Du coup disparaissent une infinité de problèmes purement mathématiques qui grossissent inutilement les traités d'Hydrodynamique. Mieux vaut avouer son ignorance que de raisonner mal.

» Je pourrais citer des auteurs qui, suivant le Chapitre de leur Ouvrage, admettent les solutions de première espèce (2) ou de seconde espèce (3) par simple raison de commodité.

» Malheureusement, les physiciens français, avec l'éducation qu'ils reçoivent aujourd'hui, sont généralement incapables de

(1) Pages 382-383.

(2) Celles où les vitesses sont supposées continues.

(3) Celles où l'on admet des surfaces de discontinuité.

suivre les calculs et surtout de vérifier les hypothèses des mathématiciens ; ceux-ci ne s'inquiètent pas de l'expérience. Conséquemment, les premiers perdent leur temps à donner de soi-disant vérifications expérimentales de formules *qu'ils ne devraient même pas discuter*, puisqu'elles ont à la base des hypothèses inadmissibles. »

Les problèmes relatifs au mouvement des solides dans les fluides visqueux donnent lieu à des critiques analogues. Ces critiques, M. Bouasse les adresse ([1]), vives mais, malheureusement, trop justes, au Mémoire de Stokes sur cette question :

« Mais, objectera-t-on, la formule de Stokes est vérifiée par l'expérience ! C'est ce qu'il faudrait voir. Ayons le courage de dire qu'une formule proposée par un illustre savant est toujours vérifiée par l'expérience...

» Insistons. Que signifie la démonstration expérimentale d'une formule dont les bases théoriques sont inexistantes ? Ne faut-il pas tout d'abord regarder de quelles hypothèses elle sort ? si ces hypothèses n'impliquent pas contradiction avec de gros phénomènes parfaitement sûrs ? Veut-on considérer la formule en litige comme empirique et déterminer le coefficient de la vitesse par l'expérience ? Soit ; mais alors, pourquoi faire ces beaux calculs qui ne riment à rien ?

» Tout le Mémoire de Stokes sur le frottement intérieur est soumis aux mêmes critiques ; admirables au point de vue mathématique, les solutions proposées ne semblent pas mécaniquement défendables. Ces questions sont à reprendre sans idées préconçues et sans vouloir admettre certaines solutions parce que simples.

» En particulier, la solution de Stokes pour le cylindre indéfini et les vibrations infiniment petites a été appliquée par Tomlinson à des cylindres finis et à des vibrations finies dans des conditions qui effarent un lecteur ne mettant pas délibérément la critique dans sa poche.

» Du reste, il en est de même en Hydrodynamique pour quatre-vingt-dix-neuf questions sur cent. »

Ce jugement plongera dans la stupeur maint lecteur qui s'est

([1]) Pages 362-363.

laissé éblouir par l'ampleur et la beauté des formules, et qui en est venu à croire que Mathématique est synonyme de Vérité. Grande est son illusion. L'Algèbre garde avec une scrupuleuse fidélité la vérité qu'on lui confie, mais à ce qu'on lui a remis, elle n'ajoute pas un atome de vérité nouvelle. Si bien menés que soient des calculs, ils n'assureront pas l'exactitude des résultats si les points de départ sont faux. Examinons donc, avant tout, la légitimité des points de départ. Or, en Science expérimentale, il n'y a qu'une façon de reconnaître si des hypothèses sont légitimes; c'est de comparer aux faits les conséquences auxquelles elles mènent. Qu'une seule de ces conséquences soit en contradiction avec la réalité, et la cause est entendue ; les hypothèses s'écroulent, entraînant dans leur ruine tout l'édifice mathématique qu'elles portaient ; et cela, lors même que plusieurs de leurs corollaires s'accorderaient avec l'expérience.

Lorsqu'on soumet à l'essai de cette pierre de touche la multitude des théories qui constituent l'Hydrodynamique et la Science de l'Élasticité, on est étonné du petit nombre des doctrines qui résistent à l'épreuve. Après qu'on a rejeté tous les problèmes dont la solution, en dépit de sa beauté algébrique, est condamnée par l'expérience, on voit ces deux vastes Sciences se réduire à un mince résidu, formé de propositions très simples, pour la plupart, et très élémentaires. On demeure alors comme épouvanté de l'ampleur et de la difficulté des questions que la réalité nous pose, du petit nombre de solutions recevables auxquelles l'esprit humain est parvenu et de l'immensité de l'effort qu'il a donné pour suivre des voies qui n'aboutissaient pas.

Nous venons de dire sommairement, mais, croyons-nous, fidèlement, comment M. Bouasse entend que se doivent nouer les relations de la Science pure et de la Science appliquée. Ce qu'il en dit nous a paru marqué au coin d'un irréprochable bon sens. Les vérités qu'il enseigne, il les proclame avec la rude franchise qui lui est coutumière et que beaucoup, peut-être, seront tentés de lui reprocher. Eh ! de grâce, excusons-le s'il enfle un peu la voix ; tant de gens, pour ne pas l'entendre, se bouchent les oreilles.

PIERRE DUHEM.

GRASSMANN (Hermann). — Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Dritten Bandes, Erster Teil : Theorie der Ebbe und Flut und Abhandlungen zur Mathematischen Physik, aus dem Nachlasse herausgegeben von Justus Grassmann und Friedrich Engel. 1 vol. gr. in-8°, 16 fig. dans le texte, v-353 pages. Dritten Bandes, Zweiter Teil : Grassmanns Leben, geschildert von Friedrich Engel. 1 vol. gr. in-8°, 3 fig. dans le texte, xiii-400 pages. Leipzig, B. G. Teubner, 1911.

Ce troisième et dernier Tome des Œuvres mathématiques et physiques de Grassmann comprend deux Volumes.

Le premier de ces Volumes ne contient que des Mémoires inédits dont le plus important est le travail sur la Théorie des marées, envoyée par Grassmann en 1840 à la Commission d'examen pour les Sciences à Berlin en vue de faire constater ses aptitudes à un poste de professeur plus important que celui qu'il occupait à Stettin. Ce travail, composé quatre ans avant l'apparition de la première *Ausdehnungslehre* (1844), présente un intérêt historique important. Ce n'est pas qu'il ait fait faire à la théorie des marées des progrès remarquables. Mais d'abord il orienta définitivement du côté des Mathématiques une vocation qui jusqu'alors avait hésité entre la Science et la Théologie ; ensuite il nous permet de saisir en quelque sorte sur le vif la genèse des idées qui ont conduit Grassmann à l'élaboration de sa théorie des quantités extensives. Dans la préface de l'*Ausdehnungslehre* de 1844, Grassmann s'exprime lui-même en ces termes :

« Un travail sur la théorie des marées, que j'entrepris ensuite, me fit nouer connaissance avec la *Mécanique analytique de Lagrange* et rappela mon attention sur mes anciennes idées relatives à l'Analyse géométrique. Grâce aux principes de cette nouvelle Analyse, tous les développements de l'œuvre de Lagrange prenaient une forme tellement simple que souvent le calcul en était plus de dix fois abrégé. Cela m'encouragea à appliquer aussi la nouvelle Analyse à la théorie difficile des marées : il y avait pour cela maintes notions nouvelles à développer et à introduire dans mon Analyse... Et j'eus la joie de voir comment, grâce à l'Analyse ainsi constituée et étendue, les formules souvent très compliquées et dissymétriques qui servaient de fondement à cette théorie se transformaient en formules extrêmement simples et symétriques. »

Les notions et les opérations fondamentales de cette Analyse qui se trouvent dans la théorie des marées sont l'addition et la soustraction géométrique des vecteurs et des aires, la multiplication géométrique (extérieure) des vecteurs, la multiplication linéaire (intérieure) des vecteurs, la multiplication des vecteurs par des quantités exponentielles et angulaires. Grassmann introduit aussi accidentellement une addition d'angles situés dans des plans différents, mais il ne donne que des indications vagues sur le calcul des angles dans l'espace.

Au point de vue de la théorie des marées proprement dite, Grassmann introduit une notion qui lui est personnelle, celle du *moyen mouvement*. Si l'on considère, pour simplifier, un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont les seconds membres soient des sommes d'exponentielles, la *solution moyenne* de ce système, au sens de Grassmann, serait la solution particulière pour laquelle les fonctions inconnues sont de la même forme que les seconds membres : la solution générale résulte alors, quelles que soient les condition initiales, d'une ou plusieurs oscillations autour de cette solution moyenne. Dans la théorie des marées, Grassmann ne s'occupe que du moyen mouvement : il le détermine dans le cas d'une masse fluide sphérique avec ou sans noyau solide, animée ou non d'un mouvement de rotation.

Signalons encore, comme particularité mathématique intéressante, une démonstration du théorème d'après lequel le développement d'une fonction en une série de fonctions sphériques n'est possible que d'une manière.

Le Mémoire de Grassmann est reproduit avec la réduction de l'auteur lui-même sauf quelques modifications, dont deux peut-être trop importantes, ayant pour but de suppléer au manque de rigueur ou même à l'inexactitude des développements de Grassmann.

Outre le Mémoire sur la théorie des marées, le Volume comprend différentes Notes de Physique mathématique; d'abord trois Notes sur la théorie des ondulations, datant des années 1846, 1850 et 1852; puis une Note sur la propagation du son, de 1867; enfin deux fragments non datés intitulés, l'un *Hypothese der aus — E und — E zusammengesetzten Aetheratome*, l'autre *Aethe-*

ratome. Il est assez curieux de trouver dans Grassmann un précurseur de la théorie moderne des électrons. Ces Notes seront lues avec intérêt par les physiciens un peu familiarisés avec les méthodes de calcul de Grassmann.

Le deuxième Volume de ce dernier Tome contient, outre la biographie de Grassmann, la bibliographie de toutes ses publications et une liste des manuscrits trouvés dans sa succession et se rapportant aux Mathématiques et à la Physique.

La biographie que M. Engel nous donne de Grassmann nous renseigne abondamment, et d'une manière très attachante, sur le caractère, les goûts, les travaux du géomètre si longtemps méconnu; on trouvera sur ses études, sur sa vie privée, sur sa carrière de professeur, sur ses relations avec les savants de son temps, des renseignements peu connus, du moins des lecteurs français, et tout à fait intéressants.

Hermann Grassmann naquit le 15 avril 1809 à Stettin, et mourut le 26 septembre 1877 dans la même ville. La carrière de son père, qui était professeur de mathématiques, semblait le prédestiner à devenir mathématicien. Cependant il est bien curieux que pendant les trois années qu'il passa à l'Université de Berlin (ce sont les seules années de sa vie qu'il n'ait pas passées à Stettin), il ne suivit aucun cours de Mathématiques. Pendant les cinq premiers semestres il s'était presque exclusivement adonné aux études théologiques, suivant en particulier les cours de Schleiermacher qui semble avoir exercé sur lui une profonde influence; le sixième semestre avait été consacré à des cours de psychologie, d'histoire de la littérature grecque et d'histoire de la philosophie. Il ne reçut donc en mathématiques qu'un enseignement tout à fait élémentaire et fut surtout un autodidacte, ce qui peut expliquer jusqu'à un certain point les qualités et les défauts qui empêchèrent ses travaux d'obtenir l'accueil qu'ils méritaient. Le goût des mathématiques ne lui vint donc qu'assez tard et fut longtemps contrebalancé par son penchant pour la Théologie. Bien qu'il eût renoncé d'assez bonne heure à devenir pasteur, il ne cessa pas pendant vingt ans, de 1857 jusqu'à sa mort, d'être à peu près le seul membre actif de la Société poméranienne pour l'évangélisation de la Chine. Le dernier écrit qui sortit de sa plume, quelques semaines avant sa mort, fut une brochure sur le déclin de la foi.

Grassmann fut aussi un philologue distingué. Il avait commencé en 1849 à étudier le sanscrit; il avait publié en 1860 un premier travail de phonétique comparée. Mais c'est surtout après l'insuccès de sa seconde *Ausdehnungslehre* (1861) qu'il se livra à des recherches philologiques importantes. Il publia un dictionnaire des mots du *Rig-Veda* (1873-1875) et plus tard traduisit le *Rig-Veda* lui-même (1876). Son nom reste, paraît-il, attaché à une loi importante de phonétique comparée dont on lui doit la découverte.

Les Mathématiques furent donc loin d'absorber l'activité intellectuelle de Grassmann, d'autant plus qu'il était père de onze enfants et que ses charges de professeur étaient assez lourdes. Au gymnase de Stettin, où il avait succédé à son père en 1852, son service était, vers la fin de sa vie, réglé ainsi qu'il suit pour un des semestres (celui d'été) : il devait l'enseignement des Mathématiques et de la Physique dans les deux classes de première, quatre heures de Mathématiques et une de Physique en seconde supérieure, une heure d'Histoire naturelle et l'enseignement religieux dans les deux classes de troisième et l'enseignement de l'allemand en troisième supérieure! On doit du reste à Grassmann un certain nombre de Livres de classe, en particulier un Livre de lectures allemandes pour les enfants de 8 à 12 ans, qui eut un certain succès, puisque sept éditions s'en succèdent de 1846 à 1877. Les appréciations de son enseignement, demandées par M. Engel à quelques-uns de ses élèves, sont pleins de détails intéressants : on y verra la méthode originale qu'avait Grassmann pour maintenir dans sa classe une discipline qui laissait parfois à désirer.

Grassmann ne put jamais obtenir une chaire d'enseignement supérieur. Une première demande, accompagnée de l'envoi de son *Ausdehnungslehre* et de l'*Analyse géométrique* récemment couronnée par l'Académie Jablonowski, fut adressée en 1847 au Ministre de l'Instruction publique de Prusse; à la suite d'un rapport demandé à Kummer, elle reçut un accueil poli, mais évasif. Cette demande fut renouvelée en 1862, après la publication de la deuxième *Ausdehnungslehre*, mais sans plus de succès.

Enfin en 1868, à l'instigation de Grunert, Grassmann posa sa candidature à une chaire de Mathématiques vacante à la Faculté

de Philosophie de Greifswald par suite du départ de Königsberger pour Heidelberg. La Faculté, qui avait à choisir entre Baltzer, Grassmann, Fuchs, Dedekind et Schwarz, soutenus, les deux premiers par Grunert, les trois derniers par Königsberger, ne présenta que Fuchs, qui fut nommé. Cette tentative malheureuse ne fut pas renouvelée.

Ce qui est surtout intéressant dans la biographie de M. Engel, c'est l'histoire de l'accueil fait par le monde mathématique aux travaux de Grassmann. La première *Ausdehnungslehre* (1844) avait été l'objet, de la part du petit nombre de personnes qui y avaient prêté attention, d'un jugement plutôt sévère qu'excusaient en partie les considérations philosophiques quelque peu obscures et le caractère d'abstraction qui voilaient l'importance mathématique de l'œuvre. Möbius fut peut-être le seul à la juger avec quelque indulgence, tout en refusant à Grassmann d'en donner un compte rendu dans un journal mathématique. Möbius fut d'ailleurs en relations très amicales avec Grassmann jusqu'à l'apparition de la seconde *Ausdehnungslehre*; c'est grâce à lui que Grassmann fut conduit à écrire son *Analyse géométrique*, qui reçut le prix Jablonowski en 1846. M. Engel donne de larges extraits de la correspondance des deux géomètres, très intéressants au point de vue de l'histoire de la Géométrie. La seconde *Ausdehnungslehre* (1861), où l'exposition ne soulevait plus les objections qu'on pouvait faire à la première, eut cependant encore moins de succès, si possible, et la quantité de découvertes nouvelles qu'elle contenait furent, suivant l'expression de M. Engel, comme ensevelies dans un tombeau. Clebsch, qui publiait à cette époque, dans le *Journal de Crelle*, un important Mémoire sur le problème de Pfaff, était loin de se douter que Grassmann avait donné de ce même problème une solution rigoureuse plus complète que la sienne. Ce n'est que vers 1870 que l'attention de Lie fut attiré par Klein sur ces profondes recherches de Grassmann; en 1877, Frobenius, qui publiait à son tour dans le *Journal de Crelle* un important Mémoire sur le problème de Pfaff, en ignorait encore l'existence.

Les mathématiciens peu nombreux qui ont été tentés de lire la seconde *Ausdehnungslehre* ont sans doute été rebutés par une exposition beaucoup trop dogmatique, qui ne faisait grâce d'aucun

détail. Ce fut Hankel d'abord, ce furent surtout Clebsch, Klein, Lie et Schlegel qui, en Allemagne, rendirent justice à Grassmann et montrèrent l'importance de ses découvertes.

Maintenant, grâce au zèle de M. Engel et de ses collaborateurs, MM. Lüroth, Study, Justus et Hermann Grassmann, et Georg Scheffers, cette œuvre est facilement accessible à tous les mathématiciens. L'édition qu'ils viennent de mener à terme est un digne monument élevé à la gloire du grand géomètre allemand.

E. Cartan.

SCHRÖDER (Ernst). — Abriss der Algebra der Logik. Bearbeitet im Auftrag der deutschen Mathematiker Vereinigung, von Dr Eugen Müller, 2 vol. in-8°, v-50 et vi-109 pages. Leipzig B. G. Teubner; 1909, 1910.

N'y a-t-il pas une sorte de cercle vicieux à appliquer à la recherche des règles de la Logique, le raisonnement algébrique, c'est-à-dire, en définitif, la Logique elle-même? C'est là une question au moins sujette à controverses et, pour ma part, je dirais volontiers avec tel personnage de Thaïs que, si l'intelligence humaine est étrangère à toute vérité, elle ne peut arriver à connaître sa propre erreur. Henri Poincaré a écrit d'ailleurs sur la logistique des pages bien remarquables (*voir* notamment *Science et Méthode*) et qui ne sont pas loin, au point de vue de certains mathématiciens, d'en être une condamnation sans appel. Je m'empresse d'ajouter qu'il y a logistique et logistique et l'*Algèbre de la Logique*, où ne s'introduit pas l'infini, est moins critiquable; il est vrai qu'elle a aussi moins de prétentions; M. Couturat qui en semblait d'abord assez enthousiaste (1) est revenu plus tard à une conclusion moins optimiste (2).

Après Boole, M. Ernst Schröder fut en grande partie le créateur de l'Algèbre de la Logique, il l'exposait partiellement dans un

---

(1) « C'est une machine à penser, le *Calculus ratiocinator* de Leibniz, qui devait être aussi utile aux sciences déductives que le télescope ou le microscope aux sciences d'observation » (*Bull. des Sciences mathém.*, 1900, p. 68).

(2) « On peut donc dire que l'Algèbre de la Logique est une Logique *mathématique*, par sa forme et par sa méthode; mais il ne faut pas la prendre pour la Logique des *Mathématiques* » (*L'Algèbre de la Logique*, collection Scientia, 1905, p. 95).

premier fascicule en 1877 (*Der Operationskreis des Logikkalkul*), puis dans un gros Traité en trois Tomes (¹) (*Algebra der Logik*); M. Müller, qui a déjà publié la deuxième Partie du Tome II de l'Algèbre, s'est également chargé de la rédaction du Précis, dont les deux fascicules actuellement parus constituent en somme le résumé des deux premiers Tomes de l'Algèbre.

Je me contenterai de donner ici un aperçu du contenu de ces fascicules, renvoyant pour plus de détails à l'exposé développé que M. Couturat a donné du Traité lui-même (*Bull., loc. cit.*). Après quelques indications sur les hypothèses générales et les notations employées (caractères français pour représenter les concepts, grecs pour les propositions) on trouve un Chapitre sur les hypothèses et notations particulières du calcul — ou plutôt de l'enchaînement — des propositions ou affirmations. Ces hypothèses sont groupées autour de la notion de *subsumption;* c'est une relation entre deux propositions que l'auteur écrit :

$$\alpha \subset \beta$$

et qu'il faut lire : *La proposition ou l'affirmation* α *entraîne l'affirmation* β. M. Schröder emploie aussi le symbole de la multiplication pour remplacer la locution *et* et la notation $\overline{\beta}$ pour désigner l'affirmation contraire de β. Ces notations et quelques règles sur leurs relations mutuelles permettent d'exprimer d'une façon abrégée les fondements de la théorie des concepts, théorie à laquelle sont consacrés les Chapitres II et III. Il semble que, sur ce sujet, il y ait eu une tendance plus grande dans ce Précis que dans l'Algèbre, à grouper les vérités fondamentales dont les autres se trouvent déduites, ou pour employer un langage récent et imagé, une plus grande tendance à *axiomatiser la Logique*. (Pour la discussion sur la légitimité d'une telle axiomatisation, je renvoie à Henri Poincaré.) Le mot *subsumption* est appliqué cette fois aux concepts, de même que la notation

$$a \subset b;$$

il faut alors la lire : *La classe* a *est dans la classe* b. L'équation

(¹) Le troisième Tome est plutôt de la Logistique proprement dite et est consacré à la *Logique des termes relatifs* fondée par Peirce et continuée depuis par MM. Peano et Russell.

précédente mise entre parenthèses constitue une affirmation; si l'on veut bien se reporter aux notations déjà exposées, on pourra traduire les égalités suivantes, que l'auteur appelle *axiomes :*

(1) $$a \prec a$$

(2) $$(a \prec b)(b \prec c) \prec (a \prec c)$$

(3) $$(a \prec b)(b \prec a) = (a = b)$$

(4-5) $$0 \prec a \qquad a \prec 1 \qquad 1 \not\prec 0$$

(6) $$(x \prec a)(x \prec b) = (x \prec ab) \qquad (a \prec y)(b \prec y) = (a + b \prec y)$$

(7) $$(a + z)(\bar{a} + z) = z = az + \bar{a}z$$

L'axiome (3) est une définition de l'égalité à partir de la seule notion de concept; on en déduit, après quelques calculs, que $a = a$. Cette définition de l'égalité me paraît trop précise et par le fait trop générale; je crois savoir qu'en mathématiques au moins, pour chaque catégorie nouvelle d'êtres, on adopte une définition déterminée de l'égalité; il y a même quelquefois plusieurs espèces d'égalité pour de mêmes êtres et on les appelle suivant les cas identité, équivalence, équipollence, congruence, etc.; on s'arrange seulement pour que ces égalités vérifient les deux propriétés qu'on noterait en langage logisticien :

$$(a = b) = (b = a). \qquad (a = b)(b = c) \prec (a = c).$$

Les formules (4), (5) et (6) sont les définitions de : la *classe nulle* qui ne renferme aucun concept, la *classe* 1 qui les renferme tous, le *produit* ab de deux concepts formé des concepts communs aux classes a et b, la *somme* $a + b$ de deux concepts, ensemble des concepts des classes a et b. La formule (7) est d'une traduction plus longue : *Si l'on sait d'un objet, d'une part que s'il n'est pas dans la classe a, il est sûrement dans la classe z, d'autre part que s'il est dans la classe a il est sûrement dans la classe z, ledit objet est, dans tous les cas, dans la classe z.* Malgré la longueur de l'énoncé, l'évidence n'est pas moindre, et le symbolisme ne paraît pas d'un intérêt considérable.

Les principes et calculs deviennent, si l'on peut s'exprimer ainsi, *encore plus évidents* si les concepts ne sont qu'au nombre de deux, soient 0 et 1. C'est le cas pour les propositions *à sens constant* qui sont ou fausses ou vraies, ce qu'on peut écrire

$$(\alpha \prec 1) = \bar{\alpha} \qquad \alpha = (\alpha \prec 0)$$

« dire que α n'est pas vrai, c'est affirmer le contraire de α; dire que α est vrai, c'est dire que α n'est pas faux ». Deux Chapitres sont consacrés à ces concepts particuliers et au cas des propositions, un Chapitre intermédiaire complète ce qui avait été dit au début sur les propositions à sens variable. Enfin trois derniers Chapitres traitent des *fonctions de concepts* et de la résolution des *équations et inéquations logiques*. Après fonctions il faut sous-entendre *rationnelles entières*, la notion de fonction quelconque n'est pas encore étendue aux concepts; grâce à l'égalité $aa = a$, une telle fonction est toujours linéaire,

$$f(x) = ax - b\bar{x}$$

« Une classe fonction de x est formée des concepts qui appartiennent à la fois à une classe x et à une certaine classe a et de ceux des concepts d'une certaine classe b qui n'appartiennent pas à x. » A vrai dire, cette notion me paraît un peu artificielle, mais ce n'est probablement qu'un manque d'entraînement. Les équations ont aussi des propriétés bien remarquables si on les compare à celles des équations algébriques, et bien évidentes si l'on songe à leur signification. L'Ouvrage se termine par une Table imposante de formules.

Comme conclusion à cette analyse, il me semble que le calcul logique ainsi constitué et appliqué à des concepts généraux est une bien grande machine de guerre pour le but à atteindre. Certes, il paraît avantageux de remplacer un assez long énoncé logique par une courte formule, ce n'est toutefois qu'une abréviation de travail manuel, l'esprit *ne voit* pas plus la formule que sa traduction en langage normal, il en voit un schéma personnel (géométrique ou arithmétique ou même approprié aux circonstances). Mais si l'on applique ce calcul non plus à des concepts, mais à des catégories bien définies d'êtres plus ou moins mathématiques, on peut obtenir, je crois, des résultats moins évidents, plus particuliers et plus intéressants. L'auteur cite l'exemple des domaines d'un plan et des ensembles abstraits; ce sont peut être encore des choses bien générales; la théorie de la divisibilité de M. Dedekind est une application plus frappante.

A. Châtelet.

GUILLET (A.). — PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES FONDAMENTALES DES VIBRATIONS. *Conférences faites en* 1911 *aux candidats au Certificat de Physique générale.* Notes de M. M. AUBERT. (Cours et Conférences publiés par les soins de l'Association des élèves et anciens élèves de la Faculté des Sciences de Paris.) 1 vol. gr. in-8. IV.-405 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Les mouvements vibratoires ont, dans beaucoup de branches de la Physique, une importance capitale. Aussi sera-t-on reconnaissant à M. A. Guillet d'avoir publié les Conférences qu'il a faites en 1911 sur ce sujet aux candidats au Certificat de Physique générale.

Le Livre est divisé en deux Parties : la première est consacrée aux propriétés générales des vibrations, envisagées en elles-mêmes, en quelque sorte au seul point de vue cinématique ; la seconde traite de plusieurs applications, en particulier des mouvements ondulatoires des milieux continus.

PREMIÈRE PARTIE. — La formule

$$u = a \sin \omega t \tag{1}$$

définit, en fonction du temps t, l'abscisse u d'un point mobile animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal simple d'amplitude a et de période $\frac{2\pi}{\omega}$. Cette formule permet l'étude analytique complète du mouvement. Mais cette étude peut se faire aussi d'une façon géométrique en représentant à chaque instant l'élongation du mobile par la projection d'un *vecteur tournant :* l'extrémité d'un tel vecteur décrivant, en effet, une circonférence d'un mouvement uniforme, a sa projection sur un diamètre de la circonférence animée d'un mouvement sinusoïdal. Cette représentation est très propre à faire saisir l'importante notion de *phase* d'un mouvement vibratoire : deux mouvements sinusoïdaux de même période présentent une différence de phase β si leurs vecteurs tournants représentatifs font entre eux l'angle β.

L'importance du mouvement sinusoïdal simple ne provient pas seulement de ce que ce mouvement intervient directement en Physique, mais aussi de ce que tout phénomène *périodique* peut

être envisagé comme la superposition de termes sinusoïdaux. Au point de vue analytique, cela revient à développer une fonction périodique en fonction trigonométrique. M. Guillet expose la méthode de Fourier pour le calcul des coefficients d'une telle série.

Lorsqu'un phénomène périodique, de période T, est, pour un observateur, visible seulement à des intervalles de temps distants de $(T + \varepsilon)$, ε étant très petit, cet observateur croit voir le phénomène avec la période $\frac{T(T-\varepsilon)}{\varepsilon}$. C'est là le principe de la méthode stroboscopique utilisée en Physique pour analyser un phénomène périodique, simple ou complexe, en accroissant fictivement sa période autant qu'on le veut.

Après avoir traité du mouvement sinusoïdal simple représenté par la formule (1), l'Auteur aborde l'étude du mouvement sinusoïdal *amorti*, régi par la loi

$$u = ae^{-\lambda t}\sin\omega t, \tag{2}$$

λ étant un coefficient positif appelé *facteur d'amortissement*. Un tel mouvement *n'est pas périodique :* la durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$ peut s'appeler la *pseudo-période*. Les élongations maxima consécutives, soit de droite, soit de gauche, forment une progression géométrique dont la raison $e^{-\lambda T}$ s'appelle le *décrément*.

On ne peut plus représenter le mouvement (2) par la projection d'un vecteur tournant de longueur constante ; mais on aura une image géométrique analogue en faisant mouvoir l'extrémité d'un vecteur non sur une circonférence, mais sur une spirale logarithmique.

L'élongation u représentée par la formule (2) satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + (\lambda^2 + \omega^2)u = 0; \tag{3}$$

si le facteur d'amortissement λ n'est pas nul, il figure dans cette équation une dérivée d'ordre *impair :* on peut l'interpréter en disant que la force qui sollicite le mobile (de masse 1) se compose d'une attraction $-(\lambda^2 + \omega^2)u$ proportionnelle à l'élongation, et d'une résistance de milieu $-2\lambda\frac{du}{dt}$ proportionnelle à la vitesse.

L'équation (3) est de la forme

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} - 2b\frac{du}{dt} - c^2u = 0 \qquad (b > 0);$$

son intégrale générale u se présente sous diverses formes suivant que $b^2 - c^2 \lessgtr 0$. Lorsque $b^2 < c^2$ [cas de l'équation (3)], u représente un mouvement *sinusoïdal amorti*. Lorsque $b^2 > c^2$, u se présente sous forme d'exponentielles négatives et représente un mouvement *apériodique*. Le cas intermédiaire $b = c$ définit l'*état critique*.

Après plusieurs exemples d'application de l'équation (4), M. Guillet étudie l'effet d'une impulsion instantanée communiquée à un système mobile pouvant prendre un mouvement sinusoïdal amorti, tel, par exemple, qu'un galvanomètre dans le cadre duquel on lance la décharge d'un condensateur. Si le système reçoit une petite impulsion, toujours la même, à chaque passage par sa position d'équilibre (*Méthode des répétitions*), il se produira bientôt un état de régime, dans lequel il y aura compensation, à chaque oscillation, entre l'énergie fournie par l'impulsion et l'énergie absorbée par l'amortissement. Un pareil système soumis, non plus à des impulsions, mais à une force perturbatrice périodique finit, au bout de peu de temps, par prendre un mouvement de même période que la force perturbatrice *synchronisante*.

La *composition des vibrations* est un problème important en Physique. Plusieurs vibrations *parallèles* sinusoïdales et de même période se composent en une seule vibration unique, dont le vecteur tournant représentatif s'obtient en prenant la résultante géométrique des vecteurs tournants qui représentent les mouvements composants : cette règle du *polygone de Fresnel* comporte de nombreuses applications. Citons, en Électricité, la composition des forces électromotrices d'induction ; en Optique la composition de vibrations d'amplitude égale et dont les phases sont en progression arithmétique : l'étude de l'amplitude résultante, et des maxima et minima qu'elle présente, lorsque varie la raison de cette progression arithmétique, conduit à la discussion d'un problème qui se rencontre dans la théorie des réseaux.

Lorsque les mouvements vibratoires de même période qu'il s'agit de composer sont, non plus parallèles, mais rectangulaires,

le mouvement résultant se fait suivant une trajectoire elliptique, plus ou moins aplatie selon la différence de phase des mouvements composants. Une expérience classique de Lissajous permet, en faisant varier très lentement cette différence de phase, de voir l'ellipse trajectoire se déformer en restant toujours inscrite dans un même rectangle.

La théorie de la polarisation rotatoire conduit à regarder une vibration sinusoïdale rectiligne comme résultant de la composition de deux mouvements circulaires uniformes de même amplitude et de sens inverse : si l'un des mouvements circulaires composants subit une variation de phase φ, la trajectoire rectiligne résultante tourne simplement d'un angle $\frac{\varphi}{2}$.

Si l'on imagine une hélice tournant uniformément autour de l'axe Oz du cylindre de révolution sur lequel elle est enroulée, tout point de cette hélice a sa projection sur un plan parallèle à l'axe animée d'une vibration rectiligne sinusoïdale; mais la phase de cette vibration varie d'un point à l'autre de l'hélice. On obtient ainsi une image cinématique très nette de la *propagation* d'une vibration transversale et de la *structure* d'un rayon lumineux polarisé rectilignement. En deux points de cotes z et $z+\delta$, la différence de phase $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$ est proportionnelle à la différence de parcours δ, qui reçoit en Optique le nom de *différence de marche*. Cette notion, et celle de chemins *optiquement équivalents* dans des milieux inégalement réfringents, permet d'aborder l'étude des interférences. La question de la *différence de marche* est capitale dans cette branche de l'Optique, puisque c'est d'elle que résulte la concordance ou la discordance de phase, et par suite les maxima et minima de lumière. M. Guillet en donne le calcul pour les cas les plus importants qui se rencontrent dans l'étude de la diffraction et la théorie des écrans et des réseaux.

Seconde Partie. Après plusieurs pages consacrées à la flexion plane et aux vibrations transversales d'une verge élastique encastrée à une extrémité (diapason), et à la torsion d'un fil, l'Auteur aborde l'étude des déformations et vibrations d'un milieu élastique continu à trois dimensions. Par les méthodes générales de la Physique mathématique, il établit les trois équations indéfinies aux

dérivées partielles de l'équilibre et du mouvement d'un solide élastique. Ces équations prennent une forme relativement simple dans le cas d'un milieu *isotrope* ne possédant que deux coefficients d'élasticité distincts λ et μ.

Un cas particulièrement intéressant est celui d'un milieu indéfini où se propage un mouvement par *ondes planes*, dans lequel tous les points d'un même plan quelconque perpendiculaire à une direction donnée ont à chaque instant un même déplacement rectiligne : si ce déplacement est normal au plan, l'onde est longitudinale et se propage avec la vitesse $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; s'il est au contraire parallèle au plan, l'onde est dite *transversale* et sa vitesse de propagation est $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, ρ désignant la densité du milieu. Tandis que les solides sont susceptibles de donner ces deux sortes d'ondes, les fluides ne présentent que les premières, leur coefficient d'élasticité transversale μ étant nul.

Les ondes planes dont nous venons de parler et qui se propagent avec une vitesse V constante ne sont pas les seules qui puissent prendre naissance dans un milieu élastique indéfini. On peut y rencontrer aussi des ondes planes harmoniques *stationnaires*, dont l'amplitude u soit donnée en fonction de l'abscisse x par une formule telle que

$$u = b \sin\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right) \sin \omega t,$$

où ω, ψ et b sont des constantes arbitraires. Dans ce mouvement, il y a des plans nodaux $\left(\frac{\omega x}{V} - \psi = k\pi\right)$ où le mouvement est constamment nul, et des plans ventraux $\left[\frac{\omega x}{V} - \psi = (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ où l'amplitude est maxima. Une pareille onde stationnaire peut être regardée comme résultant de la superposition des deux suivantes

$$u_1 = \frac{b}{2} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) - \psi - \frac{\pi}{2}\right],$$

$$u_2 = \frac{b}{2} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) - \psi - \frac{\pi}{2}\right],$$

qui se propagent en sens inverse avec la vitesse V.

Ce sont de telles ondes stationnaires qu'on rencontre en Acoustique dans les tuyaux sonores : les constantes ω et ψ se déterminent alors par les conditions aux extrémités : si l'extrémité d'un tuyau est fermée, le mouvement doit y présenter un nœud (réflexion avec changement de signe); on a, au contraire, un ventre (réflexion sans changement de signe) si l'extrémité du tuyau est ouverte.

Soit une source S émettant des vibrations de période T, qui sont reçues par un récepteur R (oreille, fente d'un spectroscope, etc.). Si R et S sont tous deux fixes, le récepteur reçoit par seconde $N = \frac{1}{T}$ vibrations. Dans le *problème de Döppler*, R et S sont mobiles l'un par rapport à l'autre. Si le récepteur R s'approche de la source fixe S avec une vitesse u (positive ou négative); il recevra, par seconde, $N\left(1 + \frac{u}{V}\right)$ vibrations; il en recevra $\frac{N}{1 - \frac{u}{V}}$ si c'est, au contraire, la source S qui s'approche du récepteur fixe avec la même vitesse u : la période subit donc une diminution apparente, *qui n'est d'ailleurs pas la même dans les deux cas*, à moins qu'on ne néglige le carré $\frac{u^2}{V^2}$ du rapport de la vitesse u à la vitesse V de propagation des ondes. Le phénomène de Döppler dépend donc théoriquement, non seulement du mouvement *relatif* de R par rapport à S, conformément au *principe de relativité*, mais encore de leur mouvement *absolu* par rapport au milieu propagateur supposé en repos.

L'Ouvrage se termine par l'exposé de la théorie générale des ondes lumineuses dans l'hypothèse de l'éther élastique de Fresnel. Les équations de l'Optique des milieux isotropes sont identiques à celles d'un solide élastique pour lequel on aurait $\lambda + 2\mu = 0$ et qui, par suite, ne propagerait pas les ondes longitudinales. Pour les substances biréfringentes, il faut modifier les équations en y introduisant trois coefficients caractéristiques des propriétés du milieu. L'Auteur étudie, dans un tel milieu, la propagation des ondes planes : normalement à une direction donnée, deux ondes planes peuvent se propager avec des vitesses différentes. La surface enveloppe, au bout de l'unité de temps, des plans d'onde de toutes directions qui sont passés au même instant par l'origine des coordonnées et la célèbre *surface d'onde* de Fresnel.

De même que les équations de l'Optique ont pu se déduire de celles de l'Élasticité en y faisant $\lambda + 2\mu = 0$, ce qui permet, avec Fresnel, de regarder l'Optique comme étant, en quelque sorte, un Chapitre de l'Élasticité, de même on peut, avec Maxwell, considérer aussi cette science comme un Chapitre de l'Électromagnétisme : il suffit, en effet, d'éliminer les trois composantes de la force magnétique entre les six équations du champ électromagnétique (les deux *curls* de Maxwell et de Hertz) pour obtenir, entre les trois composantes de la force électrique, trois équations qui ne sont autres que celles même de l'Optique, le pouvoir inducteur et l'indice de réfraction du milieu étant liés par la relation $K = N^2$. C'est la base fondamentale de la théorie électromagnétique de la lumière.

H. Vergne.

LEWENT (Leo). — Konforme Abbildung, herausgegeben von Eugen Jahnke, mit einem Beitrag von Wilhelm Blaschke, mit 40 Abbildungen. (*Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende*, herausgegeben von E. Jahnke : 14). Une brochure, in-8°, VI-118 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912.

L'Ouvrage de L. Lewent forme le quatorzième Volume de la Collection E. Jahnke, destinée surtout aux ingénieurs et aux physiciens. La tâche imposée à l'Auteur n'était pas sans difficulté : il lui fallait exposer, dans un espace restreint, la théorie générale de la représentation conforme, tout en la rendant accessible à des lecteurs n'ayant que des connaissances mathématiques peu étendues. Aussi L. Lewent n'a-t-il pas cherché à développer le théorème d'existence de Riemann : il s'est borné à en exposer quelques conséquences, le théorème lui-même ayant été admis sans démonstration : méthode bien familière aux physiciens.

Dans les deux premiers Chapitres, l'Auteur traite de la représentation géométrique des quantités complexes, définit la représentation conforme et établit les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions d'une variable complexe. Le Chapitre suivant expose les propriétés les plus simples des substitutions linéaires, étudie les singularités des fonctions analytiques, et particulièrement des fonctions algébriques; Lewent montre comment cette théorie devient intuitive par l'emploi des surfaces de Riemann et traite

des applications classiques : $w = z^{\frac{1}{\alpha}}$, $w = z^2$, $w = \alpha z + \frac{\beta}{z}$; il termine en donnant quelques représentations usuelles déduites de fonctions périodiques élémentaires. Le Chapitre IV renferme l'énoncé du théorème d'existence de Riemann, l'établit dans le cas du cercle au moyen de l'intégrale de Poisson et se termine par l'étude du principe de Schwarz. Enfin, dans le Chapitre V (rédigé par M. Blaschke en raison de la mort de M. Lewent), nous passons à la représentation conforme sur l'aire d'un triangle, d'un polygone, et en particulier d'un rectangle, avec, comme cas particulier, la représentation classique au moyen des fonctions elliptiques.

R. Garnier.

BORDEAUX (J.). — Étude raisonnée de l'aéroplane et Description critique des modèles actuels. Préface de M. Laurent Séguin, 1 vol. gr. in-8, VI-497 pages, avec 171 figures et 26 planches. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

La valeur technique du présent Ouvrage a pour garants la profession de l'Auteur, spécialisé dans l'étude des brevets d'invention, et l'autorité de M. Séguin, le père du moteur Gnome, qui a écrit la Préface.

C'est en visitant les expositions du Salon de l'Aviation que M. Bordeaux s'est décidé à composer « un Livre qui dise ce que, en somme, tout homme devrait savoir sur la question de l'aéroplane, un Ouvrage complet, théorique et pratique ».

Il s'agit donc surtout d'une œuvre de vulgarisation; mais, dans l'état actuel de nos connaissances en matière d'aviation, à de bien rares exceptions près, il n'y a guère de différence entre les livres prétendus scientifiques et les autres. Ce qu'il faut surtout demander aux auteurs, c'est un esprit critique toujours en éveil. A cet égard, on jugera de la tendance de M. Bordeaux par son aphorisme : « Je me méfie des ingénieurs, parce que j'ai vu qu'ils n'appliquent pas les principes qu'ils savent, et des empiriques, parce qu'ils ne savent pas les principes qu'il faut appliquer. » Cette méfiance paraît légitime quand on constate combien peu de

temps a duré en aviation « l'association de l'ingénieur qui a imaginé l'outil et de l'ouvrier qui s'en sert ».

Si les mathématiciens ne sont pas dispensés par le Livre actuel de méditer les travaux de Greenhill, Cisotti, ..., sur l'application des théories de Helmholtz et Kirchhoff aux courants aériens, ceux de Bryan, Bothezat..., sur les délicats problèmes de la stabilité de l'équilibre dynamique de l'aéroplane, ils ont du moins un moyen rapide de s'initier à la manière dont les questions se sont posées et à la première approximation un peu grossière dont on a dû se contenter pour les résoudre.

L'Ouvrage comprend quatre Sections :

La *première Section* a pour objet la *résistance de l'air* au mouvement : 1° des plaques ou surfaces cylindriques ; 2° des hélices ou surfaces hélicoïdales. On y trouve, pour le premier cas, un historique complet des recherches expérimentales, l'étude détaillée des travaux les plus saillants, notamment de ceux d'Eiffel, et l'interprétation empirique des résultats ; pour le second, les procédés d'essais du Laboratoire de Koutchino, de ceux du Conservatoire des Arts et Métiers et du Parc de Chalais-Meudon, et les tentatives de théorie de Vallier et de Drzewiecki. La dernière a, il est, vrai, été contestée, mais les vues de M. Sée n'ont été publiées qu'après l'impression du Livre de M. Bordeaux.

La *deuxième Section*, assez brève, intitulée *les machines à voler*, est consacrée aux orthoptères et aux hélicoptères : elle contient, avec la description de quelques types d'appareils, les aperçus théoriques de Vallier et de Charles Renard.

La *troisième Section* comprend *l'étude abstraite de l'aéroplane :* on y examine successivement le mouvement du centre de gravité dans un plan vertical, puis les petits mouvements autour de ce centre (stabilités longitudinale et transversale), enfin le virage. Les conclusions donnent une base de classification des appareils.

La *quatrième Section*, la plus étendue (elle comprend 200 pages) et la plus originale, s'occupe de la *réalisation matérielle* des aéroplanes. La multiplicité des détails techniques exige qu'on procède avec ordre. On étudie donc successivement : 1° les pièces rigides (qualités des matériaux utilisés, organisation de la carcasse, calcul des pièces, disposition des ailes) ; 2° les éléments mobiles (organes de réglage, de conduite et de stabilité, de départ et

d'atterrissage); 3° le moteur (classification, description des types caractéristiques : Renault, Esnault-Pelterie, Gnome..., indications sommaires sur l'équilibrage); 4° les hélices (projet, construction).

Un Appendice contient l'indication de quelques idées récentes et une conclusion vibrante donne aux aviateurs et aux constructeurs des conseils généraux très judicieux.

Signalons en particulier, dans la dernière Section, le souci de l'influence des percussions et des vibrations causées par les rafales sur la capacité de résistance à donner aux organes.

L'encyclopédie de M. Bordeaux est remplie de schémas et de graphiques ingénieux. D'une lecture aisée, d'une science discrète et sûre, elle dispense presque d'avoir recours aux revues spéciales. Enfin, en prêchant au pilote téméraire une prudence éclairée, et en se montrant dur pour le constructeur commerçant qui s'arrête à des types d'appareils qui ont volé sans chercher à les améliorer, l'Auteur pourrait bien contribuer à réduire le tribut annuel du nouveau Minotaure.

A. Boulanger.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Flammarion (Camille). — *Annuaire astronomique et météorologique pour* 1913, exposant l'ensemble de tous les phénomènes célestes observables pendant l'année. In-12, 400 p., 130 fig., cartes et diagramme. Paris, E. Flammarion. 1 fr. 50.

Guimaraës (R.). — *Les Mathématiques en Portugal.* Appendice II. Gr. in-8, 107 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet v. *Carl Orthmann.* Hrsg. v. *Emil Lampe.* 41. Bd. Jahrg. 1910. In 3 Heften. 2. Heft. Gr. in-8, IV et 545-752 p. Berlin, G. Reimer. 8 m.

Osgood (W.-F.). — *Lehrbuch der Funktionentheorie.* I. Bd. mit 158 fig. 2. Aufl. XII-766 p. New York, G.-E. Stechert et Co. 4 d. 50.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PERRON (Oskar). — Die Lehre von den Kettenbrüchen. (*Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*. Mit einschluss ihrer Anwendungen. Band XXXVI.). 1 vol. in-8, XII-520 pages, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

1. L'Auteur s'est proposé de réunir en un seul Livre tout ce qui a trait aux fractions continues. Son exposé tient en deux parties; l'une est élémentaire et arithmétique, l'autre contient ce qui touche à la théorie des fonctions. L'analyse serrée qui va suivre montrera nettement l'intérêt et l'utilité de ce Livre assez étendu, où se révèlent de grandes qualités de clarté, d'ordre et de méthode, sur un sujet souvent difficile et délicat.

2. Pour la fraction continue limitée

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}},$$

l'Auteur adopte la notation commode

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

Il indique la méthode pour former les réduites $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, démontre les formules de récurrence

$$\begin{aligned} A_\nu &= b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \\ B_\nu &= b_\nu B_{\nu-1} - a_\nu B_{\nu-2} \end{aligned} \qquad (\nu \geq 2),$$

introduit avec Th. Muir les symboles

$$A_\nu = K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_\nu \\ b_0, b_1, \ldots, b_\nu \end{pmatrix}, \qquad B_\nu = K\begin{pmatrix} a_2, a_3, \ldots, a_\nu \\ b_1, b_2, \ldots, b_\nu \end{pmatrix},$$

donne des expressions de A_ν, B_ν, en particulier au moyen des

continuants,

$$A_\nu = \begin{vmatrix} b_0 & -1 & & & & \\ a_1 & b_1 & -1 & & & \\ & a_2 & b_2 & -1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{\nu-1} & b_{\nu-1} & 1 \\ & & & & a_\nu & b_\nu \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad B_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial b_0}.$$

Il en déduit que

$$b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \ldots + \frac{a_1|}{|b_0} = \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}, \qquad b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \ldots + \frac{a_2|}{|b_1} = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}}.$$

Si l'on pose $x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}$, il en résulte que

$$x_0 = A_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} A_{\nu-1} x_{\nu+2}, \qquad x_1 = B_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} B_{\nu-1} x_{\nu+2},$$

et l'on en conclut des identités telles que

$$K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_{\nu+\lambda-1} \\ b_0, b_1, \ldots, b_{\nu+\lambda-1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{\lambda-1} \\ b_0, b_1, \ldots, b_{\lambda-1} \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} a_{\lambda+1}, \ldots, a_{\lambda+\nu-1} \\ b_\lambda, b_{\lambda+1}, \ldots, b_{\lambda+\nu-1} \end{pmatrix}$$
$$+ a_\lambda K\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{\lambda-2} \\ b_0, b_1, \ldots, b_{\lambda-2} \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} a_{\lambda+2}, \ldots, a_{\lambda+\nu-1} \\ b_{\lambda+1}, b_{\lambda+2}, \ldots, b_{\lambda+\nu-1} \end{pmatrix}$$

3. Imaginons maintenant que la fraction continue soit illimitée. Si l'on a

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \xi,$$

la fraction continue est dite *convergente;* si l'on a

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = 0,$$

la fraction est dite *non essentiellement divergente*. Sinon, elle est *essentiellement divergente*.

Une fraction continue *régulière* est celle où tous les a_k sont égaux à 1. En étudiant les fractions continues régulières limitées, où les b sont des nombres naturels, et dont les réduites sont des fractions irréductibles, on est amené comme application à s'occuper de la résolution en nombres entiers de l'équation $px - qy = r$, où p, q, r sont des nombres entiers.

Si, en utilisant la notation $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ pour représenter une

fraction continue limitée régulière,

$$(b_0, b_1, \ldots, b_n) = \frac{A_n}{B_n},$$

on a aussi

$$(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0) = \frac{A_n}{A_{n-1}} \qquad \text{et} \qquad (b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0) = \frac{B_n}{B_{n-1}}.$$

Les deux premières fractions continues $(b_0, \ldots, b_n)$ et $(b_n, \ldots, b_0)$ sont dites *inverses*. La fraction $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, b_0)$ s'appelle *symétrique*.

Pour qu'une fraction $\frac{P}{Q}$ $(P > Q > 1)$ donne naissance à une fraction continue symétrique il faut et il suffit que $Q^2 \pm 1$ soit divisible par P; et l'on déduit de là que si un nombre entier est divisible par une somme de deux carrés premiers entre eux, il est lui-même la somme de deux carrés premiers entre eux.

4. Les fractions continues régulières illimitées sont convergentes. Leur limite est un nombre irrationnel; réciproquement, tout nombre irrationnel est développable en fraction continue régulière illimitée.

Les réduites approchent de plus en plus de la limite ξ_0, en oscillant de part et d'autre de cette limite. D'une façon plus précise, on a

$$\left| \xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right| < \frac{1}{B_{\nu-1}^2}.$$

Si une fraction rationnelle $\frac{p}{q}$ est telle que

$$\left| \xi_0 - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

c'est une réduite de ξ_0. Il en est de même si

$$|p^2 - \xi_0^2 q^2| < \xi_0 \quad \text{(Legendre)}.$$

Ajoutons que si l'on a

$$\xi_0 = \frac{P\omega - R}{Q\omega + S}, \qquad \omega > 1, \qquad |PS - QR| = \pm 1, \qquad Q > S > 0,$$

$\frac{R}{S}$ et $\frac{P}{Q}$ sont deux réduites consécutives de ξ_0. Ici intervient la recherche des nombres rationnels les plus simples qui approchent

le plus de l'irrationnelle ξ_0, et s'introduit la notion de *nombres irrationnels équivalents*. On appelle ainsi deux nombres irrationnels β, γ, tels que

$$\gamma = \frac{a\beta + b}{c\beta + d},$$

a, b, c, d étant des nombres entiers tels que

$$ad - bc = 1.$$

Deux nombres équivalents à un troisième sont équivalents entre eux. La condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres ξ_0, η_0 soient équivalents est que leurs développements en fraction continue aient les mêmes quotients incomplets à partir d'un certain rang. Comme application, on démontre qu'un nombre entier de la forme $a^2 + 2\varepsilon b^2$ où $\varepsilon^2 = 1$, a et b étant premiers entre eux, ne peut avoir que des diviseurs de la forme $\alpha^2 + 2\varepsilon\beta^2$ (Lagrange). Tout diviseur impair d'un nombre entier de la forme $a^2 + 3b^2$, où a et b sont premiers entre eux, est aussi de la forme $\alpha^2 + 3\beta^2$.

5. On sait que les fractions continues régulières *périodiques* sont dites périodiques *pures*, ou périodiques *mixtes* suivant que la période commence ou non au premier quotient incomplet. Leur valeur est racine d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers. C'est un nombre irrationnel *quadratique*. Réciproquement, toute irrationnelle quadratique se développe en fraction continue régulière périodique. Une irrationnelle quadratique est dite *réduite* lorsqu'elle est plus grande que 1, tandis que sa conjuguée (racine de la même équation du deuxième degré, à coefficients entiers) est comprise entre 0 et 1. Une fraction continue régulière périodique pure définit une irrationnelle quadratique réduite et réciproquement (Galois). Si $\xi_0 = |\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}|$ est une fraction continue régulière périodique pure et si η_0 est sa conjuguée, on a

$$-\frac{1}{\eta_0} = |\overline{b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_0}|.$$

Les fractions continues régulières de deux irrationnelles quadratiques conjuguées ont des périodes inverses l'une de l'autre. En particulier, pour la racine carrée d'un nombre rationnel, on

trouve une fraction continue régulière de la forme

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, \overline{b_2, b_1, 2b_0}];$$

réciproquement, une telle fraction continue a pour valeur la racine carrée d'un nombre rationnel plus grand que 1.

L'étude des développements en fractions continues régulières des racines carrées des nombres entiers amène à l'équation de Pell. D étant un nombre entier, l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ est toujours résoluble en nombres entiers : si $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ est la réduite du $\nu^{\text{ième}}$ ordre de $\sqrt{D}$, et k le nombre des termes de la période, l'ensemble de toutes les solutions est donné par

$$x = A_{nk-1}, \qquad y = B_{nk-1},$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$ pour k pair, $n = 2, 4, 6, \ldots$, pour k impair. Au contraire, l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ n'est résoluble que si D est la somme des carrés de deux nombres entiers premiers entre eux. Des trois équations

$$x^2 - Dy^2 = -1, \qquad x^2 - Dy^2 = 2, \qquad x^2 - Dy^2 = -2,$$

l'une au moins est résoluble (exception faite pour $D = 2$). Si le non reste quadratique D est la puissance d'un nombre premier impair, ou le double d'une telle puissance, une seule des trois équations précédentes est résoluble.

6. Par *suite arithmétique du $m^{\text{ième}}$ ordre*, on entend une suite telle que la suite des $m^{\text{ièmes}}$ différences soit la première qui ait tous ses termes égaux. Cela posé, soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0(0), & \varphi_0(1), & \varphi_0(2), & \ldots, \\ \varphi_1(0), & \varphi_1(1), & \varphi_1(2), & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ \varphi_{k-1}(0), & \varphi_{k-1}(1), & \varphi_{k-1}(2), & \ldots, \end{array}$$

k suites d'ordres quelconques ; on appelle *fraction continue d'Hurwitz* la fraction

$$[b_0, \ldots, b_{h-1}, \varphi_0(0), \varphi_1(0), \ldots, \varphi_{k-1}(0),$$
$$\varphi_0(1), \varphi_1(1), \ldots, \varphi_{k-1}(1), \varphi_0(2), \varphi_1(2), \ldots, \varphi_{k-1}(2), \ldots],$$

ou, plus brièvement,

$$[b_0, \ldots b_{h-1}, \overline{\varphi_0(\lambda), \ldots, \varphi_{k-1}(\lambda)}]_{\lambda=0}^{\infty}.$$

Elle jouit de cette propriété que si

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d},$$

où a, b, c, d sont des nombres rationnels entiers, si ξ_0 se développe en fraction continue d'Hurwitz, il en sera de même de η_0, et les ordres des suites arithmétiques sont les mêmes, abstraction faite toutefois des suites d'ordre zéro, qui pourraient exister dans l'une des fractions continue et non dans l'autre.

Un nombre $[b_0, b_1, b_2, \ldots] = \xi_0$ est appelé *nombre de Liouville* quand, à chaque nombre n, on peut faire correspondre un nombre ν tel que l'on ait

$$b_{\nu+1} > B_\nu^n;$$

ξ_0 est un nombre *transcendant*. Si

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d},$$

a, b, c, d étant des nombres entiers, et si ξ_0 est un nombre de Liouville, η_0 est aussi un nombre de Liouville. M. Maillet a indiqué d'autres fractions continues qu'il appelle *quasi-périodiques*, et qui, sous certaines conditions, donnent aussi des nombres transcendants.

7. Enonçons d'abord le théorème de convergence de Tietze : quand les éléments de la fraction continue

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

sont des nombres réels quelconques satisfaisant aux conditions

$$|a_\lambda| = 1, \qquad b_\lambda \geq 1, \qquad b_\lambda + a_{\lambda+1} \geq 1, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

on a

$$B_\lambda \geq 1, \qquad \lim_{\lambda = \infty} B_\lambda = \infty,$$

et la fraction continue est convergente. Sa valeur est comprise entre b_0 (exclu) et $b_0 + a_1$ (inclus).

Une fraction limitée ou illimitée

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots.$$

avec des éléments entiers est dite *demi-régulière* lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes :

$$|a_\nu| = 1 \quad \text{pour} \quad \nu > 1,$$
$$b_\nu \geqq 1, \quad b_\nu + a_{\nu+1} \geqq 1 \quad \text{pour} \quad \nu \geqq 1.$$

Dans le cas où elle est limitée, et a, en outre du terme du début, au moins un terme, le dernier dénominateur partiel est plus grand que 1 ; dans le cas où elle est illimitée, on a une infinité de fois $b_\nu + a_{\nu+1} \geqq 2$.

Tout nombre réel ξ_0 est développable d'une seule façon en fraction continue demi-régulière (avec des numérateurs partiels ± 1 donnés). Cette fraction aura un nombre fini ou infini de quotients incomplets suivant que ξ_0 est rationnel ou irrationnel. Réciproquement, toute fraction continue demi-régulière représente un nombre réel.

La fraction irréductible $\frac{m}{n}$, $n > 0$, admet n développements en fractions continues demi-régulières. Les réduites sont encore des fractions irréductibles. On peut d'ailleurs changer une fraction continue demi-régulière en une fraction continue régulière.

Une fraction continue demi-régulière

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots,$$

telle qu'à partir d'une certaine valeur de ν on ait toujours

$$b_{\nu+k} = b_\nu, \qquad a_{\nu+k+1} = a_{\nu+1},$$

est dite *périodique*, périodique pure si les conditions sont déjà vérifiées pour $\nu = 0$; autrement, périodique mixte.

Une fraction continue demi-régulière périodique définit un nombre irrationnel quadratique. Réciproquement, si, dans le développement d'une irrationnelle quadratique en fraction continue demi-régulière, la suite des numérateurs des quotients incomplets a été choisie périodique, la fraction continue sera elle-même périodique.

On appelle, en particulier, *réduites* les fractions continues demi-régulières où tous les a_ν sont égaux à -1.

Par fraction continue demi-régulière *d'après les entiers les*

plus proches (nach nächsten Ganzen), on entend une fraction

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

telle qu'on ait

$$b_\nu \geqq 2, \quad b_\nu + a_{\nu+1} \geqq 2 \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

le dernier dénominateur, b_n, s'il y en a un, doit seulement vérifier la condition $b_n \geqq 2$.

Parmi toutes les fractions demi-régulières en lesquelles peut se développer un nombre rationnel, il n'y en a pas qui ait des termes moindres que celle d'après les entiers les plus proches. La fraction continue d'après les entiers les plus proches relative à une irrationnelle quadratique est toujours périodique.

Une fraction continue demi-régulière, limitée ou illimitée

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

est dite *singulière*, quand, pour $\nu > 1$, on a

$$b_\nu > 2, \quad b_\nu + a_\nu > 2.$$

Quand, des deux fractions continues demi-régulières limitées

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}, \qquad b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-2}} + \ldots + \frac{a_2|}{|b_1},$$

la première est d'après les entiers les plus proches, la deuxième est singulière et réciproquement, si la première est singulière, la deuxième est d'après les entiers les plus proches.

Tout nombre réel qui n'est pas équivalent à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est égal à une fraction continue singulière et à une seule (Hurwitz). Si l'on développe un nombre ξ_0 en fraction continue d'après les entiers les plus proches, ou en une fraction continue singulière, chaque réduite $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ est en même temps une réduite de la fraction continue régulière, et l'on a

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{\sqrt{5}-1}{2B_\nu^2}.$$

Le développement en fraction continue singulière pour une irrationnelle quadratique est toujours périodique. Si le nombre

réel ξ_0 n'est ni un entier, ni la moitié d'un nombre entier, parmi ses fractions continues demi-régulières, il y en a une et une seule, qu'on appelle fraction continue *diagonale*, pour laquelle les réduites sont rangées de telle façon que leurs dénominateurs vont en croissant, et leur ensemble coïncide avec l'ensemble de toutes les fractions irréductibles $\frac{C}{D}$, $D > 0$, telles que l'on ait

$$\left|\xi_0 - \frac{C}{D}\right| < \frac{1}{2D^2} \quad \text{(Minkowski)}.$$

La fraction continue diagonale d'une irrationnelle quadratique est périodique.

8. Avec la partie relative à l'analyse et à la théorie des fonctions, nous abordons d'abord les transformations des fractions continues. Quand, par exemple, de deux fractions continues, limitées ou illimitées,

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots \qquad c_0 b_0 + \frac{c_0 c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \ldots + \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu|}{|c_\nu b_\nu} + \ldots$$

où les c_ν représentent des nombres quelconques différents de zéro, l'une est convergente, il en est de même de la deuxième, et la valeur de la deuxième s'obtient en multipliant par c_0 la valeur de la première. Si $c_0 = 1$, les deux fractions continues sont dites *équivalentes*. Deux fractions continues équivalentes ont les mêmes suites de réduites, et réciproquement, si deux fractions continues ont les mêmes suites de réduites, elles sont équivalentes pourvu que les numérateurs des quotients incomplets diffèrent de zéro.

Si $K_0, K_1, K_2, \ldots$, est une suite de nombres quelconque, limitée ou illimitée, si l'on a, en général, $K_{\nu-1} \neq K_\nu$, il existe une fraction continue et une seule (en ne regardant pas comme distinctes deux fractions continues équivalentes) dont les réduites sont précisément $K_0, K_1, K_2, \ldots$

D'une fraction continue illimitée

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots,$$

avec les réduites $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, on peut en déduire une autre

$$\delta_0 + \frac{\gamma_1|}{|\delta_1} + \frac{\gamma_2|}{|\delta_2} + \ldots,$$

ayant pour réduites

$$\frac{A_{n_0}}{B_{n_0}},\quad \frac{A_{n_1}}{B_{n_1}},\quad \frac{A_{n_2}}{B_{n_2}}\quad \ldots \qquad \text{avec} \qquad n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

On dit que la nouvelle fraction continue se déduit de la première par *contraction* (Seidel). Réciproquement, la première se déduit de la deuxième par *extension*.

9. D'après Seidel, la série $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots$ et la fraction continue

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

sont dites *équivalentes* quand on a

$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ainsi, la série

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_\nu + \ldots \qquad (c_\nu \geqq 0 \text{ pour } \nu \geqq 1)$$

et la fraction continue

$$c_0 + \frac{c_1|}{|1} - \frac{\frac{c_2}{c_1}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_2}{c_1}} - \frac{\frac{c_3}{c_2}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_3}{c_2}} - \ldots - \frac{\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}} - \ldots$$

sont équivalentes (Euler et Stern). On a ainsi

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx|}{|1} - \frac{\frac{r-1}{2}x\Big|}{\Big|1 + \frac{r-1}{2}x} - \frac{\frac{r-2}{3}x\Big|}{\Big|1 + \frac{r-2}{3}x} - \frac{\frac{r-3}{4}x\Big|}{\Big|1 + \frac{r-3}{4}x} - \ldots$$

Pour $x < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1-x} + \frac{x|}{|1-x} + \frac{x|}{|1-x} + \ldots,$$

$$\log(1+x) = \frac{x|}{|1} + \frac{1x|}{|2-x} + \frac{4x|}{|3-2x} + \frac{9x|}{|4-3x} + \ldots \quad (-1 < x \leqq +1),$$

$$\operatorname{arctang} x = \frac{x|}{|1} + \frac{1x^2|}{|3-x^2} + \frac{9x^2|}{|5-3x^2} + \frac{25x^2|}{|7-5x^2} + \ldots \quad (-1 < x \leqq +1),$$

$$e^x = 1 + \frac{x|}{|1} - \frac{1x|}{|2+x} - \frac{2x|}{|3+x} - \frac{3x|}{|4+x} - \frac{4x|}{|5+x} - \ldots.$$

10. Le produit fini ou infini $(1+\gamma_0)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)\ldots$, dont

les facteurs sont différents de zéro et différents de 1, est équivalent à la fraction continue

$$1+\gamma_0+\frac{(1+\gamma_0)\gamma_1|}{|1}-\frac{c_2|}{|1+c_2}-\frac{c_3|}{|1+c_3}-\frac{c_4|}{|1+c_4}-\dots$$

où

$$c_\nu=(1+\gamma_{\nu-1})\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu-1}}\qquad(\nu=2,3,4,\dots).$$

On trouve ainsi, par exemple,

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}=1-\frac{x|}{|1}+\frac{1(1-x)|}{|x}-\frac{1(1+x)|}{|1-x}-\frac{2(2-x)|}{|x}$$
$$+\frac{2(2-x)|}{|1-x}+\frac{3(3-x)|}{|x}-\frac{3(3+x)|}{|1-x}+\dots$$

La transformation de Bauer et Muir aboutit à la proposition suivante : si les deux fractions continues illimitées

$$\rho_0-\rho_1\alpha_1-\frac{\alpha_1(1+\rho_1\beta_1)|}{|\beta_1-\rho_2\alpha_2}+\frac{\alpha_2(1+\rho_2\beta_2)|}{|\beta_2-\rho_3\alpha_3}-\dots$$
$$\rho_0+\frac{\alpha_1|}{|\beta_1}-\frac{\alpha_2(1-\rho_1\beta_1)|}{|\beta_2-\rho_1\alpha_2}-\frac{\alpha_3(1+\rho_2\beta_2)|}{|\beta_3-\rho_2\alpha_3}-\dots$$

ont des éléments positifs, α_ν, β_ν, ρ_ν étant réels, et convergent toutes les deux, elles convergent vers la même valeur. On tire de là, comme applications, des développements tels que

$$1+\frac{2|}{|4k-1}+\frac{1.3|}{|4k}-\frac{3.5|}{|4k}+\frac{5.7|}{|4k}-\dots=\frac{k}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

ou

$$\int_0^1\frac{t^m\,dt}{1+t}=\frac{1|}{|2m+1}+\frac{1|}{|2m+1}+\frac{4|}{|2m+1}-\frac{9|}{|2m+1}+\dots$$
$$(2m+1>0).$$

11. Nous passons aux critères de convergence ou de divergence. Voici d'abord une définition : une fraction continue convergente

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}-\dots\qquad(a_\nu\neq 0)$$

est dite *convergente sans réserves* quand elle reste convergente si l'on supprime autant qu'on voudra des éléments initiaux, c'est-

à-dire quand toutes les fractions

$$b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \ldots$$

sont convergentes. Autrement, on dit qu'elle est convergente avec réserves (Pringsheim). Dans le cas où elle est convergente sans réserves, sa valeur est différente de celles de ses réduites.

On réunit dans une même classe les fractions continues convergentes et les non essentiellement divergentes, et on les appelle fractions continues *convergentes dans le sens étendu.*

Si l'une des deux fractions continues

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots, \quad b_1 + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots \qquad (a_\nu \neq 0),$$

est convergente dans le sens étendu, d'abord, il en est de même de l'autre, et même l'une d'entre elles au moins sera convergente dans le sens restreint.

D'après Broman, la fraction continue

$$b_0 + \frac{a_1|}{|0} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|0} + \frac{a_4|}{|b_4} + \frac{a_5|}{|0} + \frac{a_6|}{|b_6} + \frac{a_7|}{|0} + \ldots$$

est toujours divergente.

Si la série $\sum_\nu |b_\nu|$ est convergente, la fraction continue

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots$$

est divergente; elle n'est même pas convergente dans le sens étendu. Alors, si $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ sont les limites $A_{2\nu}$, $A_{2\nu+1}$, $B_{2\nu}$, $B_{2\nu+1}$, pour $\nu = \infty$, on a

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_1 = 1.$$

Si les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ sont tous positifs, la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction continue

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots$$

soit convergente est que la série $\sum_\nu (b_\nu)$ soit divergente.

Si la fraction continue

$$a_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots$$

a tous ses éléments positifs, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit convergente est que l'une au moins des deux séries

$$\sum_{\nu}\left(\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} b_{2\nu}\right), \qquad \sum_{\nu}\left(\frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_3 a_5 \ldots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1}\right)$$

soit divergente. La fraction continue précédente où l'on pourra supposer $b_\nu = 0$ est convergente si la série $\sum_{\nu}\sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ est divergente, etc.

12. J'arrive au cas où les éléments sont réels.

Si les éléments de la fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots$$

sont réels et satisfont aux inégalités

$$b_\nu \geqq |a_\nu| > 0 \qquad b_\nu \geqq |a_\nu| + 1 \qquad \text{pour} \qquad a_{\nu+1} < 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

l'une des deux conditions suivantes suffit pour qu'elle soit convergente : 1° à partir d'un certain rang tous les a_ν sont négatifs; 2° des trois séries

$$\sum_{a_\nu > 0}\sqrt{a_\nu}, \qquad \sum_{a_{\nu+1} > 0}\sqrt{b_\nu - |a_\nu|}, \qquad \sum_{a_{\nu+1} < 0}\sqrt{b_\nu - |a_\nu| - 1},$$

l'une au moins est divergente.

Une fraction continue

$$b_0 - \frac{a'_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a'_3|}{|b_3} + \ldots + \frac{a_{2\nu}|}{|b_{2\nu}} - \frac{a'_{2\nu+1}|}{|b_{2\nu+1}} + \ldots$$

est dite *alternée*, si l'on a

$$b_\nu > 0, \qquad a_{2\nu} > 0, \qquad a'_{2\nu+1} > 0.$$

Supposons qu'on ait

$$(b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1} a'_{2\nu+1} \qquad (\nu = 1);$$

s'il y a égalité pour toutes les valeurs impaires de ν, la fraction continue est divergente; mais s'il y a inégalité pour au moins une valeur (impaire) de ν, et si, pour abréger, on pose

$$c_\nu = a'_{2\nu+1} a_{2\nu} b_{2\nu-3} b_{2\nu+1}, \qquad d_\nu = (b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1} a'_{2\nu+1},$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction continue soit convergente est que l'une au moins des deux séries

$$\sum_\nu \left(\frac{c_3 c_5 \ldots c_{2\nu-1}}{c_4 c_6 \ldots c_{2\nu}} d_{2\nu} \right), \qquad \sum_\nu \left(\frac{c_2 c_4 \ldots c_{2\nu}}{c_3 c_5 \ldots c_{2\nu+1}} d_{2\nu+1} \right)$$

soit divergente.

La fraction continue est convergente si la série

$$\sum_\nu \sqrt{\frac{d_\nu d_{\nu+1}}{c_{\nu+1}}}$$

est divergente. Elle est encore convergente si

$$b_{2\nu} b_{2\nu+1} > a'_{2\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

et si, des deux séries

$$\sum_\nu \sqrt{\frac{a_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1} b_{2\nu-1}}}, \qquad \sum_\nu \sqrt{\frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1} - a'_{2\nu+1}}{a'_{2\nu+1}}},$$

l'une au moins est divergente.

13. Relativement à l'irrationalité de certaines fractions continues, mentionnons que si les éléments de la fraction continue illimitée

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

sont des nombres rationnels entiers qui, à partir d'un certain indice satisfont aux inégalités

$$b_\nu > |a_\nu|, \qquad b_\nu > |a_\nu| + 1 \qquad \text{pour} \qquad a_{\nu+1} < 0,$$

la fraction continue est convergente, et sa valeur est un nombre irrationnel, excepté quand, à partir d'une certaine valeur de ν, on a toujours

$$a_\nu \leq 0, \qquad b_\nu = |a_\nu| + 1.$$

Ainsi

$$2 + \frac{2|}{|2} + \frac{3|}{|3} + \frac{4|}{|4} + \cdots$$

est irrationnel. (C'est le nombre e.)

14. Voici un critérium de convergence dû à Pringsheim : si les éléments de la fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

satisfont aux inégalités $|b_\nu| \geq |a_\nu| + 1$, la fraction continue est convergente, et sa valeur absolue est inférieure ou égale à 1. Dans le cas des numérateurs a_ν tous différents de zéro, il y a convergence si l'on a

$$|b_1| \geq |a_2| \quad \text{et} \quad |b_\nu| \geq |a_{\nu+1}| + 1 \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots),$$

à condition qu'il y ait quelque inégalité.

La fraction continue avec éléments complexes quelconques

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

est convergente quand il existe une suite de nombres positifs p_1, p_2, p_3, ... tels que l'on ait

$$p_1 \leq 1, \qquad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leq \frac{p_{\nu-1}}{p_{\nu-1} p_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

à condition qu'il y ait quelque inégalité. En spécialisant les nombres p_ν on obtient des critériums de convergence remarquables. Par exemple, il sera suffisant, pour la convergence, qu'on ait

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leq \frac{1}{4} \qquad (\nu \neq 2),$$

les $a_{2\alpha}$ étant différents de zéro. Si l'on a

$$\left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leq 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

la fraction continue

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

est convergente.

La convergence d'une fraction continue dont les éléments sont fonctions d'une ou plusieurs variables est dite *uniforme* lorsque ses réduites, dans le champ considéré des variables, tendent uniformément vers leur limite, c'est-à-dire qu'on a

$$\left| \frac{A_\nu}{B_\nu} - \lim_{\nu = \infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} \right| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad \nu > n,$$

dans tout champ où $B_\nu \neq 0$. Cela posé, quand les éléments de la fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots$$

sont des fonctions d'un nombre quelconque de variables, elle est uniformément convergente dans tout champ dans lequel les conditions suivantes sont remplies :

1° $$|b_\nu| > |a_\nu| + 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

2° la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (|b_1| - 1)(|b_2| - 1) \ldots (|b_\nu| - 1)$$

est uniformément divergente.

Le critérium de convergence de Vleck et Jensen est le suivant : Posons $b_\nu = |b_\nu| e^{i\vartheta_\nu}$; s'il existe un nombre positif ε tel que l'on ait, pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots,$

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \vartheta_\nu < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

et, si les nombres b_ν ne sont pas tous nuls, les réduites d'indices pairs de la fraction continue

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots$$

tendent vers une limite; il en est de même des réduites d'ordre impair. La fraction continue est convergente ou divergente suivant que la série $\sum_\nu |b_\nu|$ est divergente ou convergente.

Si les b_ν sont des fonctions d'un nombre quelconque de variables, et si la série $\sum_\nu |b_\nu|$ est uniformément divergente, si l'une au

moins des fonctions $b_1, b_3, b_5, \ldots$, n'est pas identiquement nulle, et si la première qui ne s'évanouit pas identiquement reste dans tout le domaine plus grande en valeur absolue qu'un nombre positif convenablement choisi, la fraction continue est uniformément convergente dans le domaine envisagé des variables.

Si les b_ν sont des nombres réels non négatifs; si, en particulier, les $b_{2\nu+1}$ ne s'évanouissent pas tous; si, en outre, la série $\sum_\nu (b_\nu)$ est divergente, en posant

$$x = re^{i\varphi}, \qquad r > 0 \qquad (\varphi \text{ réel}),$$

la fraction continue

$$\frac{x|}{|b_1} + \frac{x|}{|b_2} + \frac{x|}{|b_3} + \ldots$$

est uniformément convergente dans tout domaine tel qu'on ait

$$0 < r \leqq R, \qquad -\pi + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \qquad \text{(Stieltjes)}.$$

15. Une fraction continue

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

est dite *périodique* si, à partir d'une certaine valeur de ν, on a

$$b_{\nu+k} = b_\nu, \qquad a_{\nu+k+1} = a_{\nu+1};$$

k est le nombre des termes de la période; si $\nu = 0$, la fraction continue est dite *périodique pure;* sinon, elle est *périodique mixte.*

Pour qu'une fraction continue périodique pure soit convergente, il faut d'abord que l'on ait $B_{k-1} \neq 0$; il faut ensuite que les racines x_1, x_2 de l'équation du deuxième degré

$$B_{k-1}x^2 + (a_k B_{k-2} - A_{k-1})x - a_k A_{k-2} = 0,$$

soient égales ou satisfassent aux conditions

$$|B_{k-1}x_1 + a_k B_{k-2}| > |B_{k-1}x_2 + a_k B_{k-2}|,$$
$$A_\lambda - x_2 B_\lambda \neq 0, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-2;$$

la valeur de la fraction continue est alors x_1.

Si, dans la fraction continue

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots,$$

on suppose qu'on a

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a, \qquad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b,$$

on dit que cette fraction continue *est périodique à la limite*. Si $a_\nu \neq 0$, quand les racines ρ_1 et ρ_2 de l'équation $\rho^2 - b\rho - a = 0$ ont des valeurs absolues inégales, la fraction continue périodique à la limite est convergente au moins dans le sens étendu. Pour ν suffisamment grand, la fraction

$$b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \ldots$$

converge alors dans le sens restreint, et l'on a

$$\lim_{\nu=\infty}\left(b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \ldots\right) = \rho_1,$$

où ρ_1 désigne la plus grande en valeur absolue des racines ρ_1, ρ_2.

De même, soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ deux séries de fonctions d'un nombre quelconque de variables définies dans un certain champ, qui convergent d'une façon uniforme vers deux fonctions limites, de sorte qu'on ait

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a, \qquad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b;$$

supposons qu'il existe un nombre positif $\mathfrak{S} < 1$, et deux nombres positifs, c et C, tels que dans tout le champ on ait

$$c \leq |\rho_1| \leq C, \qquad \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right| \leq \mathfrak{S},$$

ρ_1 et ρ_2 désignant les racines de l'équation $\rho^2 - b\rho - a = 0$; alors, il existe un nombre n tel que, pour $\nu \geq n$, la fraction continue

$$b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \ldots$$

soit uniformément convergente dans tout le domaine.

16. Si les nombres a_ν, b_ν, x_ν sont liés par la relation récurrente

$$x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

et qu'on ait, en outre,

$$a_\nu x_\nu \neq 0, \qquad \text{pour } \nu \geq 1,$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

est que la série

$$\frac{1}{a_1 x_1 x_2} - \frac{1}{a_1 a_2 x_2 x_3} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 x_3 x_4} - \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4 x_4 x_5} + \ldots$$

diverge de telle façon que la valeur absolue de la somme de ses ν premiers termes grandisse avec ν au delà de toute limite. Comme exemple d'application de ces formules récurrentes, mentionnons qu'en posant

$$\varphi(\alpha, 0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{\beta-1}}{(1+ux)^\alpha} du \qquad (\beta > 0),$$

on a

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta+1)} = 1 + \frac{\alpha x|}{|1} + \frac{(\beta+1)x|}{|1} + \frac{(\alpha+1)x|}{|1} + \frac{(\beta+2)x|}{|1} + \ldots,$$

pour

$$\beta \geq 0, \qquad x > 0, \qquad \alpha \text{ réel}, \qquad \alpha \neq 0, -1, -2, \ldots \qquad \text{(Nielsen)}.$$

17. Une fraction continue limitée

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \ldots + \frac{a_n x|}{|1},$$

lorsqu'on a $a_\nu \neq 0$, représente une fonction rationnelle de x. Elle a un sens en tout point du plan de la variable complexe x, excepté aux pôles de la fonction rationnelle.

A chaque fraction continue de la forme

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \ldots,$$

où l'on a $a_\nu \neq 0$, *correspond* une série $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, qui, lorsque la fraction continue est illimitée, est déterminée

d'une façon univoque par ce fait que, pour chaque valeur de λ, elle coïncide avec le développement de Taylor de la réduite $\frac{A_\lambda(x)}{B_\lambda(x)}$ jusqu'à la puissance x^λ inclusivement; les coefficients de $x^{\lambda+1}$ différeront nécessairement. Si la fonction continue est limitée et a n quotients incomplets, la série de Taylor

$$\frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

a les propriétés ci-dessus pour $\lambda < n$.

Les deux fractions continues

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \ldots + \frac{a_n x|}{|1}, \quad 1 + \frac{a'_1 x|}{|1} + \ldots + \frac{a'_m x|}{|1},$$

$a_\nu \neq 0$, $a'_\nu \neq 0$, ne peuvent représenter la même fonction rationnelle que si $m = n$ et $a_\nu = a'_\nu$, quel que soit ν.

Une série $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ est dite *semi-normale* quand il lui correspond une fraction continue illimitée

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \ldots.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série soit semi-normale est que les déterminants

$$\varphi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_\nu \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{\nu+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \psi_\nu = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_\nu \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{\nu+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix}$$

soient tous différents de zéro; alors, les coefficients de la fonction continue sont

$$a_1 = \varphi_1, \qquad a_{2\nu} = -\frac{\psi_{\nu+1}\varphi_{\nu-1}}{\varphi_\nu \psi_\nu}, \qquad a_{2\nu+1} = -\frac{\varphi_{\nu+1}\psi_\nu}{\psi_{\nu+1}\varphi_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Comme exemple, si $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désigne la série hypergéométrique de Gauss, le rapport $\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}$ correspondra à la fraction continue

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \ldots,$$

avec

$$a_{2\nu} = -\frac{(\beta+\nu)(\gamma-\alpha+\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}, \qquad a_{2\nu+1} = -\frac{(\alpha+\nu)(\gamma-\beta+\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}.$$

De même, prenons la fonction plus générale de Heine

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; u, x) = 1 + \frac{(1-e^{u\alpha})(1-e^{u\beta})}{(1-e^{u})(1-e^{u\gamma})}x$$
$$- \frac{(1-e^{u\alpha})(1-e^{u(\alpha+1)})(1-e^{u\beta})(1-e^{u(\beta+1)})}{(1-e^{u})(1-e^{2u})(1-e^{u\gamma})(1-e^{u(\gamma+1)})}x^2 + \ldots;$$

le rapport $\dfrac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma; u; x)}{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1; u; x)}$ correspondra à la fraction continue

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \ldots.$$

si

$$a_{2\nu} = -e^{u(\alpha+\nu-1)}\frac{(1-e^{u(\beta+\nu)})(1-e^{u(\gamma-\alpha+\nu)})}{(1-e^{u(\gamma+2\nu-1)})(1-e^{u(\gamma+2\nu)})},$$

$$a_{2\nu+1} = -e^{u(\beta+\nu)}\frac{(1-e^{u(\alpha+\nu)})(1-e^{u(\gamma-\beta+\nu)})}{(1-e^{u(\gamma+2\nu)})(1-e^{u(\gamma+2\nu+1)})}.$$

Le développement en série de $\sqrt{1+4ax}$ correspond à

$$1 + \frac{2ax|}{|1} + \frac{ax|}{|1} + \frac{ax|}{|1} + \ldots.$$

celui de $\sqrt{1+4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha}$ à

$$1 + \frac{2x\cos\alpha|}{|1} + \frac{\dfrac{x}{\cos\alpha}|}{|1} + \frac{x\dfrac{\cos(2\alpha)}{\cos\alpha}|}{|1} + \frac{x\dfrac{\cos\alpha}{\cos(2\alpha)}|}{|1}$$
$$+ \frac{x\dfrac{\cos(3\alpha)}{\cos(2\alpha)}|}{|1} + \frac{x\dfrac{\cos(2\alpha)}{\cos(3\alpha)}|}{|1} + \frac{x\dfrac{\cos(4\alpha)}{\cos(3\alpha)}|}{|1} + \frac{x\dfrac{\cos(3\alpha)}{\cos(4\alpha)}|}{|1} + \ldots.$$

18. Toute fraction continue illimitée de la forme

$$1 + \frac{k_1 x|}{|1+e_1 x} + \frac{k_2 x^2|}{|1+e_2 x} + \frac{k_3 x^2|}{|1+e_3 x} + \frac{k_4 x^2|}{|1+e_4 x} + \ldots \qquad (k_\nu \neq 0),$$

est *associée* d'une façon univoque à une série $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, de telle sorte que, pour toute valeur de λ, la série de Taylor relative à la réduite de $\lambda^{\text{ième}}$ ordre coïncide avec elle jusqu'au terme $c_{2\lambda}x^{2\lambda}$ inclusivement. Elle sera dite *fraction continue associée à la série*. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ admette une fraction continue associée est que les déterminants ς_ν soient tous différents de zéro, si l'une

ou l'autre des fractions continues illimitées

$$1 + \frac{a_1 x \,|}{|1} + \frac{a_2 x \,|}{|1} + \frac{a_3 x \,|}{|1} + \ldots,$$

$$1 + \frac{k_1 x \,|}{|1 + e_1 x} + \frac{k_2 x^2 \,|}{|1 + e_2 x} + \frac{k_3 x^2 \,|}{|1 + e_3 x} + \ldots \qquad (k_\nu \neq 0_1),$$

converge uniformément dans un domaine simplement connexe T qui contient l'origine à son intérieur, elle définit à l'intérieur de T une fonction analytique régulière (mais qui n'est jamais rationnelle) qui, à l'intérieur de chaque cercle K tracé de l'origine comme centre, dans le domaine T est aussi égale à la série correspondante à la première fraction continue ou à la série associée à la deuxième fraction continue.

Comme applications de ce théorème, et d'autres analogues, on trouve les développements en fractions continues illimitées de fonctions telles que

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \log(1 + x), \quad \log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad \operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\frac{\operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad e^x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, \quad \ldots.$$

A noter ceci : de la convergence uniforme d'une série on ne peut pas conclure toujours que la fraction continue illimitée correspondante converge uniformément.

19. Si $\psi(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle (a, b), $f(x)$ une fonction continue qui peut avoir aussi des valeurs complexes, la somme

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\mathcal{E}_\nu)[\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu)],$$

où

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \qquad x_\nu \leq \mathcal{E}_\nu \leq x_{\nu+1}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

diffère aussi peu qu'on veut d'une grandeur déterminée, quelle que soit la manière dont on fait tendre vers zéro les intervalles $(x_\nu, x_{\nu+1})$. Cette grandeur est ce qu'on nomme *intégrale de Stieltjes*. On la désigne par $\int_a^b f(x)\,d\psi(x)$.

De même,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \psi(\xi_\nu)[f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)],$$

tend vers une limite qu'on désigne par $\int_a^b \psi(x)df(x)$. L'intégration par parties donne la formule

$$\int_a^b \psi(x)df(x) = \psi(b)f(b) - \psi(a)f(a) - \int_a^b f(x)d\psi(x).$$

Si $\psi(x)$ et $f(x)$ ont des dérivées intégrales $\psi'(x)$, $f'(x)$, on a

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \int_a^b f(x)\psi'(x)\,dx. \qquad \int_a^b \psi(x)df(x) = \int_a^b \psi(x)f'(x)\,dx,$$

où les intégrales des membres de droite sont des intégrales ordinaires.

Si, dans l'intervalle (a, b), les fonctions croissantes $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ pour toutes les valeurs où elles sont continues, ainsi qu'aux limites a, b, ne diffèrent que par une constante additive C, qui pourra être nulle, on a

$$\int_a^b f(x)\,d\psi_1(x) = \int_a^b f(x)\,d\psi_2(x).$$

Cela a lieu aussi pour $b = +\infty$, $a = -\infty$, pourvu que les intégrales aient un sens.

Si, dans un intervalle (a, b), la fonction réelle continue $f(x)$ n'a qu'un nombre fini de zéros (ou n'en a aucun), mais a toujours un signe constant, et si la fonction croissante $\psi(x)$ a une infinité de valeurs pour lesquelles elle est croissante, l'intégrale $\int_a^b f(x)d\psi(x)$ est différente de zéro et a le signe de $f(x)$. Cela est vrai pour $b = +\infty$, $a = -\infty$.

Si $\psi(x)$ dans l'intervalle (a, b) est une fonction croissante avec une infinité de valeurs où elle est croissante, si $f(x)$ est une fonction continue réelle, et si l'on a

$$\int_a^b f(x)\,x^k\,d\psi(x) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

il y a, dans l'intervalle (a, b), au moins n valeurs différentes de x pour lesquelles $f(x)$ s'annule. Cela a lieu aussi pour $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Si $\psi(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle (a, b), l'intégrale $F(z) = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$ définit une fonction analytique régulière pour toute valeur de z qui n'appartient pas à l'intervalle $(-b, -a)$; la même chose a lieu pour $a = -\infty$, $b = +\infty$, pourvu que l'intégrale $\int_a^b d\psi(x)$ ait un sens pour ces limites. Si a et b sont finis, $F(z)$ est régulière au point ∞. Si la partie imaginaire de z est négative, si $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$, on a

$$\frac{\psi(\xi-0)+\psi(\xi+0)}{2} - \frac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2} = \operatorname*{Lim}_{\eta=0} \Re\left[\frac{1}{i\pi}\int_{-\xi-i\eta}^{+a-i\eta} F(z)\,dz\right],$$

$\Re$ veut dire partie réelle; le chemin d'intégration est rectiligne.

Quand $\psi(x)$ est une fonction croissante, avec une infinité de valeurs où elle est croissante, et si toutes les intégrales

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (-x)^{k-1}\,d\psi(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

existent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$ a toujours une fraction continue associée, (A),

$$\frac{k_1|}{|z+e_1} + \frac{k_2|}{|z+e_2} + \frac{k_3|}{|z+e_3} + \ldots,$$

k_1 est positif; les autres k_ν sont négatifs.

20. Voici en quoi consiste le *problème du minimum*. Si $f(x)$ est une fonction continue réelle, $\psi(x)$ une fonction croissante avec une infinité de valeurs pour lesquelles elle est croissante, ces fonctions étant telles que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,d\psi(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,d\psi(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

existent, parmi les polynomes $P_n(x)$ de degré au plus égal à n,

on demande celui pour lequel l'intégrale

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - P_n(x)]^2 \, d\psi(x)$$

est un minimum. C'est

$$P_n = \sum_{\nu=0}^{n} \left[\frac{(-1)^\nu L_\nu(-x)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) L_\nu(-u) \, d\psi(u) \right],$$

où $\frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)}$ est la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue associée à $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$. Des propositions analogues ont lieu pour la fraction continue correspondante, quand elle existe.

21. La proposition de Markoff consiste en ceci : si $\psi(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle fini (a, b), avec une infinité de valeurs où elle est croissante, alors la fraction continue associée à l'intégrale $\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$, pour toutes les valeurs réelles ou complexes de z, en excluant celles de l'intervalle $(-b, -a)$, est convergente et égale à l'intégrale. Un théorème analogue a lieu pour la fraction continue correspondant à l'intégrale.

Soit $\psi(x)$ une fonction constante pour $x \geqq 0$, avec une infinité de valeurs où elle est croissante, telle que toutes les intégrales $\int^{\infty} x^{k-1} d\psi(x)$ existent, de telle sorte que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$ admet toujours une fraction continue correspondante,

$$\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \frac{1|}{|b_5 z} + \frac{1|}{|b_6} + \ldots,$$

avec des coefficients b_ν positifs. Alors, si $\sum_\nu (b_\nu)$ est divergente, la fraction continue est convergente pour toute valeur de z qui n'appartient pas à l'axe des quantités réelles négatives (y compris zéro) et elle est égale à l'intégrale. Si $\sum_\nu (b_\nu)$ est convergente, la fraction continue est divergente pour toute valeur de z (Stieltjes).

Comme exemples, citons les formules

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx}{z+x}$$
$$= \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha+1|}{|1} + \frac{2|}{|z} + \frac{\alpha+2|}{|1} + \frac{3|}{|z} + \frac{\alpha+3|}{|1} + \ldots$$

$\alpha > 0$ (z est assujetti à ne pas être sur l'axe des quantités réelles négatives, y compris zéro);

$$\int_0^\infty \operatorname{cnt} e^{-ty}\,dt = \frac{1|}{|y} + \frac{1^2|}{|y} + \frac{2^2k^2|}{|y} + \frac{3^2|}{|y} + \frac{4^2k^2|}{|y} + \frac{5^2|}{|y} + \ldots,$$
$$\text{pour } 0 < k < 1, \qquad y > 0.$$

22. Pour une *fraction continue de Stieltjes*

$$\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \ldots,$$

$B_\lambda(z)$ a tous ses zéros réels, simples et non positifs; pour λ impair, $B_\lambda(z) = 0$ admet la racine zéro; elle ne l'admet pas quand λ est pair. Si

$$\frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \sum_{j=1}^{\nu}\left(\frac{M_{j\lambda}}{z+x_{j\lambda}}\right), \qquad \nu = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{ou} \qquad \nu = \frac{\lambda+1}{2},$$

on a

$$M_{j\lambda} > 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{\nu}(M_{j\lambda}) = \frac{1}{b_1}.$$

Pour une fraction continue de Stieltjes, convergente dans un domaine fermé simplement connexe du plan des z qui ne contient aucune portion de l'axe des quantités réelles négatives (y compris zéro), $\frac{A_{2\nu}(z)}{B_{2\nu}(z)}$ converge uniformément vers une fonction analytique régulière, $F_0(z)$, $\frac{A_{2\nu-1}(z)}{B_{2\nu-1}(z)}$ converge uniformément vers une fonction analytique régulière $F_1(z)$.

Dans le cas où la série $\sum_\nu(b_\nu)$ est divergente, on a

$$F_0(z) = F_1(z).$$

La fraction continue est donc convergente. Mais si $\sum_\nu(b_\nu)$ est

convergente, $F_0(z)$ et $F_1(z)$ sont deux fonctions méromorphes partout différentes l'une de l'autre, et la fraction continue est divergente pour toute valeur de z.

Pour toute fraction continue de Stieltjes remplissant les conditions ci-dessus, on aura

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} = F_\sigma(z) = \int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} \qquad (\sigma = 0, 1),$$

où $\psi_0(x)$ et $\psi_1(x)$ sont des fonctions croissantes. Les deux intégrales correspondent à la fraction continue de Stieltjes envisagée. La série correspondant à une fraction continue de Stieltjes définit la limite vers laquelle tendent les réduites d'ordre pair, ou d'ordre impair sur toute demi-droite issue de l'origine autre que le demi-axe des quantités réelles négatives. Une fraction continue de Stieltjes a une infinité d'intégrales correspondantes, ou bien une seule, suivant que la série $\sum_\nu (b_\nu)$ est convergente ou divergente; quand $\sum_\nu (b_\nu)$ est divergente, la fraction continue est convergente pour toute valeur de z qui n'appartient pas à l'une des quantités réelles négatives, y compris zéro, et elle est égale à l'intégrale correspondante.

23. J'arrive aux *Tables de Padé*. A chaque série

$$\mathfrak{L}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

$c_0 \neq 0$, et à chaque couple (μ, ν) de la suite $1, 2, 3, \ldots$ correspond un seul couple de polynomes premiers entre eux, $P_{\mu,\nu}(x)$, $Q_{\mu,\nu}(x)$ tels que $P_{\mu,\nu}(0) = c_0$, $Q_{\mu,\nu}(0) = 1$, et qu'il existe une puissance x^λ, $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$ pour laquelle $x^\lambda P_{\mu,\nu}(x)$ soit au plus du $\nu^{\text{ième}}$ degré, $x^\lambda Q_{\mu,\nu}(x)$ du $\mu^{\text{ième}}$ degré, tandis qu'en même temps dans la série formelle $x^\lambda[\mathfrak{L}(x) Q_{\mu,\nu}(x) - P_{\mu,\nu}(x)]$ les puissances de x jusqu'à la $(\mu+\nu)^{\text{ième}}$ inclusivement, disparaissent. On construit une table à double entrée dont les lignes et les colonnes sont numérotées $0, 1, 2, 3, \ldots$ La case $[\mu, \nu]$ sera dans la ligne μ et la colonne ν. Dans cette case $[\mu, \nu]$ est inscrite la fraction $\frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)}$. On obtient ainsi les Tables de Padé.

Dans la Table de Padé correspondant à la série $\mathfrak{L}(x)$, les cases

dans lesquelles est la même fraction irréductible $\frac{P(x)}{Q(x)}$ forment un carré; si $P(x)$ est du $p^{\text{ième}}$ degré, $Q(x)$ du $q^{\text{ième}}$ degré, et si la série $\mathfrak{P}.Q - P$ commence par la puissance de x, $x^{p+q+r+1}$, on doit avoir $r \geqq 0$, et le carré contient $(r+1)^2$ cases,

$$[q+r_1,\ p+r_2), \qquad (r_1, r_2 = 0, 1, \ldots, r).$$

Ici, r peut être infini, ce qui signifie alors que $\mathfrak{P}Q - P$ est identiquement nul.

La condition nécessaire et suffisante pour que la fraction $\frac{P_{q,p}(x)}{Q_{q,p}(x)}$ de la case $[q, p]$ soit *normale* (c'est-à-dire ne se représente plus dans aucune case) est que $P_{q,p}(x)$, $Q_{q,p}(x)$ soient respectivement de degrés p et q et que $\mathfrak{P}.Q_{q,p}(x) - P_{q,p}$ commence par un terme en x^{p+q+1}. Posons

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} c_\nu & c_{\nu-1} & \ldots & c_{\nu-\mu} \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \ldots & c_{\nu-\mu+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \ldots & c_\nu \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c} \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ c_j = 0, \quad \text{pour } j < 0 \\ \Delta_{-1,\nu} = 1 \end{array} \right).$$

La condition nécessaire et suffisante, pour que dans la Table de Padé correspondant à la série $\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ la case $[\mu, \nu]$ soit normale, est que les quatre déterminants $\Delta_{\mu,\nu}$, $\Delta_{\mu-1,\nu+1}$, $\Delta_{\mu-1,\nu}$, $\Delta_{\mu,\nu+1}$ soient différents de zéro.

Une série est dite *normale* quand toutes les fractions de la table sont normales, donc toutes différentes. Alors la Table de Padé est dite *normale*. Il faut, pour cela, que tous les déterminants $\Delta_{\mu\nu}$ soient différents de zéro.

24. Lorsque, dans la Table de Padé correspondant à une série

$$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

parmi les fractions de la suite des cases

$$[0, \sigma], \quad [0, \sigma+1], \quad [1, \sigma+1], \quad [1, \sigma+2],$$
$$[2, \sigma+2], \quad [2, \sigma+3], \quad [3, \sigma+3], \quad \ldots,$$

deux fractions consécutives ne sont jamais identiques, elles sont toutes différentes; on a ainsi les réduites de la fraction continue

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_\sigma x^\sigma + \frac{c_{\sigma+1} x^{\sigma+1} |}{|1} + \frac{a_2 x |}{|1} + \frac{a_3 x |}{|1} + \ldots,$$

où les a_μ sont des constantes dont on donne l'expression. Si $\sigma = 0$, on a la fraction continue correspondant à la série.

Si, parmi les fractions de la suite de cases

$$[0, \sigma], \quad [1, \sigma+1], \quad [2, \sigma+2], \quad [3, \sigma+3], \quad \ldots,$$

deux fractions consécutives ne sont jamais identiques, elles sont toutes différentes les unes des autres, et ce sont les réduites de la fraction continue

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_\sigma x^\sigma + \frac{c_{\sigma+1} x^{\sigma+1} |}{| 1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2 |}{| 1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2 |}{| 1 + l_3 x} + \ldots,$$

où les k_μ et l_μ sont des constantes dont on donne l'expression.

Réciproquement, à chacune des fractions continues de la forme précédente correspond une seule série $\mathfrak{P}(x)$ donnant lieu à la proposition qui vient d'être mentionnée.

25. Relativement à la convergence, on sait peu de chose. Voici, cependant, une importante proposition : la fonction $F(x)$ étant convergente dans le cercle $|x| \leqq R$, abstraction faite de μ pôles simples, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$, intérieurs au cercle, mais dont aucun n'est situé à l'origine, développons $F(x)$ dans le domaine de l'origine par la série de Taylor; construisons la Table de Padé correspondante : les fractions de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ ligne convergent, pour $|x| < R$, vers $F(x)$; elles convergent uniformément vers $F(x)$ pour

$$|x| \leqq R - \varepsilon, \qquad |x - \alpha_j| \geqq \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra (de Montessus de Ballore).

Si $F(x)$ est une fonction méromorphe avec un nombre infini de pôles, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, et soit

$$0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3| < \ldots,$$

si l'on construit la Table de Padé pour la série dont la somme est égale à $F(x)$ dans le domaine de l'origine, en général, la $\mu^{\text{ième}}$ ligne des fractions de la Table pour $|x| < |\alpha_\mu|$ converge vers $F(x)$, en ne supposant pas x en l'un des pôles, et diverge pour $|x| > |\alpha_\mu|$ (de Montessus de Ballore).

26. La fraction continue illimitée

$$b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \ldots,$$

dont les éléments ont la forme

$$a_\nu = \alpha_0 + \alpha_1 \nu + \ldots + \alpha_p \nu^p \qquad (\alpha_p \neq 0),$$
$$b_\nu = \beta_0 + \beta_1 \nu + \ldots + \beta_q \nu^q \qquad (\beta_q \neq 0)$$

est divergente pour $p > 2q + 2$; elle n'est même pas convergente dans le sens étendu. Elle est, au contraire, convergente, au moins dans le sens étendu, dans l'un des trois cas suivants : 1° quand on a $p < 2q$; 2° quand $p = 2q$ et que les nombres $\frac{\beta_q^2 + 4\alpha_p}{\beta_q^2}$ n'appartiennent pas à l'axe des quantités réelles négatives, y compris zéro; 3° quand $p = 2q + 1$ ou $p = 2q + 2$, qu'en même temps on a $\alpha_p > 0$ et que tous les autres α_j, β_j sont réels. Dans les trois cas, la fraction continue est convergente si l'on supprime au début un nombre suffisant de quotients incomplets, et elle est même alors convergente au sens restreint.

De telles fractions continues ont des rapports étroits avec certaines équations différentielles linéaires. C'est en partant de ce point de vue que l'Auteur trouve la valeur de la fraction continue

$$c + \frac{a + b\,|}{|\,c + d} + \frac{a + 2b\,|}{|\,c + 2d} + \frac{a + 3b\,|}{|\,c + 3d} + \ldots.$$

Il donne ensuite la valeur de la fraction

$$d + \frac{a + b + c\,|}{|\,d + e} + \frac{a + 2b + 4c\,|}{|\,d + 2e} + \frac{a + 3b + 3^2c\,|}{|\,d + 3e} + \ldots.$$

Quand tous les numérateurs partiels sont différents de zéro, qu'on a

$$ec \neq 0, \qquad e^2 + 4c = 0, \qquad 4b + 2de - e^2 = 0,$$

la valeur est $\frac{e}{2}z$, z étant celle des racines de l'équation

$$cz^2 - bz + a = 0$$

dont la partie réelle est la plus grande. Si les parties réelles des deux racines sont égales, la fraction continue n'est convergente que si l'équation a une racine double et la valeur de la fraction continue est toujours $\frac{e}{2}z$. Dans tous les autres cas, la fraction continue est divergente; elle n'est même pas convergente dans le sens étendu.

Mentionnons encore la méthode de Cesarò pour montrer les rapports de certaines fractions continues avec les équations différentielles. La formule de Pincherle se rapporte au même sujet.

R. Le Vavasseur.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Rouché et Comberousse (Ch. de). — *Traité de Géométrie.* Ire Partie. XLII-546 p. avec 329 fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50.

— IIe Partie. XVIII-664 p. avec 377 fig. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr. 50.

Violeine (A.-P.). — *Nouvelles Tables pour les calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissement.* 9e édit. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Appell (P.) et Chappuis (J.). — *Leçons de Mécanique élémentaire* à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B, conformément aux programmes de 1905. 3e édition, entièrement refondue. In-16, IX-416 p., avec figures. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

Mikami (Joshio). — *The development of mathematics in China u. Japan.* (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet v. *Mor. Cantor.*) Gr. in-8, X-347 p., avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 18 m.; relié, 19 m.

Demartres (G.). — *Cours de Géométrie infinitésimale.* Préface de *P. Appell.* In-8, X-418 p. avec 111 fig. Paris, Gauthier-Villars. 17 fr.

Dienes (P.). — *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques,* professées à l'Université de Budapest. In-8, VIII-172 p. avec 19 fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr. 50.

Fabry (E.). — *Problèmes d'Analyse mathématique.* In-8, 460 p. Paris, A. Hermann et fils. 12 fr.

Eneström (Gust.). — *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers.* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.*) 2. Lfg. In-8, p. 209-388. Leipzig, B.-G. Teubner. 10 m.

Gauss (C.-F.), *Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den J.* 1797-1799. — Schlesinger (L.), *Ueber Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie.* (*Materialien f. e. wissenschaftliche Biographie v. Gauss.* Gesammelt v. *F. Klein* u. *M. Brendel.*) In-8, 143 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. 40.

Bois-Reymond (Paul du). — *Zwei Abhandlungen üb. unendliche* (1871) *u. trigonometrische Reihen* 1874. Hrsg. v. *Philip-E.-B. Jourdain.* I. u. II. Abhandlg. (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.*) In-8, 115 p. Leipzig, W. Engelmann. Relié, 3 m. 75.

— *Abhandlung üb. die Darstellung der Funktionen durch trigonometrische Reihen* 1876. Hrsg. v. *Philip-E.-B. Jourdain.* III. Abhandlg. (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.*) In-8, 140 p. avec 4 fig. Leipzig, W. Engelmann. Relié, 5 m.

Rohn (Karl) u. Papperitz (Erwin). — *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* In 3. Bdn. 1. Bd. Orthogonalprojektion. Vielfläche, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kegel, Rotations- u. Schraubenflächen. 4., erweit. Aufl. gr. in-8, xx-502 p. avec 351 fig. Leipzig, Veit et Co. 13 m.; relié, 14 m.

Möhle (Fritz). — *Der mathematische u. naturwissenschaftliche Unterricht an den preussischen Lyzeen, Oberlyzeen u. Studienanstalten nach der Neuordnung v.* 1908. (*Schriften des deutschen Ausschusses f. den mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht.*) iv-48 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. 50.

Sykes, Mabel and others. — *A source book of problems for geometry, based upon industrial design and architectural ornament.* viii-372 p. Boston, Allyn et Bacon. 2 d. 50.

Perron (Osk). — *Die Lehre v. den Kettenbrüchen.* (*B. G. Teubner's, Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.*) Gr. in-8, xii-520 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 20 m.; relié, 22 m.

Mehmke (Rud.). — *Vorlesungen üb. Punkt- u. Vektorenrechng.* In 2 Bde, I. Bd. : Punktrechnung. I. Tlbd. Das Rechnen m. Punkten, Geraden u. Ebenen (1. Hälfte). Grundzüge der projektiven Geometrie. Anwendungen u. Uebgn. (*B. G. Teubner's, Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.*) Gr. in-8, viii-394 p. avec 152 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 14 m.

Wolf (Max). — *Stereoskopbilder vom Sternhimmel.* I. Serie, 4. Aufl. 18^{cm}-9^{cm}, 12 pl. avec texte. Leipzig, J.-A. Barth. 5 m.

Abraham (Henri) et Sacerdote (P.). — *Recueil de constantes physiques de la Société française de Physique.* In-8, xvi-754 p., 5 pl., fig. Paris, Gauthier-Villars. Relié, 50 fr.

Planck (Max). — *Vorlesungen üb. Thermodynamik.* 4. Aufl. gr. in-8, viii-288 p. avec 5 fig. Leipzig, Veit et Co. Relié, 7 m. 50.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VOLTERRA (Vito). — Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Faculté des Sciences de Rome, en 1910, et publiées par M. Tomassetti et F.-S. Zarlatti. 1 vol. grand in-8, VI-164 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Le titre seul de cet Ouvrage et le nom de son Auteur suffisent pour en indiquer l'intérêt à quiconque sait l'importance de la théorie des équations intégrales dans l'Analyse moderne et la part qu'ont eue les travaux de M. Volterra au développement de cette théorie. Partant d'une notion nouvelle, celle de fonction de lignes, il a été le premier amené à considérer une catégorie importante de ces équations; une autre devait peu de temps après être résolue par M. Fredholm. Dans ses leçons, professées à Rome en 1910, M. Volterra a exposé ses travaux et ceux du savant suédois sur les équations intégrales, et commencé l'exposé de ses travaux plus récents sur les équations intégro-différentielles. Ce sont ces leçons, rédigées en français par MM. Tomassetti et Zarlatti, qu'il présente aujourd'hui au public ; quelques modifications, et notamment quelques suppressions portant sur des questions qui seront traitées dans un autre Volume, ont été faites aux leçons de Rome. Cette rédaction, claire et précise, fait connaître les idées fondamentales qui ont guidé le savant professeur dans ses recherches, et montre la belle unité de son œuvre. Seule une rédaction faite d'après ses leçons pouvait présenter ainsi au lecteur la pensée même de M. Volterra. D'autres Ouvrages didactiques ont paru sur la même question ; aucun sans doute ne peut donner une connaissance plus profonde des points essentiels de la théorie ni des aperçus plus vastes sur ses applications.

Le point de départ des recherches de M. Volterra, comme nous venons de le dire, a été la notion de *fonctions de lignes*, ou, ce qui revient au même, en se plaçant au point de vue purement analytique, de fonctions dépendant de toutes les valeurs d'une

autre fonction. C'est à ces fonctions qu'est consacré le premier Chapitre de ses *Leçons*.

De nombreux exemples de pareilles quantités avaient été depuis longtemps rencontrés en Analyse. Jamais avant M. Volterra on n'avait étudié systématiquement la dépendance entre ces quantités et la fonction dont elles dépendent. Le savant professeur a été guidé dans ses recherches par l'analogie entre ces fonctions et les fonctions d'un grand nombre de variables. La variation première d'une fonction de n variables s'écrit

$$\delta f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i.$$

Il est naturel de penser, si une quantité $F[[\varphi(x)]]$ dépend de toutes les valeurs que prend $\varphi(x)$ quand x varie de a à b, que sa variation première peut être représentée par la formule

$$\delta F[[\varphi(x)]] = \int_a^b F'[[\varphi(x), \xi]] \delta \varphi(\xi) d\xi,$$

F' étant la *dérivée* de la fonction F. Ce résultat doit d'ailleurs être démontré, et pour cela M. Volterra a dû faire certaines hypothèses. Si, en certains points *exceptionnels*, ces hypothèses ne sont pas vérifiées, δF sera en général la somme d'une intégrale et de termes dépendant des valeurs de $\varphi(x)$ et de ses dérivées en ces points exceptionnels.

M. Volterra définit de même les dérivées des divers ordres et obtient une formule qui généralise celle de Taylor.

Cette notion introduite, on peut raisonner sur les fonctions comme auparavant on raisonnait sur les nombres, et considérer des équations fonctionnelles qui généralisent les équations numériques. On sait que la résolution d'une équation numérique se ramène le plus souvent à l'inversion d'une série de Taylor. Si, au lieu de deux nombres liés l'un à l'autre, on considère deux fonctions $\varphi(x)$ et $u(x)$ liées l'une à l'autre, et qu'on suppose $\varphi(x)$ exprimé en fonction de $u(x)$, sous forme d'une série analogue à celle de Taylor, la détermination de $u(x)$ apparaît comme analogue au problème de l'inversion d'une fonction transcendante. Ce dernier se ramène à l'inversion de fonctions linéaires. De même la détermination de $u(x)$ connaissant $\varphi(x)$ se ramène souvent à

l'inversion d'intégrales définies linéaires; c'est à l'étude de ce dernier problème, qui apparaît ainsi comme fondamental, que sont consacrés presque entièrement les Chapitres II et III du Livre de M. Volterra.

Ce problème avait été résolu dans des cas particuliers intéressants par Abel et Liouville. M. Volterra a obtenu un résultat beaucoup plus général en résolvant l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x) = u(x) + \int_0^x K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

qu'on appelle actuellement *équation de Volterra de deuxième espèce*. De même qu'une fonction dépendant d'une autre fonction peut être considérée comme le cas limite d'une fonction dépendant d'un nombre fini de variables, de même l'équation (1) peut être considérée comme la limite d'un système d'équations algébriques linéaires. C'est par cette méthode que M. Volterra obtient la solution de l'équation (1), qu'il justifie ensuite par une étude directe. Il montre aussi que cette solution peut aisément être obtenue par des approximations successives, ou bien par l'introduction d'un paramètre λ qui multiplie l'intégrale, et en cherchant à représenter $u(x)$ par une série de puissances de λ; les séries obtenues sont toujours convergentes, si la fonction $K(x, y)$ est finie.

Cette solution est de la forme

$$(2) \qquad u(x) = \varphi(x) + \int_0^x S(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

et est unique. Inversement, la formule (1) résout la formule (2), considérée comme équation en $\varphi(x)$. C'est le *principe d'inversion*. $K(x, \xi)$ est le *noyau* de l'équation (1) et $S(x, \xi)$ en est le *noyau résolvant*. Les formules qui permettent d'exprimer S connaissant K sont les mêmes que les formules qui permettent d'exprimer K connaissant S. Ces deux fonctions sont liées par les relations remarquables

$$(3) \qquad \begin{aligned} K(x, \xi) + S(x, \xi) &= -\int_\xi^x S(x, z)\, K(z, \xi)\, dz, \\ &= -\int_\xi^x K(x, z)\, S(z, \xi)\, dz, \end{aligned}$$

qui constituent le *principe de réciprocité*.

L'équation de Volterra de première espèce est l'équation

$$(4) \qquad \varphi(x) = \int_0^x K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi.$$

Elle se ramène à l'équation (1) et admet une solution unique si $K(x, x) \neq 0$. Le cas où $K(x, x) = 0$ peut être résolu dans des cas qui ont été indiqués par M. Volterra. Dans ses leçons il indique, pour la démonstration de ses théorèmes sur ce sujet, une méthode très ingénieuse due à M. Lalesco, qui les a déduits des théorèmes de Fuchs sur les équations différentielles linéaires.

Le cas où le noyau est fonction de $x - \xi$, et certains cas où le noyau devient infini, font l'objet d'une étude spéciale. Le même Chapitre contient aussi l'étude de systèmes d'équations de Volterra, des équations où figurent des intégrales multiples, et de plusieurs autres types d'équations généralisant les équations (1) et (4). Nous ne pouvons malheureusement pas, dans les limites de ce compte rendu, donner une idée de toutes ces questions.

Le second des Chapitres consacrés aux équations intégrales a pour objet principal l'étude de l'*équation de Fredholm*. Cette équation s'obtient en remplaçant dans l'équation (1) la limite d'intégration x par la valeur constante 1. La solution de cette équation est donnée en général par une formule analogue à la formule (2), et le noyau résolvant $S(x, \xi)$ vérifie une formule analogue à la formule (3); seulement les limites des intervalles d'intégration sont toujours 0 et 1.

Il y a une différence importante entre cette solution et celle de l'équation de Volterra. Pour celle-ci, le noyau résolvant est défini comme somme d'une série toujours convergente. Pour l'équation de Fredholm, le noyau est le quotient de deux séries. Le dénominateur est appelé *déterminant* de l'équation intégrale. Il peut s'annuler, et alors l'expression de la solution, par une formule analogue à la formule (2), ne s'applique plus.

Dans ce cas, les circonstances qui se présentent sont analogues à celles qu'on rencontre dans l'étude des systèmes d'équations algébriques et linéaires. Un certain nombre de conditions sont imposées à la fonction $\varphi(x)$ pour que l'équation intégrale admette une solution (ce nombre dépendant du noyau, et étant toujours fini), et si ces conditions sont vérifiées, l'équation intégrale admet

une infinité de solutions dépendant du même nombre de paramètres.

Après avoir exposé ces résultats par la méthode synthétique qu'avait adoptée M. Fredholm dans son Mémoire, M. Volterra montre que cette solution peut être obtenue en considérant l'équation intégrale comme cas limite d'un système d'équations algébriques linéaires. C'est la conception qui l'avait conduit à la solution de l'équation (1), et qui conduit aussi à la solution de l'équation de Fredholm. Mais la différence essentielle entre les deux cas est que, dans le cas de l'équation de Fredholm, il faut calculer deux déterminants, le numérateur et le dénominateur; dans le cas de l'équation de Volterra, le dénominateur est égal à l'unité. Cela explique la différence essentielle entre les solutions des deux équations.

Il en résulte une différence importante dans l'application de la méthode d'approximations successives signalée plus haut. Dans le cas de l'équation de Fredholm la solution est une fonction méromorphe du paramètre λ. Par suite, la série de Taylor qui conduit à la solution a un rayon de convergence fini; on n'obtient donc directement la solution que dans le cas où λ est assez petit.

Nous trouvons ensuite l'étude des systèmes d'équations de Fredholm, du cas des intégrales multiples et du cas où le noyau devient infini.

Passant aux applications des équations intégrales, M. Volterra traite d'abord la plus célèbre, qui est la résolution du problème de Dirichlet par la méthode de Fredholm. Cette méthode consiste à représenter la solution par un potentiel de double couche. La densité de ce potentiel est définie par une équation de Fredholm, dont le déterminant n'est pas nul.

D'autres applications, relatives aux équations des vibrations des cordes et des membranes élastiques, et à celle des oscillations des liquides, montrent mieux encore la facilité avec laquelle les équations intégrales conduisent à la solution des problèmes de physique. La première de ces équations est traitée successivement par un procédé différentiel et par un procédé intégral. La comparaison qu'on en tire est très suggestive; elle montre bien que, comme l'a dit M. Hadamard, « l'intégration, et non plus la différentiation, apparaît comme l'élément simple, comme l'outil le plus usuel,

parce que le plus puissant et le plus maniable, du calcul infinitésimal ».

Le dernier Chapitre commence par quelques résultats concernant les équations *intégro-différentielles*. Ce sont des équations analogues aux équations intégrales, mais dans lesquelles la fonction inconnue figure en outre par ses dérivées. Ces équations se présentent dans l'étude des phénomènes physiques, si l'on tient compte de l'influence, non seulement des phénomènes immédiatement antérieurs, mais encore de tous ceux qui l'ont précédé; M. Picard dit dans ce cas que le phénomène est de nature *héréditaire*. Tandis que les autres problèmes de physique conduisent en général à des équations différentielles ou aux dérivées partielles, ces phénomènes conduisent à des équations intégro-différentielles.

Le premier exemple traité est celui de la torsion élastique héréditaire, qui, dans le cas dynamique, conduit à une équation intégro-différentielle. Cette équation se ramène à une équation intégrale de Volterra.

Des circonstances essentiellement différentes se présentent dans le cas de fonctions de plusieurs variables, lorsque des dérivées par rapport à d'autres variables que la variable d'intégration figurent dans l'équation. $u(x, y, z, t)$ étant une fonction de quatre variables, que nous désignerons pour simplifier l'écriture par $u(t)$, M. Volterra étudie l'équation

$$f(x, y, z, t) = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial z^2} - \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f_1(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} f_2(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} f_3(t, \tau)\right] d\tau,$$

qui est le type des équations intégro-différentielles elliptiques comme l'équation de Laplace est le type des équations aux dérivées partielles elliptiques. L'étude de cette équation conduit à des circonstances analogues à celles que l'on connaît pour les équations aux dérivées partielles du type elliptique. Une solution régulière est définie, dans un domaine S, si l'on connaît, pour toutes valeurs de t, les valeurs qu'elle prend sur la frontière de S. On obtient une formule analogue à celle de Green, à condition de calculer une *intégrale fondamentale de l'équation adjointe*. Ce calcul est indiqué à la fin du Chapitre dans un cas particulier comme application de la théorie des fonctions permutables.

Deux fonctions finies et continues, $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ sont dites *permutables*, si l'on a

$$\int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y F_2(x, \xi) F_1(\xi, y)\, d\xi.$$

L'opération précédente est appelée *composition*.

Comme exemple de fonctions permutables, M. Volterra forme toutes les fonctions permutables avec l'unité. Ces fonctions sont les fonctions de $y - x$. Elles constituent le *groupe du cycle fermé*. Cette expression indique que, dans l'étude de la torsion élastique héréditaire, si le *coefficient d'hérédité* est fonction de la différence $t - \tau$, la torsion varie périodiquement quand le couple de torsion varie périodiquement. Donc, si l'on représente par une courbe plane la relation entre la torsion et le couple, le point représentatif décrit périodiquement un cycle fermé.

L'opération de composition peut être considérée comme analogue à la multiplication. La composition peut être représentée par le même symbole que la multiplication. Si, avec cette notation, on fait des calculs comme s'il s'agissait de produits ordinaires, les opérations effectuées seront toujours légitimes, si les fonctions sur lesquelles on opère sont permutables. Considérons une équation numérique transcendante et la formule qui en donne la solution sous forme de série de puissances. Avec la notation considérée, les mêmes formules représentent une équation intégrale transcendante et sa solution. De même, à une équation différentielle et à une série de puissances vérifiant formellement cette équation, on peut faire correspondre, et cela d'une infinité de manières, une équation intégro-différentielle et une formule qui en donne une solution.

On voit combien remarquable est cette théorie, qui permet d'obtenir la résolution d'une classe très étendue d'équations intégrales et intégro-différentielles. Il faut remarquer qu'il ne s'agit pas seulement d'une solution formelle, comme on pourrait être tenté de le croire. En effet, à une série de puissances ayant un rayon de convergence fini correspond, par le procédé qui vient d'être indiqué, une série dont la convergence est comparable à celle de la série qui représente e^x. On peut donc dire que les séries considérées sont toujours convergentes.

Telles sont les principales questions traitées dans ces *Leçons*. On voit qu'elles sont l'exposé d'un Chapitre tout nouveau de l'Analyse, dans lequel les résultats obtenus, à l'exception des théorèmes fondamentaux de Fredholm, sont tous dus à M. Volterra. L'importance de ces résultats en vue des applications ne peut échapper au lecteur, et l'élégance des raisonnements met la théorie des équations intégrales et intégro-différentielles et celle des fonctions permutables au niveau des plus belles théories de l'Analyse classique. Il serait plus exact de dire qu'elles sont dès maintenant classiques. Aussi n'est-il pas utile d'insister plus longuement sur l'importance de résultats que la plupart des lecteurs connaissent déjà.

Paul Lévy.

PICART (Luc). — Calcul des orbites et des éphémérides (*Encyclopédie scientifique* du Dr Toulouse. *Bibliothèque d'Astronomie et de Physique céleste*, Directeur : J. Mascart). 1 vol. in-12, IV-306 pages, avec 23 figures dans le texte. Paris, O. Doin et Fils, 1913.

M. Picart, en écrivant ce Livre que lira d'abord tout astronome débutant, a eu plutôt que le souci d'être complet, celui d'être clair et bref. Il s'est efforcé d'employer dans tout le cours du Livre les mêmes notations et les a choisies aussi rapprochées que possible de celles du Traité de M. Bauschinger (*Die Bahnbestimmung der Himmels Körper;* Leipzig, Engelmann, in-4°, 1906), qu'il regarde comme l'Ouvrage le plus propre à guider le calculateur, et que complètent bien utilement les Tables du même auteur (*Tafeln zur theoretischen Astronomie*. Leipzig, Engelmann, 1901). Bien que la solution des divers problèmes, dont l'ensemble constitue le calcul des orbites et des éphémérides, soit surtout algébrique, M. Picart n'a pas craint d'employer fréquemment des considérations géométriques.

Le point de départ est la loi de Newton. Le Chapitre I donne la solution du problème des deux corps; les formules relatives aux trois sortes d'orbites, ellipse, hyperbole, parabole, y sont développées; l'auteur donne, d'après Gauss, la valeur de la constante k et celle de son logarithme; il montre comment on la rend

égale à l'unité en changeant l'unité de temps. M. Picart donne divers procédés numériques ou graphiques pour résoudre l'équation de Kepler; il traite aussi, d'après Gauss, le cas d'une orbite voisine de la parabole, distinguant le cas où l'excentricité est moindre que un, et celui où elle est supérieure à un. Le Chapitre I se termine par la définition des éléments d'une orbite et les formules pour le calcul d'une éphéméride : M. Picart y donne ce qui concerne la date de l'opposition et la grandeur de la planète, et aussi les corrections de précession et de mutation, de parallaxe, d'aberration.

Le Chapitre II est consacré au problème inverse : calcul des éléments à l'aide de données héliocentriques. La solution du premier problème, où l'on donne à un instant donné la position et la vitesse de l'astre, conduit aux intégrales dites de Laplace; l'auteur donne aussi une élégante solution géométrique d'après M. Darboux. Il traite, d'après Gauss, pour les trois courbes, de deux manières pour l'ellipse, le cas où l'on donne deux positions héliocentriques et leurs dates. Le Chapitre se termine par les théorèmes d'Euler et de Lambert.

La détermination d'une orbite d'après les observations est l'objet du Chapitre III. M. Picart expose d'abord la méthode de Laplace; il parvient, pour trouver les distances de l'astre au Soleil et à la Terre, à deux équations

$$z = m\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right), \qquad \lambda^2 = 1 - 2z\cos\psi + z^2,$$

dont la résolution est bien facilitée par des Tables donnant $\frac{1}{m}$ en fonction de z et ψ et publiées dans l'Ouvrage d'Oppolzer (*Lehrbuch der Bahnbestimmungen der Cometen und Planeten*) et avec plus d'étendue dans celui de Klinkerfues-Buckholz. M. Picart discute géométriquement le problème qui donne zéro, une ou deux solutions; il rappelle d'autres discussions géométriques de Miss Grâce Young dans le Tome LVII des *Monthly Notices* et de M. Charlier au Volume LXXI, page 120, du même Recueil.

M. Picart expose ensuite de la façon la plus claire la méthode de Gauss : il indique diverses formes données pour exprimer les rapports des aires des triangles qui ont pour sommets le Soleil et deux des trois positions de la planète. Il se livre à une discussion

minutieuse sur les conditions de succès de la méthode et indique une modification introduite par Encke.

Le Chapitre IV contient une récapitulation des formules et un exemple numérique relatif à une planète dont les trois observations sont séparées par des intervalles de 11 et 12 jours. Les calculs sont faits avec sept décimales; la vérification finale résultant de deux valeurs de l'anomalie moyenne de l'époque se fait à 0″,82 près.

Après quoi M. Picart, dans le Chapitre V, revient sur la méthode de Laplace et expose en quelques pages des perfectionnements apportés récemment à cette méthode par H. Poincaré, Bruns et Leuschner. Il se borne à des indications sommaires sur des méthodes de Hansen, de Tietjen, de Gibbs, de Fabricius, de Vogel et de Weiss, dont un exposé se trouve dans le Traité de Bauschinger. Il mentionne aussi des formules de Ebert plus précises que celles de Gauss, sans être beaucoup plus compliquées, et celles de Paul Harzer, assez exactes pour qu'il soit inutile de faire des approximations successives. M. Picart expose le principe de la méthode d'Oppolzer; il donne une idée d'une méthode de Cauchy analytiquement très simple, mais insuffisamment précise. Le Chapitre se termine par le rappel d'une des méthodes de Lagrange, reprise récemment par Charlier, qui a simplifié et coordonné les formules et donné un exemple numérique, et par M. Akesson qui a donné aux formules une forme symétrique.

Quand l'orbite du corps céleste est voisine de l'écliptique, les méthodes de Gauss et de Laplace sont en défaut; M. Luc Picart en donne les raisons et il y a lieu d'utiliser quatre observations. Renvoyant au Mémoire de Y. Villarceau (*Ann. de l'Obs. de Paris*, t. III) pour la méthode de Laplace, M. Picart expose dans le Chapitre VI la modification apportée par M. Bauschinger à la méthode de Gauss. Ensuite, il s'occupe des orbites paraboliques. Après avoir indiqué une formule donnée par lui (t. XVI du *Bull. astr.*), permettant d'obtenir la distance géocentrique par une équation du premier degré, il expose, pour les orbites paraboliques, la méthode qui porte le nom d'Olbers, bien que, d'après un Article de Fabricius [*ein Beitrag zur Geschichte der Cometenproblems* (*Astr. Nachr.*, n° 2526], la priorité appartienne sans conteste à Du Séjour. M. Picart indique ici, comme en d'autres

occasions, où se trouvent, dans les Traités d'Oppolzer ou dans le Recueil de Tables de Bauschinger, les Tables qui facilitent certains calculs. Le Chapitre se termine par le calcul d'une orbite circulaire, problème qui, d'après Tisserand, peut n'avoir pas de solution; M. Picart reproduit une élégante démonstration de M. Bourget à cet égard.

Les premiers éléments déterminés d'après trois observations ne peuvent être très précis, en raison des erreurs des observations et du court intervalle de temps compris entre elles. Gauss, dans son ouvrage *Theoria motus corporum cœlestium*, a bien donné une application à l'orbite de Cérès d'après trois observations séparées par des intervalles de 134 jours et 126 jours; mais un tel cas ne se présente guère dans la pratique actuelle.

On utilise ces éléments insuffisamment précis pour en obtenir de plus exacts de façon à représenter le mieux possible les observations ultérieures. A cet effet, on doit d'abord corriger ces observations des perturbations causées par les planètes principales. M. Picart se borne à cette indication, les méthodes de calcul des perturbations étant réservées pour un autre Volume de l'*Encyclopédie scientifique*. Il expose d'abord un algorithme connu sous le nom de variation des distances géocentriques; à cette occasion, il introduit la notion de *lieux normaux*. Ensuite, M. Picart donne, avec le détail nécessaire, la méthode de la variation des éléments; après les formules concernant le cas général, il établit celles qui sont applicables aux orbites presque paraboliques. Il donne une simplification notable due à Radau (*Bull. astr.*, t. V et XXI).

Le Chapitre VIII, consacré aux orbites des étoiles doubles, clôture l'Ouvrage. M. Picart laisse de côté les mesures faites au spectroscope, la question ayant été traitée dans le Volume de cette Collection intitulé : *Spectroscopie astronomique*. Il montre qu'il n'y a pas lieu de tenir compte de la parallaxe et de la réfraction, que l'influence de la nutation peut être négligée; mais il donne la formule qui permet de corriger de la précession les angles de position observés à des dates diverses. Il rappelle l'introduction par Villarceau de l'inégalité de lumière, ajoutant que les composantes des systèmes binaires ne se sont pas montrées assez éloignées pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte. Après quoi M. Picart

expose la méthode graphique de Zwiers (1895), la méthode semi-graphique de John Herschel, puis la méthode analytique.

Les astronomes français, et sans doute aussi nombre d'étrangers, seront heureux d'avoir ce petit Volume, d'une rédaction si nette et si claire, dont la lecture ne demandera, même aux débutants, qu'un petit nombre de jours. Elle éveillera chez nombre d'entre eux le désir de connaître tous les travaux concernant les déterminations d'orbites et facilitera singulièrement l'étude des Ouvrages tels que ceux d'Oppolzer, de Bauschinger, de Klinkerfues et des Mémoires originaux.

B. Baillaud.

ARCHIMEDIS OPERA OMNIA COMMENTARIIS EUTOCII. Volumen II. Iterum edidit J.-L. Heiberg. *Bibliotheca scriptorum græcorum et romanorum Teubneriana.* 1 vol. in-12, XVIII-55[illegible] pages. Lipsiæ, in ædibus B.-G. Teubneri, MDCCCCXIII.

Ce Volume rend complète la savante édition des œuvres d'Archimède qu'a donnée M. J.-L. Heiberg, et qu'il a accompagnée d'une traduction latine minutieuse. Les Ouvrages qu'il renferme sont les suivants :

Des lignes spirales (Περὶ ἑλίκων);

De l'équilibre des plans ou des centres de gravité (Περὶ τῶν ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν);

L'Arénaire (Ψαμμίτης);

La quadrature de la parabole (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς);

Des corps flottants (Περὶ ὀχουμένων);

Le Stomachion (Στομάχιον);

La méthode relative aux propositions mécaniques, dédiée à Ératosthène (Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος);

Le problème des bœufs (Πρόβλημα βοῶν);

Enfin des fragments divers.

En contemplant ce petit Volume, M. Heiberg doit, je pense, éprouver quelque fierté de son œuvre d'érudit et de chercheur. Là se trouvent, en effet, deux Ouvrages d'Archimède dont on lui

doit la découverte : *Le livre de la méthode*, *dédié à Ératosthène*, et le texte grec du *Traité des corps flottants*.

La trouvaille du premier de ces Ouvrages excita, chez tous ceux qui s'intéressent à l'histoire de la pensée mathématique, un très vif mouvement de curiosité. On eut hâte de traduire en diverses langues modernes ce monument de la science hellénique. Nous avions occasion, il y a peu de temps, de citer dans ce *Bulletin* quelques-unes de ces traductions.

Le manuscrit qui avait fourni le *Traité de la méthode* à M. Heiberg lui réservait également le texte grec du *Traité des corps flottants*. Ce texte, en effet, était inconnu jusqu'ici. Du principe qui a illustré le nom d'Archimède, même auprès des ignorants, on ne possédait pas l'énoncé original.

Nos connaissances, au sujet du *Traité des corps flottants*, reposaient tout entières sur une traduction latine dont Nicolò Tartaglia avait donné, en 1547, le premier Livre. A la mort de ce mathématicien, on trouva dans ses papiers la version du second Livre, en sorte qu'en 1565, son ami Curtius Trojanus édita les deux Livres à Venise. La même année, à Bologne, Frédéric Commandin publiait, de ces mêmes Livres, un texte latin qui n'était que celui de Nicolò Tartaglia, rendu plus correct et plus élégant.

Tartaglia prétendait, bien entendu, qu'il avait traduit du grec les deux Livres du Traité d'Archimède; mais, comme en tant d'autres circonstances, il mentait impudemment.

En 1884, Valentin Rose découvrait [1] au Vatican une traduction latine manuscrite du traité : *De insidentibus aquæ*. Cette traduction était datée du 10 décembre 1269. Rose y reconnut l'œuvre de Guillaume de Moerbeke, l'ami de saint Thomas d'Aquin qui, à la demande de ce dernier, a traduit le commentaire de Simplicius au *Traité du Ciel* d'Aristote, l'*Elementatio theologica* de Proclus, et nombre d'autres écrits grecs. Divers détails permirent de s'assurer que le codex conservé au Vatican était le manuscrit autographe de Guillaume de Moerbeke.

Or Valentin Rose avança que Tartaglia n'avait aucunement traduit du grec son édition latine du *Traité des corps flottants;* il l'avait simplement tirée de la version de Guillaume de Moerbeke.

---

[1] Valentin Rose, *Deutsche Litteraturzeitung*, 1884, p. 210-213.

Par une étude détaillée des divers textes, M. Heiberg était parvenu [1], il y a déjà longtemps, à confirmer les conclusions de Valentin Rose ; de plus, il avait mis la main sur le manuscrit dont Tartaglia avait fait usage ; ce n'était pas l'exemplaire de la Bibliothèque vaticane, mais un autre exemplaire conservé à Madrid.

En dernière analyse, donc, tout ce que nous connaissions du *Traité des corps flottants* se réduisait à la traduction de Guillaume de Moerbeke.

Cette traduction, il est vrai, vaut un texte grec ; « *interpretatio Guilelmi de Moerbeka, quæ, cum codicis Græci instar sit....* », dit M. Heiberg. L'ami de saint Thomas d'Aquin, en effet, ne connaissait pas le dangereux souci d'élégance latine qui dictait, aux humanistes de la Renaissance, leurs versions harmonieuses, mais trop souvent infidèles. Son désir était de rendre, avec une exactitude scrupuleuse, le texte qu'il avait sous les yeux, dût son mot-à-mot exact paraître servile et barbare. Si traduire c'est trahir, jamais traducteur ne fut moins traître. Aussi son rude latin laisse-il souvent transparaître les phrases grecques sur lesquelles il s'est exactement appliqué.

Repasser d'une version de Guillaume de Moerbeke au texte grec qui l'a engendrée est donc chose possible. On en a eu des preuves curieuses.

En 1526, les Aldes, les célèbres éditeurs de Venise, donnèrent la première édition grecque des commentaires de Simplicius sur le *Traité du Ciel* d'Aristote. Cette édition, Peyron l'a démontré plus tard, n'avait nullement été faite d'après un manuscrit grec ; elle était une version grecque de la version latine que Guillaume de Moerbeke avait faite pour saint Thomas d'Aquin. Or, lorsqu'en 1865, Karsten publia, pour la première fois, le véritable texte grec de Simplicius, on put constater qu'il différait fort peu de celui que les Aldes avaient imprimé.

Ce que les Aldes avaient fait pour le commentaire de Simplicius, M. Heiberg eut l'idée de le faire pour le *Traité des corps flottants* à l'époque où le texte grec de ce traité était inconnu. En 1887, il donna à Paris, dans les mélanges Graux, une reconstitu-

---

(1) J. L. Heiberg, *Neue Studien zur Archimedes* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXXIV e Jahrgang, 1889, Supplément, p. 1).

tion de ce texte grec, et cette reconstitution avait été obtenue par version de la version de Guillaume de Moerbeke.

M. Heiberg, d'ailleurs, n'était pas le premier qui eût tenté cette restitution.

En 1828, dans deux manuscrits du XVIe siècle conservés à la Bibliothèque du Vatican, Mai avait trouvé le texte grec d'une petite partie du traité Περὶ ὀχουμένων ; ce fragment contenait seulement les énoncés des hypothèses et des huit premières propositions du premier Livre ; Mai publia ce fragment comme une relique du texte authentique d'Archimède.

Or M. Heiberg avait flairé depuis longtemps, dans le fragment publié par Mai, non pas l'œuvre d'Archimède, mais celle de quelque humaniste de la Renaissance qui avait remis en grec le latin de Guillaume de Moerbeke. Qu'il eût deviné juste, il en a eu la certitude lorsqu'il lui a été donné de lire le texte authentique d'Archimède. Tout lecteur, d'ailleurs, pourra, sans peine, contrôler la conclusion de M. Heiberg, car le fragment publié par Mai est reproduit en tête du Livre que nous venons d'analyser.

PIERRE DUHEM.

HAHN (HANS). BERICHT ÜBER DIE THEORIE DER LINEAREN INTEGRALGLEICHUNGEN. 1 vol. gr. in-8°, 51 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

Il y a évidemment plus d'une façon de comprendre la rédaction d'un *Rapport* sur l'état actuel d'une théorie mathématique. On peut chercher à démêler parmi les écrits et travaux sur la question un petit nombre de méthodes et d'idées générales; montrer comment se rattachent à ces idées les différents auteurs et faire, s'il y a lieu, une critique comparée des diverses méthodes tant d'après les conséquences déjà obtenues que d'après les résultats qu'on peut encore en espérer. On peut, au contraire, se borner à exposer les faits acquis dans un ordre à peu près chronologique et s'attacher à citer le plus exactement possible les Mémoires qui s'y rattachent en laissant au lecteur le soin d'en faire la comparaison et d'en estimer l'importance.

C'est la seconde façon de faire que M. Hahn semble avoir adoptée pour son Rapport sur les équations intégrales linéaires; ce

n'est peut-être pas sans quelques inconvénients pour cette théorie nouvelle, où le besoin d'une bibliographie complète se fait moins sentir que celui d'une séparation nette et d'une comparaison soignée des diverses méthodes. Dans une première Partie on trouve l'exposé du langage à peu près universellement adopté à l'heure actuelle : équations de première et de deuxième espèce, noyaux, itération, etc.; l'itération conduit, pour l'équation de deuxième espèce, au développement en série de Neumann ou, si l'on préfère, au noyau résolvant. Dans la deuxième Partie, on trouve la propriété fondamentale de Fredholm sur l'holomorphie du noyau résolvant et les démonstrations de Fredholm et de MM. Goursat et Lebesgue. L'étude des pôles de cette fonction et des solutions de l'équation homogène est indiquée succinctement surtout d'après les travaux de MM. Goursat et Heywood. Enfin dans la troisième Partie se trouve la théorie plus spéciale des équations à noyau symétrique et l'exposition d'une partie des recherches de MM. Hilbert, Schmidt et leurs élèves. Il m'a paru que le développement en série de fonctions principales n'avait pas été exposé avec toute l'ampleur qu'on aurait pu attendre. Il est vrai que le Rapport de M. Hahn n'est pas terminé et qu'un deuxième Volume est en préparation; il contiendra probablement en plus des équations de première espèce une théorie plus développée des équations et de la méthode de M. Volterra [1], ainsi que de la belle méthode des approximations successives de M. Picard.

Dans un premier paragraphe qualifié historique, M. Hahn indique comment Neumann et avant lui Abel et Liouville avaient rencontré des équations intégrales linéaires particulières dans certaines questions de mécanique et de physique mathématique. Il me semble qu'il y a là trop ou pas assez et que dans ce *Rapport* sur les équations intégrales, ou bien il n'était pas nécessaire de faire mention des applications, ou bien il devait en être fait une énumération plus complète.

A. Châtelet.

[1] Dans le premier Chapitre, l'auteur indique bien que l'équation de Fredholm comprend comme cas particulier l'équation de M. Volterra de deuxième espèce, mais j'imagine que ce n'est là qu'une indication et que M. Hahn se réserve de revenir plus longuement sur ce sujet.

MEHMKE (Rudolf). — Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. In zwei Bänden. Erster Band : *Punktrechnung*. Erster Teilband, mit 152 Figuren in Text. (*B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Band XXXVII, 1). 1 vol. gr. in-8°, VII-394 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

M. Mehmke commence par ce Volume la publication des leçons qu'il professe depuis longtemps sur le *Calcul géométrique*. Ces leçons doivent comprendre deux Tomes : le premier sera consacré au *Calcul ponctuel*, le deuxième au *Calcul vectoriel*. Bien que ce dernier calcul soit un cas particulier du premier, M. Mehmke, pour plus de clarté, a préféré en donner une exposition indépendante.

Ce premier Volume du Tome I contient deux Parties. Dans l'une de ces Parties sont exposés les principes du Calcul ponctuel, exposition que l'auteur se propose de continuer dans le second Volume qui doit paraître. Dans l'autre Partie, M. Mehmke, pour familiariser le lecteur avec l'usage des méthodes étudiées, fait un exposé de Géométrie projective à l'aide du Calcul ponctuel. Cet exposé, qui occupe la plus grande partie du Volume, peut être fort utile, car il contient toutes les notions de Géométrie projective qu'il est nécessaire de connaître.

L'Ouvrage de M. Mehmke est rédigé de façon à être aussi clair et aussi complet que possible et de manière à être étudié et consulté avec fruit par tous ceux qui veulent se mettre au courant des méthodes du Calcul géométrique. Ces leçons sont destinées aux étudiants, mais elles seront intéressantes même pour ceux qui connaissent déjà les questions qu'elles traitent, car l'emploi systématique de certaines notions telles que celles de *substitutions linéaires* et d'*invariants projectifs*, a permis d'obtenir pour beaucoup de démonstrations une extrême simplicité. Des notes détaillées permettent, pour chacune des théories exposées, de se reporter aux œuvres des mathématiciens auxquels est due leur introduction et rendent facile l'établissement d'une concordance entre les notations employées par les divers auteurs. A la fin de l'Ouvrage sont rassemblées un assez grand nombre d'applications géométriques. Ces problèmes sont classés par Chapitres de façon à

pouvoir être étudiés après le Chapitre correspondant des leçons. Certains de ces problèmes sont entièrement traités et apportent des compléments aux théories exposées, en même temps qu'ils servent de guide pour résoudre les problèmes dont la solution n'est pas indiquée. Une Table alphabétique des matières permet, même si l'on n'a pas lu tout le Livre, de retrouver facilement les renseignements dont on peut avoir besoin. Il est à souhaiter que le soin avec lequel sont rédigées les leçons de M. Mehmke contribue à répandre l'usage du Calcul géométrique. La brièveté et la simplicité que ce Calcul permet de donner aux démonstrations engageront sans doute des lecteurs à faire l'effort réel, mais utile, qui est nécessaire pour acquérir le maniement de cet instrument commode de recherche et d'exposition.

Voici un compte rendu sommaire des matières traitées dans ce premier Volume.

Premier Livre. Calcul ponctuel. — *Première Partie.* — Les éléments qui figurent dans les calculs géométriques sont : les nombres, les points qui sont des points-masses, les *vecteurs glissants* (Stab), les *cycles glissants* (Blatt) ou parallélogrammes orientés, les parallélépipèdes orientés (Block). Deux parallélépipèdes orientés sont égaux, lorsqu'ils ont même volume et même sens. Ces éléments sont les grandeurs géométriques d'ordre respectif 0, 1, 2, 3, 4. D'une définition générale de l'égalité résultent les propriétés suivantes qui achèveront, ici, de préciser la nature de ces éléments : Deux points sont égaux, lorsqu'ils ont même position et même masse. Deux vecteurs glissants sont égaux, lorsqu'ils sont situés sur la même droite et ont même longueur. Deux cycles glissants sont égaux, lorsqu'ils sont situés dans le même plan et ont même surface. La définition de l'addition de ces divers éléments et de leur multiplication par des nombres permet de définir les vecteurs, les bi et les trivecteurs, ainsi que la dépendance linéaire de points, droites et plans.

La *deuxième Partie* du premier Livre est consacrée à la multiplication *extérieure* des grandeurs géométriques. L'application du principe de dualité conduit à deux espèces de multiplications : la multiplication progressive, où l'on obtient l'ordre du produit en faisant la somme des ordres des facteurs et la multiplication régressive où cette somme doit être diminuée de quatre unités. La mul-

tiplication progressive correspond à la notion géométrique de jonction : le produit d'un point et d'un vecteur glissant est un cycle glissant, dont le plan est celui déterminé par le point et le vecteur. La multiplication régressive correspond à la notion d'intersection : le produit d'un vecteur glissant et d'un cycle glissant est le point d'intersection du plan et de la droite portant respectivement le cycle et le vecteur.

Deuxième Livre. Géométrie projective.—*Première Partie.*— Les figures fondamentales du premier ordre sont : 1° les points alignés sur une droite (Punktreihe) ; 2° les faisceaux de droites, ensemble de droites passant par un point et situées dans un plan ; 3° les faisceaux de plans, ensemble de plans passant par une même droite. De la définition d'une correspondance homographique entre deux figures fondamentales, on est naturellement amené à étudier la génération des coniques, des surfaces réglées du second ordre, des courbes gauches du troisième ordre et à établir les théorèmes fondamentaux relatifs à ces figures géométriques.

Deuxième Partie. — Les figures fondamentales de deuxième ordre sont : 1° le plan (Punktfeld), ensemble des points et des droites d'un plan ; 2° la gerbe (Bündel), ensemble de tous le plans et de toutes les droites passant par un point. L'unique figure fondamentale du troisième ordre est l'espace, ensemble de tous les points, droites et plans. La considération de figures fondamentales en correspondance homographique conduit l'auteur à l'étude des figures qu'elles engendrent par la jonction ou l'intersection d'éléments correspondants. On étudie ainsi la congruence formée par les sécantes doubles d'une cubique, et la congruence corrélative, les surfaces du deuxième et du troisième degré, le complexe linéaire et le complexe tétraédral.

Troisième Partie. — Considérant deux figures fondamentales ayant même support (point, droite ou plan), l'auteur traite les questions suivantes : 1° recherche des éléments coïncidents ; 2° étude de la correspondance involutive et en particulier du *système polaire* et du *système nul*. L'auteur rattache également à cette partie les notions de *dyade*, de *produit algébrique*, de *produit intérieur*, les constructions relatives aux problèmes du premier et du deuxième degré, l'étude des faisceaux de coniques et des foyers.

Quatrième Partie. — Cette Partie est consacrée à l'étude générale des correspondances homographiques à l'aide de représentations symboliques. Après avoir indiqué les divers modes de représentation qu'on peut adopter, l'auteur montre comment on peut, à l'aide de ces symboles, effectuer de véritables calculs et étudier les propriétés des correspondances homographiques. A l'aide de cette méthode et de la théorie des diviseurs élémentaires de Weierstrass, sont classées les différentes espèces d'homographies.

H. Dulac.

SÉGUIER (J.-A. de). — Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes de substitutions. 1 volume in-8°, x-228 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Cet Ouvrage est le deuxième d'une série que M. de Séguier se propose de consacrer à la théorie des groupes finis. Dans le premier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, les *éléments* du groupe, c'est-à-dire les opérations qui le constituent, n'intervenaient que par la loi de leur composition, indépendamment de leur nature, c'est-à-dire des objets auxquels s'appliquent ces opérations. Au fond, un groupe fini abstrait peut être considéré comme l'ensemble d'un nombre fini de symboles sur lesquels on a défini une opération, qu'on appelle la *multiplication*, qui n'est pas nécessairement commutative, mais qui est associative, et qui est d'autre part soumise à certaines restrictions sur lesquelles il est inutile d'insister ici. Un élément de groupe abstrait n'a donc qu'une existence logique résultant des lois de composition, c'est-à-dire de multiplication.

Au contraire, l'élément d'un groupe de substitutions a une existence en soi : c'est une opération portant sur des objets déterminés (en nombre fini) tels que des lettres, des indices, etc., et par laquelle ces objets sont échangés entre eux d'une certaine manière. La composition des substitutions résulte de leur nature même, et la structure d'un groupe de substitutions (c'est-à-dire la loi de composition de ses éléments) n'est plus seulement le résultat d'une convention, mais est en quelque sorte réalisé d'une

manière concrète. A ce point de vue les groupes de substitutions fournissent un instrument d'analyse très puissant pour l'étude des groupes abstraits eux-mêmes, car il existe une infinité de groupes de substitutions réalisant la structure d'un groupe abstrait donné quelconque. Mais, dans la plupart des applications, l'intérêt qui s'attache à l'étude des groupes de substitutions tient à la nature des opérations qui les constituent.

Dans cet Ouvrage, l'auteur s'est borné aux substitutions qu'on pourrait appeler *naturelles*, c'est-à-dire celles qui s'appliquent à un nombre fini d'objets. Comme il est souvent utile d'introduire entre ces objets un ordre multiple, en les assimilant à des points dont les coordonnées varient dans un champ de Galois, M. de Séguier considère aussi les groupes linéaires *modulaires*, réservant à un autre Volume l'étude plus approfondie de ces groupes. Quant aux groupes finis de substitutions linéaires *algébriques*, c'est-à-dire portant sur des variables continues, il n'en parle qu'incidemment, laissant complètement de côté par exemple le problème si intéressant de la représentation des groupes finis abstraits par des groupes de substitutions linéaires algébriques.

L'Ouvrage est divisé en cinq Chapitres. Dans le Chapitre I, l'auteur introduit les définitions fondamentales et étudie la forme canonique d'une substitution linéaire, puis la forme canonique d'un groupe *abélien* de substitutions linéaires dans un champ fini. Il expose ensuite les résultats actuellement connus sur la représentation d'une substitution dans un champ de Galois par une formule telle que

$$z' = f(z)$$

où z prend successivement les valeurs des différents nombres du corps de Galois et où $f(z)$ est un polynome entier en z.

Le Chapitre II est consacré aux théorèmes généraux sur les groupes de substitutions. L'auteur introduit les notions de transitivité et de primitivité, définit les paramètres de transitivité et donne les propriétés fondamentales du groupe symétrique et du groupe alterné. Il démontre enfin les relations les plus importantes entre la transitivité, la classe, le degré et l'ordre d'un groupe de substitutions.

On appelle, comme on sait, degré d'une substitution (ou d'un

groupe) le nombre des lettres effectivement déplacées par cette substitution (ou ce groupe), classe d'un groupe le degré minimum des substitutions (autre que l'unité) du groupe, ordre d'un groupe le nombre de ses substitutions. On dit enfin qu'un groupe est t fois transitif, quand il contient au moins une substitution remplaçant t lettres arbitrairement choisies par t autres lettres arbitraires, sans que la même propriété existe pour $t+1$ lettres.

Cela posé, soient N l'ordre d'un groupe G, n son degré, c sa classe. Si G est t fois transitif, on a

$$c \geqq 2t-2 \qquad \text{et} \qquad t \leqq \frac{n+3}{3},$$

à moins que G ne contienne le groupe alterné. Si G ne contient aucune substitution circulaire de trois lettres, on a

$$\frac{n!}{N} \vdots q,$$

q étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$.

Le Chapitre III est consacré à la représentation des groupes abstraits par des groupes de substitutions. Étant donné un groupe fini abstrait G, à un ensemble fini de sous-groupes de G correspond un groupe de substitutions isomorphe à G; les objets sur lesquels portent ces substitutions étant les sous-groupes donnés de G et les complexes obtenus en multipliant un quelconque de ces sous-groupes par tous les éléments de G. On obtient ainsi toutes les représentations possibles de G et ces représentations sont, suivant les cas, intransitives ou transitives, propres ou impropres.

L'auteur étudie ensuite le groupe *adjoint* d'un groupe Γ de substitutions; c'est celui qui est formé des substitutions échangeables avec toutes les substitutions de Γ. Il s'occupe enfin de la construction de groupes plusieurs fois transitifs et donne les équations de définition du groupe symétrique et du groupe alterné.

Dans le Chapitre IV, l'auteur s'occupe plus particulièrement des groupes dont la classe est inférieure d'une unité au degré et étudie les groupes linéaires à n variables dans un champ de Galois G_π d'ordre $\pi = p^m$, où p est un nombre premier. Il détermine les facteurs de composition du groupe $L(n, \pi)$ formé de toutes celles

des substitutions précédentes qui sont homogènes. Si l'on y regarde les n variables comme *homogènes*, on a un groupe isomorphe mériédrique $\mathcal{L}(n, \pi)$ qui, dans le cas de $n = 2$, est un groupe de substitutions homographiques $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$.

Parmi les résultats indiqués par l'auteur, signalons les suivants :

Le groupe $\mathcal{L}(2, p)$ est le seul groupe d'ordre $p(p^2 - 1)$ et de degré $p + 1$. Le groupe $\mathcal{L}(2, \pi)$ n'est représentable en moins de $\pi + 1$ symboles que si $\pi = 5$: $\mathcal{L}(2, 5)$ est alors isomorphe au groupe symétrique de cinq lettres. Le sous-groupe $\mathcal{V}(2, \pi)$ formé des substitutions de $\mathcal{L}(2, \pi)$ pour lesquelles $\alpha\delta - \beta\gamma$ est un carré (dans le champ C_π) est également étudié : il n'est représentable en moins de $n + 1$ symboles que si $\pi = 5, 7, 9$ ou 11. En particulier $\mathcal{V}(2, 9)$ est le seul groupe simple d'ordre 360.

Le Chapitre V est consacré à certains groupes de degré kp, $p + \alpha$, $2p + \alpha$, en particulier aux groupes de Mathieu. L'auteur indique la dimension des groupes de Mathieu transitifs d'ordre 7, 8, 11, 12, 23, 24, 47, 59.

L'Ouvrage se termine par trois Notes, l'une sur la théorie des matrices, la seconde sur la théorie des équations algébriques et la troisième sur quelques propriétés complémentaires des groupes de degré n et de classe $n - 1$, déjà étudiés au Chapitre IV. Dans la seconde Note, la plus importante, l'auteur expose sous une forme très condensée la principale application de la théorie des substitutions, à savoir la théorie des équations algébriques de Galois; signalons en particulier ce qui a trait à la construction d'équations à coefficients rationnels dont le groupe est symétrique ou alterné.

Comme on le voit par le rapide exposé qui précède, l'Ouvrage de M. de Séguier contient beaucoup de choses sous un petit volume. Il est seulement à regretter qu'il exige du lecteur une attention très soutenue et parfois pénible. On fera bien de tenir compte des corrections, assez nombreuses, qui se trouvent indiquées à la fin du Volume.

E. Cartan.

WIELEITNER (Heinrich). — Geschichte der Mathematik. II. Teil : Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. I. Hälfte : *Arithmetik, Algebra, Analysis.* Bearbeitet unter Benutzung des Nachlasses von Anton von Braunmühl (*Sammlung Schubert*, t. LXIII). 1 vol. petit in-8°, VIII-251 pages. Leipzig, G. J. Göschen, 1911.

La période qui s'étend depuis la fin du XVIe siècle jusqu'au commencement du XIXe siècle a vu naître et grandir les Mathématiques modernes. C'est dans la seconde moitié du XVIe siècle que commencèrent à se fixer les notations de l'Algèbre actuelle. C'est vers la même époque, ou peu de temps après, que l'Arithmétique et la théorie des équations firent leurs premiers grands progrès : on étudia la résolution algébrique des équations des troisième et quatrième degrés, la séparation des racines et la résolution approximative de celles de degré supérieur. Les grands travaux de Fermat enrichirent la théorie des nombres qui devait plus tard prendre, avec Euler, Legendre et Gauss, l'extension qu'on sait. Une autre branche des Mathématiques, cultivée aux XVIIe et XVIIIe siècles, l'Analyse combinatoire, fut appliquée aux probabilités et à la loi des grands nombres, que traduit le célèbre théorème de Jacques Bernoulli.

Mais, de beaucoup, la plus immense découverte de cette période est celle du Calcul infinitésimal. Il est juste de rendre hommage aux précurseurs de Newton et de Leibniz : sans remonter jusqu'à Archimède, Cavalieri, avec sa méthode des *indivisibles*, calcule bon nombre d'intégrales définies. On sait la polémique passionnée et violente qui s'éleva entre les partisans de Newton, auteur de la méthode des fluxions, et ceux de Leibniz, inventeur du calcul différentiel, polémique à laquelle les deux grands hommes ne restèrent d'ailleurs pas étrangers. M. Wieleitner passe rapidement sur cette querelle, disant avec raison qu'il préfère exposer leurs découvertes plutôt que leurs disputes. D'immenses travaux furent consacrés par les successeurs de Newton et de Leibniz à l'établissement définitif du nouveau calcul, ainsi qu'à la théorie des développements en séries, et à celle plus importante encore des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, théories auxquelles Lagrange joignit le calcul des variations, dont l'importance devait s'amplifier au cours du XIXe siècle.

Ce sont toutes ces matières que traite M. le professeur H. Wieleitner, dans ce Volume consacré au développement de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de l'Analyse, celui de la Géométrie et de la Mécanique devant faire l'objet d'autres volumes de la même collection. En exposant l'histoire de chaque découverte, l'Auteur prend soin d'en rappeler brièvement les points essentiels, avec assez de développements pour les remémorer au lecteur, mais sans jamais tomber dans les longueurs ou les détails inutiles. Cet Ouvrage constitue un très intéressant résumé d'une époque particulièrement importante de l'histoire des Sciences.

H. Vergne.

MÉLANGES.

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS. A PROPOS DES RECHERCHES RÉCENTES DE M. SUNDMANN;

Par M. Émile PICARD.

I.

Dès que Newton eût été conduit par les lois de Kepler à poser le principe de la gravitation universelle, le premier problème de mécanique qui s'est présenté a été la recherche du mouvement de n points s'attirant deux à deux proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances. Pour $n=2$, le résultat est d'une admirable simplicité; la trajectoire relative de chaque point autour de l'autre est une section conique dont celui-ci occupe l'un des foyers. A partir de $n=3$, le problème devient singulièrement plus difficile et a résisté jusqu'ici aux efforts des plus grands mathématiciens. Ce n'est pas que des résultats considérables n'aient été obtenus au moyen d'intégrations approchées, et la Mécanique céleste classique étudie surtout ces intégrations par approximations successives, qui, dans presque tous

les problèmes usuels, suffisent largement pour la prédiction du mouvement des astres du système solaire; mais ces solutions approchées ne peuvent être utilisées que pendant un temps plus ou moins long. Au point de vue purement mathématique, ce qui aurait du prix pour les analystes, c'est une solution exacte valable pour toute valeur du temps.

A défaut d'une solution applicable à tous les cas, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales, on a cherché des solutions exactes particulières du problème des trois corps. Ainsi Lagrange a étudié le cas où les distances mutuelles des corps conservent des rapports constants pendant toute la durée du mouvement, et il a montré qu'alors les trois points sont toujours les sommets d'un triangle équilatéral, ou bien restent constamment en ligne droite. De Lagrange à Poincaré, aucune solution particulière intéressante du problème des trois corps n'a été signalée, sauf toutefois dans un beau travail de M. Hill sur la Lune, qui a eu la plus heureuse influence sur les premières recherches de notre grand compatriote. Dans ses mémorables travaux de Mécanique céleste, Poincaré a obtenu des solutions particulières qui ont vivement appelé l'attention, solutions remarquables surtout par les méthodes mises en œuvre qui ont trouvé ailleurs d'importantes applications; je veux parler des solutions périodiques et des solutions qui leur sont asymptotiques. A la vérité, Poincaré n'étudie pas le cas général où les masses des trois corps sont quelconques. Prenons, par exemple, le cas où il s'est le plus souvent placé, dans lequel, un des corps ayant la masse m_1, les deux autres ont des masses de la forme $m_2 = \alpha_2 \mu$, $m_3 = \alpha_3 \mu$, α_2 et α_3 étant des constantes fixes quelconques, et μ une constante qui devra être suffisamment petite. Dans ces conditions, Poincaré établit l'existence de solutions *périodiques* pour lesquelles les trois corps se retrouvent au bout d'un certain temps dans la même position relative. Il démontre aussi l'existence de solutions *asymptotiques* dans lesquelles les trajectoires des corps, au bout d'un temps suffisamment long, se rapprochent de plus en plus des trajectoires correspondant à une solution périodique. Certaines mêmes de ces solutions asymptotiques sont *doublement asymptotiques*, étant très voisines pour t négatif et de grande valeur absolue d'une solution périodique, puis s'en éloignant quelque temps pour s'en

rapprocher indéfiniment quand t positif grandit indéfiniment; la démonstration de l'existence de ces solutions doublement asymptotiques a demandé un grand effort analytique. Tous ces résultats supposent μ très petit, car les raisonnements de Poincaré sont des raisonnements par continuité, utilisant les circonstances correspondant à $\mu = 0$. Jusqu'à présent on n'a pas démontré pour des masses quelconques l'existence de solutions périodiques du problème des trois corps en dehors des cas de Lagrange. Cette existence n'est guère douteuse, mais pour l'établir en toute rigueur, il y aura probablement de sérieuses difficultés à surmonter [1].

Après l'immense labeur de Poincaré, il n'était guère tentant pour les mathématiciens de reprendre l'étude analytique des équations différentielles du problème des trois corps. Comme l'écrivait Tisserand dans le Tome IV de sa *Mécanique céleste* : « La solution rigoureuse du problème des trois corps n'est pas plus avancée aujourd'hui qu'à l'époque de Lagrange, et l'on peut dire qu'elle est manifestement impossible. » Tisserand pensait sans doute, en parlant de solution *rigoureuse*, à des représensentations des coordonnées des trois corps au moyen de développements en séries dont les termes dépendent du temps t et convergentes pour toute valeur de t, ce qui n'arrive pour aucun des développements classiques de la Mécanique céleste. En fait, la solution *rigoureuse* peut être entendue d'une manière plus générale. Concevons qu'on puisse exprimer les neuf coordonnées des trois corps par des séries dont les termes soient des fonctions d'une variable τ, ces séries étant convergentes pour τ compris entre -1 et $+1$; admettons, d'autre part, que le temps t puisse s'exprimer en fonction de τ par une série convergente également entre -1 et $+1$ [soit $t = f(\tau)$], et cela de telle manière que τ allant en croissant de -1 à $+1$, la fonction $f(\tau)$ varie également toujours dans le même sens en allant de $-\infty$ à $+\infty$. On suppose,

---

[1] Au moins dans le cas du plan, les notions introduites par Poincaré dans le Mémoire publié peu de temps avant sa mort, dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, paraissent devoir conduire au but, mais une discussion approfondie est encore nécessaire. On sait qu'un jeune géomètre américain, M. Birkoff, a démontré très simplement le théorème de géométrie que Poincaré regardait comme probable, et dont, à l'avance, il avait esquissé quelques applications, en le supposant exact.

bien entendu, que les différents termes des séries envisagées peuvent être obtenus de proche en proche, quand les conditions initiales sont données. Avec ces divers développements, le problème doit être regardé comme résolu rigoureusement, car à une valeur de t correspond manifestement une et une seule valeur de τ, ce qui permet de calculer les cordonnées pour chaque valeur du temps.

II.

Le programme que nous venons d'indiquer a été rempli par un astronome de l'Observatoire d'Helsingfors, M. Sundmann ([2]). Avant d'essayer de donner une idée du travail de M. Sundmann, il nous faut dire un mot d'une remarque faite par Poincaré en 1886, concernant d'ailleurs le cas où les rapports des masses sont quelconques. Poincaré avait indiqué que, si l'on était sûr à l'avance que la distance de deux quelconques des trois points restera toujours supérieure à une limite déterminée, on pourrait affirmer que les coordonnées des trois corps sont susceptibles d'être développées pour toute valeur de t suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1},$$

α étant une constante positive convenable. C'est là un résultat qui, au premier abord, paraît bien remarquable ([3]). Malheureusement, pour des conditions initiales données, on ne sait pas si l'on se trouvera ou non dans les conditions supposées, et Poincaré lui-même, probablement après des recherches infructueuses, écrivait : « Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette méthode à la Mécanique Céleste. »

([2]) Les points essentiels des recherches de M. Sundmann ont été communiqués à la *Société des Sciences de Finlande*, les 17 décembre 1906 et 18 janvier 1909, et ont fait l'objet de Notes parues dans les Tomes XXXIV et XXXV des Mémoires de cette Société. Un Mémoire plus développé a paru dans le Tome XXXVI des *Acta mathematica* en 1912.

([3]) On pourrait trouver, pour le même objet, un grand nombre d'autres développements, plus simples mêmes que celui de Poincaré. C'est un point qui est devenu presque évident depuis que l'étude de la méthode employée par Cauchy pour démontrer l'existence des intégrales des équations différentielles a été approfondie. On peut consulter à ce sujet le Tome II de mon *Traité d'Analyse* (pages 332 et suivantes) et également le Tome III (pages 249 et suivantes).

Si les corps se choquent, le développement de Poincaré cesse d'être applicable; mais, comme l'a vu M. Sundmann en analysant les diverses circonstances susceptibles de se présenter, on peut utiliser un développement analogue, après avoir remplacé préalablement le temps par une autre variable indépendante convenablement choisie.

Le point fondamental dans les recherches de M. Sundmann réside dans le théorème suivant : *Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on peut, les circonstances initiales étant données, indiquer une limite positive au-dessous de laquelle les deux plus grandes distances entre les corps ne descendent jamais.* En particulier, les trois corps ne se choqueront certainement pas au même instant si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois ([1]), et c'est dans ce cas général que se place M. Sundmann dans toute la suite de son Mémoire. Par contre, il peut arriver que deux des corps se choquent à un certain moment, mais cette circonstance, qui avait été jusqu'ici la pierre d'achopement dans tous les travaux analytiques concernant le problème des trois corps, ne va être la source d'aucune difficulté grâce aux vues ingénieuses de M. Sundmann sur ce que l'on peut appeler le *prolongement analytique* du problème après le choc. Supposons que, pour $t = a$, deux des trois corps viennent à se choquer. On établit qu'alors les coordonnées des trois corps peuvent se développer suivant les puissances de $(t-a)^{\frac{1}{3}}$. Dans ces développements, pour $t < a$, la valeur de $(t-a)^{\frac{1}{3}}$ est négative. Ces séries permettent de définir le mouvement des trois corps après le choc; on y parvient en donnant, dans ces mêmes développements, des valeurs positives à $(t-a)^{\frac{1}{3}}$ pour $t > a$. En réalité, on fait ainsi un prolongement analytique de la solution, qui correspondrait à donner pour un moment (t étant d'abord réel, voisin de a, et inférieur à a) des valeurs complexes à t, et à faire tourner le point correspondant d'un angle égal à 3π dans le plan de la variable complexe t.

([1]) Dans une lettre à M. Mittag-Leffler du 2 février 1889, Weierstrass énonce sans démonstration ce résultat. Cette lettre de Weierstrass a été imprimée récemment dans les *Acta mathematica* (t. XXXV), postérieurement aux Notes citées de M. Sundmann dans les *Acta Societatis Fennicæ*.

Le temps t (redevenu réel) continuant à croître, il peut y avoir d'autres chocs (même une infinité), le problème étant après chaque choc *prolongé* comme il vient d'être dit. C'est d'ailleurs une conséquence du théorème énoncé plus haut que les valeurs de t correspondant à des chocs (s'il y en a) ne peuvent avoir une limite finie. On voit donc nettement, d'après ce qui précède, ce qui arrive quand le temps t grandit indéfiniment : la solution reste holomorphe tant qu'aucun choc n'a lieu, mais il peut arriver que, pour certaines valeur a de t, un choc entre deux corps se produise ; les coordonnées sont alors susceptibles d'être développées suivant les puissances de $(t-a)^{\frac{1}{3}}$ et le problème peut être prolongé analytiquement au delà de $t=a$.

Tous ces points établis, et la démonstration de plusieurs d'entre eux a exigé une grande pénétration, il reste à faire un changement de variable, grâce auquel les coordonnées des trois corps ne cesseront pas d'être holomorphes. On y parvient en posant

$$dt = \Gamma\, d\omega,$$

ω étant la nouvelle variable (avec la condition $t=0$ pour $\omega=0$). On pose

$$\Gamma = \left(1-e^{-\frac{r_1}{l}}\right)\left(1-e^{-\frac{r_2}{l}}\right)\left(1-e^{-\frac{r_3}{l}}\right),$$

l étant une constante positive convenable, et les r désignant les distances des trois points deux à deux; on a

$$0 \leq \Gamma < 1,$$

d'où il résulte que les variables ω et t varient dans le même sens, et, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, ω varie de $-\infty$ à $+\infty$. Il est facile maintenant d'établir que les neuf coordonnées sont des fonctions holomorphes de ω dans le voisinage de chaque valeur réelle ω_0 de cette variable, le rayon de convergence autour de ω_0 étant supérieur à un nombre fixe indépendant de ω_0. Il suffira alors de poser (¹)

$$\tau = \frac{e^{\alpha\omega}-1}{e^{\alpha\omega}+1}$$

(¹) Je rappelle que cette relation entre τ et ω tranforme une bande du plan de la variable ω, parallèle à l'axe réel et ayant celui-ci comme ligne médiane, dans le cercle de rayon un, ayant l'origine pour centre, du plan de la variable τ. Comme je l'ai dit plus haut, Poincaré utilisait cette transformation.

(α constante positive convenable), et l'on pourra exprimer les neuf coordonnées sous forme de séries ordonnées suivant les puissances de τ et convergentes entre -1 et $+1$; t est, d'autre part, une fonction de τ susceptible d'un développement de même nature, et, quand τ varie de -1 à $+1$, t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

On a donc bien la solution du problème des trois corps sous la forme que nous avons dite plus haut. Les circonstances initiales (vitesses et positions des corps étant données), on peut mettre *les neuf coordonnées* et *le temps* sous la forme de séries entières

$$A + B\tau + C\tau^2 + \ldots$$

convergentes entre -1 et $+1$, les coefficients se calculant de proche en proche par des dérivations successives, et la fonction $f(\tau)$, qui représente le temps, croissant de $-\infty$ à $+\infty$, quand τ croit de -1 à $+1$.

III.

Nous venons d'obtenir, avec M. Sundmann, une solution complète du problème des trois corps. Les analystes, qui s'étaient antérieurement occupés de ce problème ([6]), portaient leur attention sur les chocs, mais en considérant que le problème n'avait plus de sens après un choc, ce qui est très naturel au point de vue physique ([7]). *Pour M. Sundmann, au contraire, le problème continue après le choc.* En réalité, c'est pour avoir poussé à fond l'idée du prolongement analytique que M. Sundmann a pu obtenir une solution générale susceptible de comprendre dans ses formules les cas où il y aurait des chocs en nombre fini ou infini.

([6]) Citons particulièrement à ce sujet M. Painlevé, à qui l'on doit la proposition importante retrouvée d'une autre manière par M. Sundmann, qu'il y a nécessairement un choc quand le mouvement cesse d'être régulier à un instant fini. On doit aussi à M. Lévi Civita et à M. Bisconsini d'intéressantes recherches dans lesquelles ils se sont efforcés de trouver les relations entre les données initiales nécessaires et suffisantes pour qu'un choc se produise.

([7]) Il faut toutefois faire exception pour quelques pages du Tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, où Poincaré parle incidemment de prolongement analytique. On les trouvera dans le Chapitre XXVI, l'un des plus beaux de ce célèbre Ouvrage, intitulé : *Stabilité à la Poisson* (pages 168 et suivantes).

Dans la lettre à M. Mittag-Leffler, dont j'ai parlé ci-dessus, Weierstrass dit un mot des développements suivant les puissances de $(t-a)^{\frac{1}{3}}$; il a donc eu vraisemblablement la notion du prolongement analytique d'une solution du problème des trois corps après un choc.

On demandera maintenant quel est, pour la Mécanique céleste usuelle, l'intérêt de la solution précédente. Rien n'est plus décevant que le métier de prophète, et je ne veux risquer que des probabilités. Il semble que l'extrême généralité de l'analyse de M. Sundmann est peu favorable à l'étude des cas classiques de la Mécanique céleste, où une masse est toujours prédominante. Il est difficile, sans une étude approfondie, de se rendre compte des simplifications qu'apporterait cette hypothèse dans les formules de l'astronome d'Helsingfors; mais, en tous cas, ces formules paraissent impropres à mettre en évidence le caractère à peu près périodique de tant de phénomènes astronomiques, que les séries de type trigonométrique mettent, malgré leur divergence, si bien en évidence. Il y a, semble-t-il, encore moins à espérer en ce qui concerne les questions de stabilité, sauf peut-être quand il s'agit de ce que Poincaré appelait la *stabilité à la Poisson*.

Mais n'insistons pas sur ces probabilités (*) et plaçons-nous au point de vue de l'Analyse pure, pensant seulement à l'intégration rigoureuse des équations différentielles du problème des trois corps. Nous pouvons dire alors que le Mémoire de M. Sundmann est un travail faisant époque pour les Analystes et les Astronomes mathématiciens. Beaucoup croyaient que le problème des trois corps ne serait résolu que grâce à l'introduction préalable de transcendantes nouvelles très compliquées. Ce n'est pas un des moindres étonnements pour le lecteur que de voir avec quelle simplicité, en s'appuyant seulement sur des résultats aujourd'hui classiques dans la théorie des équations différentielles ordinaires, le savant finlandais arrive à la solution d'un problème réputé si difficile. Il lui a fallu, il est vrai, une singulière finesse pour discuter avec des moyens aussi élémentaires, est-on tenté de dire, les diverses circonstances pouvant se présenter. Ces constatations ne vont pas sans mélancolie pour qui se rappelle l'histoire esquissée plus haut du problème des trois corps; nous allons chercher quelquefois bien loin des découvertes qui sont à la portée de notre main et les idées simples se présentent les dernières.

(*) Il est d'autant plus inutile de le faire que, en s'appuyant sur les théorèmes généraux de M. Sundmann, on peut trouver d'autres développements que le sien pour résoudre le problème des trois corps. C'est là une remarque analogue à celle que je faisais plus haut (Note 3) au sujet d'un développement de Poincaré.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEBON (ERNEST). — SAVANTS DU JOUR : GASTON DARBOUX : *Biographie, Bibliographie analytique des Écrits*. Seconde édition entièrement refondue, avec un Portrait en héliogravure. 1 vol. in-8 jésus, papier de Hollande, IV-96 pages. Paris, Gauthier-Villars, 16 juin 1913.

En présentant cet Opuscule à l'Académie des Sciences, dans la séance du 23 juin 1913, M. Émile Picard, ancien Président de l'Académie, s'est exprimé en ces termes :

« En 1910, j'ai présenté à l'Académie, de la part de M. Ernest Lebon, le Volume qu'il consacrait à M. Gaston Darboux dans sa Collection *Savants du jour*. En trois ans, l'Ouvrage a été épuisé, et je dépose aujourd'hui sur le Bureau la seconde édition de ce Livre. C'est une édition que, suivant l'expression habituelle, on peut dire *complétée*, mais non pas *corrigée*, car M. E. Lebon travaille avec un tel soin qu'il n'y avait, pour ainsi dire, aucune erreur ou omission à relever dans la Bibliographie analytique des Écrits de M. Darboux avant 1910; M. Lebon a cependant jugé utile d'ajouter quelques nouvelles analyses de Mémoires importants, et il a naturellement donné des indications sur les travaux variés publiés depuis trois ans par notre Secrétaire Perpétuel. On trouvera aussi, dans cette nouvelle édition, l'écho des Discours prononcés l'année dernière au Jubilé de l'illustre géomètre, qui ont permis à M. Ernest Lebon de donner un plus grand développement à la Notice si vivante placée au début du Volume. »

En faisant précéder les principales Sections de son travail d'appréciations dues à des savants, M. E. Lebon y a introduit des éléments qui font oublier la sécheresse inévitable de suites analytiques d'énumération de titres d'Écrits, bien que les titres vagues soient accompagnés de sobres explications.

C'est pourquoi il est parvenu à composer un Ouvrage qui soit à la

fois intéressant pour les personnes qui désirent connaître, seulement dans son ensemble, l'œuvre de M. Gaston Darboux, très utile à celles qui se livrent à des études et des recherches dans le domaine si étendu de l'Analyse pure et de la Géométrie infinitésimale.

Il a signalé tous les Écrits originaux et les principales analyses dont ils ont été le sujet. Ce n'est qu'après les avoir lus ou parcourus qu'il a donné les références et les renseignements qui s'y rapportent.

Enfin, il importe de faire remarquer que M. Gaston Darboux, après avoir lu le manuscrit, a bien voulu donner à l'Auteur de précieux conseils pour le classement des Mémoires et des Notes, et qu'il a aussi lu et approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet Opuscule.

TABLE DES MATIÈRES.

Section I. *Biographie*. Notice sur M. Gaston Darboux, par E. L. Grades. Fonctions. Titres honorifiques. Prix. Décorations. — Section II. *Analyse mathématique*. Rapport de M. Camille Jordan sur le Prix Petit d'Ormoy. Analyse pure. Ouvrage. Mémoires. Notes : Théorie des Fonctions. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. — Section III. *Géométrie supérieure*. Rapport de M. Michel Chasles sur la Thèse de M. G. Darboux. Rapport de M. Camille Jordan sur le Prix Petit d'Ormoy. Analyse par Jules Houel d'un Ouvrage de M. G. Darboux. Note par E. L. Géométrie infinitésimale. Ouvrages. Mémoires. Notes : Théorie des systèmes orthogonaux. Lignes de courbure. Lignes asymptotiques. Lignes géodésiques. Surface à courbure totale constante. Déformation des surfaces du second degré. Surfaces applicables. Représentation sphérique des surfaces. Surfaces minima. Sujets divers de Géométrie infinitésimale. Géométrie synthétique et analytique. Ouvrage. Mémoires. Notes. — Section IV. *Mécanique analytique. Mécanique céleste et Physique mathématique*. Analyse par Ph. Gilbert de Notes de Mécanique dues à M. G. Darboux. Mécanique analytique. Ouvrage. Mémoires. Notes : Statique. Dynamique du point matériel. Dynamique des systèmes. Cinématique. Systèmes articulés. Mecanique céleste. Mémoires. Notes. Physique mathématique. Mémoires. Notes. — Section V. *Algèbre*. Mémoires. Notes. — Section VI. *Histoire des Sciences*. Ouvrages. Conférence. Éloges et Notices historiques. Discours; Allocutions. Discours nécrologiques. Notices nécrologiques. Rapports. Articles; Avertissements; Présentations. Analyses d'Œuvres, d'Ouvrages et de Mémoires. —

Section VII. *Publications diverses*. Mémoires. Notes : Mathématiques. Discours. Rapports. Enseignement. Article. Préfaces. Présentation. Analyses.

HEATH (Sir THOMAS). — ARISTARCHUS OF SAMOS, *the ancient Copernicus*. A HISTORY OF GREEK ASTRONOMY TO ARISTARCHUS TOGETHER WITH ARISTARCHUS'S TREATISE ON THE SIZES AND DISTANCES OF THE SUN AND MOON. A New Greek Text with Translation and Notes. 1 vol. in-8°, VIII-426 pages. Oxford, Clarendon Press, 1913.

Du célèbre Traité d'Aristarque de Samos, donner une nouvelle édition, qui pût satisfaire les minutieuses exigences de l'érudition moderne; à cette édition, joindre une traduction anglaise; tel est l'objet que s'était, tout d'abord, proposé Sir Thomas Heath. En avant de l'ouvrage projeté, il a souhaité de placer une introduction qui mît en lumière le génie astronomique d'Aristarque; ce désir l'a conduit à écrire l'histoire de l'Astronomie grecque jusqu'au temps où vécut le savant Samien; et l'introduction a fini par devenir plus volumineuse que l'ouvrage lui-même. Nous ne saurions trop nous en féliciter; Sir Thomas Heath nous donne, en effet, un exposé systématique et complet de ce que fut la Science des astres chez les Hellènes avant qu'Hipparque ne fît adopter le système des excentriques et des épicycles.

Avec une conscience scrupuleuse, Sir Thomas Heath a tenu compte de toutes les recherches dont cette partie de l'histoire de la Science avait été l'objet; mais ce sont surtout les grands travaux de Giovanni Schiaparelli et de Paul Tannery qui lui ont permis de mener à bien son entreprise; aussi ces travaux sont-ils, à chaque instant, cités dans son Livre.

Sir Thomas Heath revendique, pour Aristarque de Samos, l'honneur d'avoir, le premier, fait tourner la Terre et les planètes autour du Soleil; il n'admet donc pas qu'Aristarque ait été, en cette heureuse hypothèse, précédé par Héraclide du Pont.

Les droits d'Héraclide du Pont à être regardé comme l'inventeur du système héliocentrique reposent, on le sait, sur un texte semé de particularités difficiles à interpréter. Ce texte est un passage des *Météorologiques* de Posidonius; il avait été emprunté à cet

ouvrage par Géminus; Simplicius, à son tour, l'a reçu de Géminus et nous l'a conservé.

Selon la leçon que Diels a fait adopter, voici la traduction mot à mot de ce texte :

« C'est pourquoi quelqu'un, s'étant avancé, dit, Héraclide du Pont, que la Terre étant mue d'une certaine manière et le Soleil demeurant en repos d'une certaine manière, il est possible de sauver l'anomalie autour du Soleil qui nous apparaît. »

Des premiers mots de ce passage, Paul Tannery a proposé une interprétation; c'est cette interprétation qu'adopte Sir Heath.

Selon Paul Tannery, les mots : *Héraclide du Pont* ne figuraient pas dans le texte primitif de Posidonius. Ces mots auraient été ajoutés, en marge d'un manuscrit, par un lecteur désireux de désigner plus clairement l'auteur que Posidonius avait appelé simplement : *quelqu'un*, τίς. Puis, comme il est arrivé en tant de circonstances, un copiste aurait fait passer cette glose de la marge dans le texte, où elle est demeurée depuis ce temps.

S'il en est ainsi, ce n'est plus, comme Paul Tannery en fait la remarque, Posidonius qui nous renseigne aux sujet des hypothèses astronomiques d'Héraclide du Pont : c'est un scholiaste anonyme. Si donc, avec G. Schiaparelli, on fait d'Héraclide un précurseur de Copernic, ce ne sera pas en vertu de la grave autorité de Posidonius; ce sera sur la foi de cet annotateur.

Or ce scholiaste était-il bien informé des choses de l'Astronomie? Nous l'ignorons, et rien ne nous empêche de le nier. Nous pourrons, dès lors, admettre avec Sir Thomas Heath, que, par le mot : *quelqu'un*, τίς, Posidonius voulait désigner Aristarque de Samos : que l'annotateur, sachant par ailleurs qu'Héraclide faisait tourner la Terre sur elle-même, avait confondu cette supposition avec l'hypothèse du mouvement de la Terre autour du Soleil; qu'il avait alors mis en marge, en face du mot τίς, le nom d'Héraclide, dérobant ainsi à Aristarque la priorité de la théorie héliocentrique.

Par ces suppositions, fait-on disparaître toutes les difficultés? Il en reste une. G. Schiaparelli se scandalisait que Posidonius eût accolé, au nom d'Héraclide du Pont, le terme, assez dédaigneux, τίς, un certain. N'est-il pas bien plus étonnant qu'il se soit contenté de ce petit mot pour désigner, sans le nommer, Aristarque de Samos,

illustre non seulement par ce qu'Archimède en dit dans l'*Arénaire*, mais aussi par son Traité *Des grandeurs et des distances du Soleil et de la Lune?*

Bien des raisons, d'ailleurs, rendent vraisemblable l'attribution de l'hypothèse héliocentrique à Héraclide du Pont.

Nous savons d'une manière très certaine qu'Héraclide attribuait le mouvement diurne à la Terre, et non pas au Ciel étoilé.

Chalcidius nous a appris qu'il faisait circuler Vénus autour du Soleil ; il est sans doute qu'il usât de la même hypothèse pour rendre compte des mouvements de Mercure; très vraisemblablement, selon G. Schiaparelli et Paul Tannery, il étendait la même supposition aux astres errants.

Pour sauver les anomalies apparentes, Héraclide avait donc fait circuler les cinq planètes autour du Soleil; il était alors tout naturellement conduit à conférer le même mouvement à la Terre, car il regardait la Terre comme une planète.

L'assimilation de la Terre à une planète était, au temps d'Héraclide, une des opinions soutenues par les Pythagoriciens de la Grande Grèce, par ceux qui, à la suite de Philolaüs, faisaient tourner la Terre autour du Foyer central; lorsqu'il expose leur doctrine aussi bien que lorsqu'il la réfute, Aristote les désigne comme « ceux qui font de la Terre un des astres ». Héraclide pouvait donc, sans se singulariser, mettre la Terre au nombre des astres errants.

Stobée nous apprend, d'ailleurs, qu'Héraclide partageait entièrement, à ce sujet, les convictions des philosophes d'Italie : « Héraclide et les Pythagoriciens, dit-il, prétendent que chacun des astres forme un monde, que l'air y entoure une Terre, et que le tout se trouve au sein de l'éther illimité. Les mêmes croyances sont rapportées dans les *Hymnes orphiques*, car ils font un monde de chacun des astres. »

Cette assimilation s'étendait également à la Lune, car le même Stobée nous dit : « Héraclide et Ocellus font de la Lune une Terre entourée de nuages. »

Cette analogie, admise par Héraclide, entre la Terre, la Lune et les planètes devait, de l'explication qu'il avait proposée pour l'anomalie planétaire, le conduire tout naturellement à l'adoption d'une Astronomie héliocentrique. Elle nous révèle, d'ailleurs, certaines influences qui ont dû le seconder en ce passage; elle nous montre

que l'Astronome du Pont acceptait avec complaisance certains dogmes pythagoriciens; l'exemple de la doctrine astronomique de Philolaüs a pu l'aider en l'élaboration de sa propre doctrine; celle-ci, en effet, ne diffère de celle-là que par la substitution du Soleil à cette Ἑστία longtemps hypothétique et devenue clairement inadmissible, et par la suppression de la non moins inadmissible Antiterre.

Dès lors, que l'attribution de l'hypothèse héliocentrique à Héraclide du Pont soit due à Posidonius ou qu'elle soit le fait d'un annotateur inconnu, il n'en reste pas moins que cette attribution présente une grande vraisemblance; nous ne saurions, comme Sir Thomas Heath, en faire bon marché et nous tenir pour entièrement assuré de la priorité d'Aristarque de Samos.

Le Traité d'Aristarque de Samos *Sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune* présente une étrangeté qui a été souvent remarquée. Sir Thomas Heath nous paraît avoir donné de cette étrangeté, l'explication la plus heureuse.

Dans ce Traité, Aristarque attribue à la Lune et au Soleil un diamètre apparent d'un quinzième de *signe* (30°), partant de 2°. Une telle valeur est, pour les deux astres, à peu près quadruple de la valeur véritable. Les moyens d'observation les plus grossiers ne sauraient conduire à une évaluation à ce point erronée.

Dans l'*Arénaire*, Archimède décrit un instrument propre à mesurer les diamètres apparents des objets très éloignés; il trouve, au moyen de cet instrument, que le diamètre apparent du Soleil est compris entre la cent-soixante-quatrième partie d'un angle droit (32′55″) et la deux-centième partie du même angle (27′); cette affirmation est parfaitement exacte, puisque le diamètre apparent du Soleil varie réellement entre 32′35″,6 et 31′31″. Il est surprenant que l'on ait pu, au temps d'Archimède, obtenir un résultat d'une aussi satisfaisante précision et qu'Aristarque, en la même détermination, se soit trompé du simple au quadruple.

La surprise causée par cette grave erreur augmente encore de ce fait qu'au dire d'Archimède, en l'*Arénaire*, Aristarque avait déterminé lui-même, à l'aide d'un instrument approprié, le diamètre apparent du Soleil, et l'avait trouvé égal à la sept-cent-vingtième partie de l'écliptique, soit à 30′ exactement.

On ne saurait, d'ailleurs, pour expliquer l'évaluation erronée

qui entache le Traité d'Aristarque, invoquer quelque altération de manuscrit, altération qui eût atteint même le texte dont Pappus a fait usage; tout le calcul développé au cours du Traité suppose cette valeur inexacte des diamètres apparents.

La seule explication plausible que cette étrangeté ait reçue jusqu'ici nous paraît être celle de Sir Thomas Heath; la voici :

Archimède nous dit qu'Aristarque avait découvert (εὑρηκότος) que le diamètre apparent du Soleil couvrait à peu près la sept-cent-vingtième partie du zodiaque. Cette expression nous donne à penser que personne, avant Aristarque, n'avait mesuré ce diamètre avec précision; la tradition qui en attribue la détermination à Thalès de Milet serait sans fondement.

Or si Aristarque est le premier des Grecs qui ait su, à l'aide d'un instrument approprié, déterminer l'angle sous lequel nous voyons le Soleil ou la Lune, est-il invraisemblable d'imaginer qu'il n'avait pas encore fait cette mesure lorsqu'il écrivait son *Traité sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune?* En composant cet Ouvrage, il aurait usé d'une valeur erronée, mais courante chez les Grecs, de ces diamètres apparents. Puis, son œuvre même ayant montré l'extrême intérêt que présentait la connaissance exacte de ces diamètres, il se serait lui-même ingénié à fournir cette connnaissance aux astronomes; mais il aurait amené l'Astronomie à l'accomplissement de ce progrès trop tard pour que ses propres calculs eussent été à même d'en bénéficier.

Du grand Ouvrage de Sir Thomas Heath, deux points seulement ont, ici, retenu notre attention; assurément, ce n'est pas assez pour juger une telle œuvre; peut-être, cependant, cela suffira-t-il, et nous le souhaitons, pour montrer que ce Livre a sa place marquée dans toutes nos bibliothèques publiques, comme dans la bibliothèque de quiconque s'intéresse à la pensée hellénique.

PIERRE DUHEM.

ZORETTI (Ludovic). — Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France. (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*, publiée sous la direction de M. Émile Borel.) 1 vol. gr. in-8°, vi-117 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

M. Zoretti s'est proposé, dans cet Ouvrage, d'étudier les fonctions analytiques en se servant presque exclusivement de la définition de Weierstrass. Les résultats obtenus ainsi sont d'une grande généralité, ce qui explique qu'ils soient encore malheureusement assez rares : M. Zoretti, se proposant d'indiquer l'état actuel de la question, a dû, par conséquent, signaler beaucoup de questions non encore résolues, ainsi qu'il en avertit lui-même dans l'Introduction.

Les questions traitées dans cet Ouvrage se rapportent au domaine d'existence des fonctions uniformes et à la façon dont ces fonctions se comportent au voisinage d'un point singulier; enfin aux fonctions multiformes. Les méthodes à employer, et aussi les résultats obtenus, diffèrent considérablement suivant la nature de l'ensemble des points singuliers, ce qui amène M. Zoretti à établir quelques propriétés des ensembles de points qui ne se trouvent pas encore dans les Traités classiques, ainsi que l'ont déjà fait les auteurs de presque toutes les monographies précédentes.

Cette étude forme la matière du premier Chapitre de l'Ouvrage. Nous y rencontrons d'abord quelques propriétés connues des ensembles fermés; puis s'introduit la distinction des ensembles bien ou mal enchaînés, les premiers, qui sont toujours parfaits, se nommant aussi continus. Si l'on décompose un continu en deux ensembles fermés ayant un point commun et un seul, ces deux derniers ensembles sont continus; la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés dont aucun ne renferme de portion continue n'en renferme pas non plus.

Les continus peuvent, d'après M. Cantor, se diviser en continus linéaires et superficiels; les continus linéaires ne se confondent pas avec les courbes au sens de M. Jordan; un continu superficiel admet pour frontière des continus linéaires, à moins qu'il ne comprenne tout le plan. Passant aux ensembles partout discontinus, l'auteur montre que, si a est un point d'un tel ensemble, on peut l'entourer d'un contour simple, ne contenant aucun autre point de

l'ensemble, et entièrement intérieur à un cercle donné quelconque de centre a; propriété qui n'est pas du tout évidente, comme on le voit par un exemple. Enfin, l'attention se porte sur les ensembles dépendant d'un paramètre : pour que l'ensemble limite d'un continu (au sens indiqué plus haut) fonction d'un paramètre soit continu, il suffit que cet ensemble limite contienne au moins un point qui soit limite de tous les ensembles donnés.

Dans un deuxième Chapitre, M. Zoretti aborde la notion de fonction analytique, d'après Weierstrass, et donne une définition provisoire de l'ensemble singulier, illustrée de quelques exemples; cette définition nous montre tout de suite que l'ensemble singulier d'une fonction uniforme est fermé, tandis qu'il n'en est rien pour une fonction multiforme; mais cette définition demande à être précisée, ce que fait l'auteur. Les fonctions multiformes amènent à parler des surfaces de Riemann à une infinité de feuillets, notion due à H. Poincaré; la définition de ces surfaces à la manière classique, par des coupures, offre une difficulté intéressante, étant données surtout les conséquences obtenues par M. Boutroux dans ses *Leçons sur les fonctions définies par une équation du premier ordre*.

Avec quelques conventions de langage, il existe toujours une fonction uniforme admettant pour ensemble singulier un ensemble fermé donné; la question analogue n'est pas résolue pour les fonctions multiformes, dont l'ensemble singulier se compose vraisemblablement d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés; en tout cas, il existe toujours, sauf quelques restrictions, une fonction multiforme admettant un tel ensemble pour exemple singulier. Après avoir classé les points singuliers d'une fonction uniforme suivant la nature de l'ensemble singulier dans leur voisinage, l'auteur indique quelques extensions des notions précédentes aux fonctions multiformes, puis donne une définition des coupures de telles fonctions, soit pour une branche, soit pour la fonction en général, et annonce quelques résultats paradoxaux d'après lesquels une fonction multiforme peut être à domaine d'existence borné sans qu'aucune de ses branches admette de coupure. La notion de domaine d'indétermination permet de distinguer les points singuliers « transcendants ordinaires », pour lesquels le domaine d'indétermination est un point, des points « transcendants essentiels ».

A la suite de Poincaré, qui a employé ce moyen dans sa démonstration du théorème sur l'uniformisation des fonctions analytiques, nous rencontrons une généralisation de la notion de prolongement analytique, permettant de traiter les points critiques algébriques et les pôles comme des points réguliers. Ce théorème de Poincaré pose, d'ailleurs, une question intéressante. Si l'on se donne deux fonctions analytiques uniformes *quelconques*

$$w = \varphi(t),$$
$$z = \psi(t),$$

la fonction multiforme

$$w = f(z)$$

que l'on en déduit, par élimination de t, peut être plus générale que la correspondance définie par nos fonctions de t : cela arrive si, par exemple,

$$\varphi = \psi,$$

cette fonction étant à domaine d'existence borné et à valeurs aussi bornées ; il peut encore arriver, si les fonctions φ et ψ ont des coupures, qu'il n'existe pas de chemin permettant de passer, par prolongement analytique de la fonction $w = f(z)$, du point

$$w_0 = \varphi(t_0),$$
$$z_0 = \psi(t_0),$$

au point

$$w_1 = \varphi(t_1),$$
$$z_1 = \psi(t_1);$$

les fonctions φ et ψ, déterminées par Poincaré, échappent à ces deux inconvénients, et sont donc particulières.

Quittant les généralités pour l'étude des fonctions entières, le Chapitre III nous offre d'abord une intéressante démonstration du théorème de Weierstrass sur l'indétermination à l'infini de ces fonctions ou l'indétermination des fonctions uniformes au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, démonstration s'appuyant uniquement sur la notion de prolongement analytique ; le théorème de M. Picard ne semble malheureusement pas pouvoir se démontrer de la même façon. Ce théorème de Weierstrass s'étend aux fonctions admettant un ensemble dénombrable de points singuliers isolés, pour les points limites de cet ensemble.

Dans le Chapitre IV, nous abordons les fonctions présentant un ensemble parfait discontinu de singularités. M. Painlevé a étendu le théorème de Weierstrass aux fonctions présentant un tel ensemble de points singuliers pouvant de plus être enfermé dans des contours dont la somme des longueurs est infiniment petite ; si la somme des longueurs est finie, les points singuliers ne peuvent être transcendants ordinaires. Enfin l'auteur fait l'historique d'un essai d'extension à des cas plus généraux, suggéré d'abord par M. Painlevé, puis tenté par lui-même, et qui était certainement prématuré, comme l'a montré un exemple dû à M. Pompeiu et repris par M. Denjoy.

M. Zoretti étudie au Chapitre V les fonctions à lignes singulières, et montre par quelques exemples la diversité des circonstances possibles ; il signale la question de savoir si une fonction holomorphe dans une aire, sauf peut-être sur une ligne intérieure à cette aire, et continue dans toute l'aire, est holomorphe sur la ligne, question non encore résolue lorsqu'on donne au mot « ligne » son sens le plus général.

Enfin, dans le sixième Chapitre, M. Zoretti étudie les fonctions multiformes inverses de fonctions uniformes, et montre, d'après M. Painlevé, que si la fonction uniforme $w = f(z)$ n'a pas de coupures, la fonction $z(w)$ n'a pas de points transcendants essentiels. La notion de domaine d'indétermination suivant une ligne lui permet de donner des critères pour caractériser diverses sortes de points singuliers. Il fait quelques réserves sur les propositions données par M. Boutroux dans son Mémoire *Sur les fonctions inverses de fonctions entières*, et signale quelques résultats de MM. Lindelöf, Mittag-Leffler, Malmquist, Phragmen sur l'étude d'une fonction entière sur une ligne.

En note se trouvent quelques exemples relatifs aux coupures des fonctions uniformes.

La difficulté des questions traitées dans cet Ouvrage tient à ce que nous sommes dans le cas le plus général : d'où un grand nombre de circonstances paradoxales. M. Zoretti a fait une exposition intéressante de cette théorie, si utile dans toutes les questions où interviennent les fonctions analytiques.

G. Giraud.

PLATRIER (Lieutenant Ch.). — Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques*, soutenue le 8 avril 1913. 1 vol. in-4, III-73 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Le Mémoire fondamental de Fredholm paru en 1903 a provoqué un très grand nombre de recherches, dont quelques-unes ont donné naissance à des méthodes qui, au premier abord, paraissent fort éloignées de la méthode de Fredholm. En particulier, la théorie des noyaux orthogonaux a permis de faire l'étude complète de la résolvante dans le domaine d'un pôle, en n'empruntant aux travaux de Fredholm que le résultat essentiel, qui peut d'ailleurs s'établir de bien d'autres façons. Dans la première Partie de son travail, M. Platrier s'est proposé de rattacher ces résultats aux propriétés des mineurs de Fredholm. Par une généralisation élégante d'une propriété bien connue des déterminants, il parvient à exprimer un mineur d'ordre quelconque q par un déterminant d'ordre q dont les éléments sont les mineurs du premier ordre de $D(\lambda)$. En combinant la formule ainsi obtenue avec la théorie des noyaux orthogonaux, il montre aisément comment on peut trouver l'ordre des pôles des différents noyaux canoniques relatifs à une valeur singulière c, en considérant l'ordre de multiplicité du facteur $\lambda - c$ dans les mineurs successifs de $D(\lambda)$. Complétant l'analogie déjà signalée par différents auteurs avec la théorie des diviseurs élémentaires, il montre que *les ordres des pôles des résolvantes canoniques sont les exposants des diviseurs élémentaires de la déterminante*.

L'étude de la partie principale de la résolvante dans le domaine d'un pôle a conduit à introduire certaines fonctions, appelées *fonctions principales*, dont les fonctions fondamentales ne sont qu'un cas particulier. La détermination de ces fonctions exige la résolution d'un système d'équations intégrales homogènes ; et ce système se ramène, comme l'a montré Fredholm, à une équation unique. En développant les calculs, M. Platrier a pu obtenir l'expression explicite des fonctions principales au moyen de formations analytiques, analogues aux mineurs de Fredholm.

La seconde Partie du travail, la plus originale, est consacrée à

des problèmes tout différents. L'Auteur s'y est proposé de poursuivre les recherches récentes de M. Picard sur les équations intégrales de troisième espèce. Soient $k(x, y)$ un noyau borné et intégrable, $f(x)$ une fonction de même nature dans l'intervalle $(0, 1)$, a un nombre compris entre zéro et un, p un nombre positif, E le champ obtenu en retranchant de l'intervalle $(0, 1)$ l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \eta)$, ε et η étant deux nombres positifs très petits. L'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E \frac{K(x, s)}{|s - a|^p} ds$$

a une solution $\Phi(x, \lambda; \varepsilon, \eta)$, dont il s'agit de trouver la limite lorsque ε et η tendent vers zéro. Les recherches de M. Picard, dans le cas particulier de $p = 1$, avaient conduit à cette conclusion inattendue que la limite dépend homographiquement d'une constante C, égale à la limite du rapport $\log\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)$. Reprenant cette étude pour une valeur quelconque de p, M. Platrier montre d'abord que la résolvante a une limite parfaitement déterminée lorsque p est inférieur à un, pourvu que $k(x, y)$ soit borné et intégrable. Dans ce cas, du reste, la solution de Fredholm est directement applicable.

Si p est supérieur à un, on doit supposer que k et f sont des fonctions holomorphes. Pour trouver la limite de $\Phi(x, \lambda; \varepsilon, \eta)$ lorsque ε et η tendent vers zéro, il est nécessaire de connaître la partie principale de chaque terme de la fraction qui représente la solution donnée par la formule de Fredholm. Si p n'est pas un nombre entier, cette limite est bien déterminée; mais si p est un nombre entier, l'intégration introduit un logarithme et la limite dépend homographiquement d'un paramètre $C = l \sin \log\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)$, comme dans le cas de M. Picard.

Dans un ordre d'idées un peu analogue, M. Platrier étudie ensuite certaines équations intégrales dans le domaine complexe, considérées déjà dans un cas particulier par M. Lalesco. Quand on fait varier le chemin d'intégration, la solution dépend d'un ou plusieurs nombres entiers, dont elle est une fonction rationnelle. Tous ces résultats sont encore susceptibles de généralisations étendues, indiquées par l'Auteur à la fin de son travail.

La R.

STUDY (E.). — Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Zweites Heft : *Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche*, herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke. 1 vol. in-8°, avec 43 figures, VII-142 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

La *représentation conforme* est une question essentiellement géométrique, elle l'est par son origine et par son énoncé; elle l'est aussi par le nombre et l'intérêt des questions de géométrie, même élémentaire, qui s'y rattachent. Par contre, si l'on se pose le problème d'une façon générale, il se trouve identique à un des problèmes essentiels de l'Analyse : la détermination d'une fonction analytique par ses valeurs sur un contour. Le Livre de M. Study s'est ressenti de cette double parenté; quoique consacré, en principe, à un sujet de Géométrie, il comporte toute une première Partie purement analytique, de cette analyse spéciale des théorèmes d'existence que M. Volterra appelle la Physique mathématique de première espèce. Une deuxième Partie, quelques paragraphes exceptés, a une allure plus concrète; elle est même accompagnée de figures qui ne sont pas seulement des schémas.

Pour tout théorème d'existence, il importe de bien préciser les termes de l'énoncé; un premier Chapitre est donc consacré à la définition d'un *domaine d'un seul tenant, simplement connexe;* cette définition est même étendue aux domaines d'une surface de Riemann. La proposition fondamentale est alors : on peut trouver une transformation biunivoque, partout continue, et *conforme* (conservant les angles), qui fasse correspondre aux points *intérieurs* à un domaine donné, d'un seul tenant et simplement connexe : soit (A) la totalité des points d'une sphère, soit (B) l'ensemble de ces points moins un, ou encore la totalité des points du plan complexe, soit enfin (C) l'ensemble des points intérieurs à un cercle de rayon 1. On sait qu'il suffit pour cela de montrer l'existence d'une fonction analytique $w = f(z)$, définie, par exemple, dans le cas (C) pour $|z| < 1$, et dont les valeurs w sont tous les points intérieurs au domaine donné. Le cas (A) se distingue des deux autres par une simple considération d'*analysis situs;* il suffit de chercher si le domaine est clos ou non (avec ou sans frontière). Le cas (B) est aussi distinct du cas (C), car,

d'après le théorème de Liouville sur les fonctions entières, il est impossible de faire la représentation conforme d'un cercle sur la totalité d'un plan.

La démonstration complète de la proposition fondamentale est de date récente, elle a été donnée simultanément par H. Poincaré (*Acta mathematica*, 1907) et M. P. Koebe (*Gött. Nachr.*, 1907); c'est la démonstration de ce dernier qu'a exposée M. Study (Chap. II, III, IV). La représentation conforme, dont l'existence est ainsi démontrée, n'est valable que pour les points intérieurs aux deux domaines; on peut se demander ce qu'elle devient pour les points des frontières. Cette question est évidemment liée à l'étude d'une série de Taylor sur son cercle de convergence; M. Study y consacre quatre Chapitres et se sert pour ce sujet de la définition de l'intégrale de M. Lebesgue et d'un très intéressant théorème de M. Fatou sur les points singuliers du cercle de convergence.

Plusieurs Chapitres (IX à XIV) sont ensuite consacrés à la représentation conforme de polygones plans, et de domaines convexes (au sens de Minkowski). Pour les polygones, la représentation est donnée, dans le cas le plus général, par les intégrales bien connues de Schwarz et Christoffel; pour les domaines convexes la démonstration de la loi d'existence est beaucoup simplifiée. Une liaison entre les deux cas est fournie par la notion de la *Stützwinkelfunction*, correspondance entre les tangentes aux frontières des deux domaines. Les discontinuités de cette fonction, étudiées d'après les méthodes de Stieltjes, permettent de distinguer entre les domaines *elliptique*, *hyperbolique*, *parabolique*. Ces cinq Chapitres forment la partie élémentaire du Livre; celle-ci est complétée par quelques exemples traités dans le dernier Chapitre (§ 16).

Deux Chapitres (XIV et XV) font un peu exception au caractère élémentaire de cette seconde Partie. Quelques-unes des recherches de MM. Landau et Caratheodory sur les généralisations du théorème de M. Picard peuvent s'interpréter par des propriétés de la représentation conforme, notamment sur la largeur minimum d'une surface convexe, image d'un cercle (Chap. XIV). Dans le Chapitre XV, M. Study expose comment M. Koebe a pu généraliser ce théorème pour la représentation conforme de deux domaines quelconques (*Verzerrungssatz*).

L'auteur n'a pas voulu épuiser toutes les questions relatives au sujet traité. Il n'y a que quelques indications sur le cas des domaines d'une surface de Riemann. De nombreuses applications élémentaires ont été également volontairement écartées et certaines démonstrations ont été seulement esquissées avec des renvois au Traité d'Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*.

J'ai vu avec plaisir que dans ce Traité, sur une question assez étendue, il n'y avait pas, comme dans d'autres Livres similaires, abus de *théorèmes;* simplement 19 énoncés, convenablement choisis et bien mis en évidence typographiquement, il me semble que pour le lecteur c'est un gros avantage; je ne veux pas dire, bien entendu, que ce soit là le seul mérite du Livre; le nom de l'auteur n'est-il pas à lui seul un sûr garant de l'excellence de l'œuvre?

A. Châtelet.

BOURLET (Carlo). — Cours de Mathématiques. *Éléments d'Analyse et de Géométrie analytique*, à l'usage des élèves architectes et ingénieurs. Deuxième édition, entièrement refondue. Un vol. in-8, VI-252 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Les quatre premiers Chapitres de cet Ouvrage contiennent le développement complet du programme des *Éléments d'Analyse et de Géométrie analytique* dont la connaissance est exigée des candidats à l'École nationale des Beaux-Arts, Section d'Architecture.

Le Chapitre V traite des rudiments du Calcul intégral qui servent d'introduction au Cours de Théorie de la Résistance des matériaux, que M. Carlo Bourlet, dont la Science déplore la perte si prématurée, professait à l'École des Beaux-Arts.

La lecture du Chapitre VI (Notions de Géométrie analytique à trois dimensions) pourra être très utile aux architectes désireux de compléter leur éducation mathématique.

Le Volume de M. Carlo Bourlet constitue un ensemble homogène des principales notions de Mathématiques supérieures indispensables aux élèves ingénieurs de toutes catégories.

Ed. L.

RAMSEY (A. S.). — A TREATISE ON HYDROMECHANICS (*Hydromechanics* by W.-H. BESANT and A.-S. RAMSEY). Part II, HYDRODYNAMICS, 1 vol. in-8, XIII-360 pages. London. W.-H. Bell and Sons, 1913.

Henri Poincaré a écrit : « Les Français traitent la Mécanique comme une science mathématique ; les Anglais la traitent comme une science expérimentale. » Tandis que nombre de Français s'efforcent à rendre à la Mécanique son caractère de science physique, les Anglais auraient-ils pris la fâcheuse détermination de la rendre purement mathématique ? L'Ouvrage que nous avons sous les yeux pourrait le faire craindre.

Si l'on souhaite un Livre où les théories purement mathématiques auxquelles donne lieu l'Hydrodynamique élémentaire soient exposées avec précision, avec clarté, avec élégance ; si l'on désire une ample collection de problèmes à l'aide desquels l'élève puisse s'exercer aux jeux algébriques que suggèrent ces théories, on trouvera tout cela dans l'*Hydrodynamics* de M. A.-S. Ramsey. Le déclarer n'est pas faire de ce Livre un mince éloge ; il n'est pas donné à tout le monde de présenter ces doctrines sous une forme aussi aisée.

En revanche, il ne faut point demander à ce traité les aperçus qui seraient surtout capables d'intéresser les physiciens.

L'un des titres de gloire des maîtres de la Science britannique, des Stokes, des Lord Kelvin, des P.-G. Tait, des Lord Rayleigh, est d'avoir insisté sur le rôle essentiel que les actions de viscosité jouent dans toute la Mécanique, mais, particulièrement, dans la Mécanique des fluides. Or, l'auteur se borne à dire que, pour ne pas introduire de complications dans un exposé élémentaire de l'Hydrodynamique, il est nécessaire de faire abstraction de ces forces. Encore que cette affirmation soit incontestable, peut-être la trouvera-t-on un peu sommaire.

Le choix de la relation supplémentaire qui établit une équation entre la pression, la densité et la température, est une question de Physique dont la solution influe grandement sur toute la marche du problème hydrodynamique. Se contentera-t-on de la brève indication que nous donne le n° 23 ?

A négliger ainsi les discussions de principes qui ressortissent à la Physique, ne risque-t-on pas, bien souvent, de consacrer ses

efforts à résoudre des problèmes qui ne sont mécaniques que par le nom, car ils ne correspondent à aucun mouvement réel ?

Au Chapitre VI, par exemple, l'auteur traite du régime permanent d'un courant liquide qui rencontre un obstacle. Fort justement, il montre que les vitesses ne peuvent, en général, être distribuées d'une manière continue au sein de la masse fluide ; celle-ci doit être divisée par des surfaces de glissement ; sinon, on pourrait être conduit à des résultats absurdes, tels que des valeurs négatives de la pression.

Au Chapitre suivant, l'auteur étudie le mouvement d'un solide dans un liquide. Complètement oublieux de ce que lui a appris l'étude de la rencontre d'un jet liquide avec un obstacle, il suppose que la distribution des vitesses est continue dans toute la masse liquide ; cette supposition lui paraît tellement naturelle et forcée qu'il ne l'énonce même pas.

Il traite, tout d'abord, le cas où le solide mû dans le liquide est une sphère. Il parvient naturellement (p. 155) au célèbre paradoxe de Dalembert : « Si la sphère se meut avec une vitesse uniforme... la résistance au mouvement sera égale à zéro. Cela est contraire à l'expérience ; les liquides qui se rencontrent dans la nature ne sont donc pas des *fluides parfaits*. » Il montre, en outre, que si la vitesse dont la sphère est animée surpasse une certaine limite, la pression prend, au sein du liquide, des valeurs négatives.

Il est donc prouvé que l'hypothèse de la continuité des vitesses, sur laquelle toute cette analyse est fondée, conduit à des résultats inadmissibles ; pour un physicien la cause est entendue ; il est inutile de poursuivre plus longtemps les conséquences de cette hypothèse ; il faut reprendre sur nouveaux frais la théorie du mouvement d'un solide dans un liquide, en admettant que la vitesse de ce dernier peut être discontinue le long de certaines surfaces.

Ce n'est pas ce que fait M. Ramsey. A partir des mêmes principes qui lui ont servi à traiter le mouvement de la sphère, il étudie le mouvement d'autres solides. Ce sont assurément de beaux problèmes de Mathématiques qu'il résout ainsi, et il les résout avec une grande élégance ; mais ce ne sont plus que problèmes d'Algèbre, dont on sait d'avance qu'ils ne peuvent avoir aucun sens physique. On dira peut être que le géomètre est bien libre de traiter ces problèmes *exercitationis gratiâ* ; il est vrai,

mais à la condition de ne les point donner comme problèmes d'Hydrodynamique, de Mécanique; car, ce faisant, il induit en erreur le physicien qui accepterait ses solutions sans discuter les principes d'où elles sont issues.

Si M. Ramsey suit, en l'étude de l'Hydrodynamique, cette méthode de géomètre insoucieux des réalités physiques, ce n'est pas, cependant, qu'il ait trop fréquenté les auteurs français. C'est bien rarement qu'il cite ces derniers, même les plus grands. Si Newton est cité (p. 331) comme auteur d'une formule inexacte de la vitesse du son, le nom de Laplace ne se trouve pas auprès de la formule exacte. Poisson est cité une seule fois, à propos de la propagation des ondes planes d'amplitude finie. Il est d'autres noms, celui de M. Boussinesq par exemple, qu'on chercherait en vain en ce traité d'Hydrodynamique.

En dépit de ces quelques critiques, reconnaissons que cet Ouvrage rendra de grands services à ceux qui y chercheront ce que l'auteur a voulu y mettre : Des problèmes d'Algèbre énoncés dans le langage de l'Hydrodynamique.

PIERRE DUHEM.

GUICHARD (C.). — PROBLÈMES DE MÉCANIQUE ET COURS DE CINÉMATIQUE. Conférences faite en 1912 aux candidats au Certificat de Mécanique rationnelle. Rédaction de MM. DAUTRY et DESCHAMPS. (*Cours et Conférences de la Sorbonne, publiés par l'Association générale des Etudiants de Paris.*) 1 vol. grand in-8°, IV-156 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1913.

MM. Dautry et Deschamps ont rédigé dans ce Livre les Conférences faites en 1912 par M. C. Guichard aux candidats au Certificat de Mécanique rationnelle. La première Partie de l'Ouvrage (Chapitres I à IV) est consacrée à l'exposé de problèmes et exercices sur l'ensemble tout entier du Cours de Mécanique rationnelle. La seconde Partie (Chapitres V et VI) est un Cours de Cinématique.

Il est indispensable à l'étudiant qui veut posséder à fond un Cours comme celui du Certificat de Mécanique, de s'être exercé sur de nombreux exemples : on n'a bien compris les théorèmes généraux que lorsqu'on sait les appliquer à des cas particuliers. D'où l'intérêt

qui s'attache aux recueils de problèmes sur les cours classiques. Les problèmes traités par M. Guichard se recommandent tant par leur intérêt propre et leur variété que par la nouveauté de certains d'entre eux.

M. C. Guichard commence, dans le Chapitre I, par des problèmes simples relatifs à la Cinématique plane : l'étude du mouvement d'un plan sur un plan, les propriétés du centre instantané, de la base et de la roulette, dans certains cas particuliers, sont fécondes en exercices intéressants, non seulement au point de vue mécanique, mais aussi au point de vue géométrique. Viennent ensuite, dans le Chapitre II, la cinématique du corps solide, soit mobile autour d'un point fixe, soit dans son mouvement général, et l'étude du mouvement d'un trièdre dont le sommet décrit une courbe gauche, ses trois arêtes étant respectivement la tangente, la normale principale et la binormale.

La dynamique du point et la géométrie des masses fournissent, dans le Chapitre III, des exercices plus variés : détermination de courbes telles qu'un point se déplaçant sur elles satisfasse à certaines conditions; mouvement d'un projectile avec résistance de milieu proportionnelle à la vitesse; mouvement d'un point soumis à certaines forces données, telles qu'une force centrale fonction particulière de la distance. La géométrie des masses, l'étude du centre de gravité et des moments d'inertie donnent lieu à un problème utile en résistance des matériaux. Signalons aussi la recherche du centre de gravité d'un arc de chaînette, et celle du moment d'inertie d'un tétraèdre régulier par rapport à une de ses arêtes.

Le Chapitre IV est consacré à des problèmes concernant la Dynamique des systèmes, et dont plusieurs ont été proposés aux examens dans différentes Facultés. Dans ce Chapitre, l'Auteur utilise fréquemment, à côté des théorèmes élémentaires généraux, la méthode des équations de Lagrange. Disons aussi que, pour ne négliger aucune application importante, il traite quelques problèmes relatifs à l'équilibre des systèmes avec fils, et à l'effet d'une percussion.

Les deux derniers Chapitres du Livre forment un Cours de Cinématique générale, que M. C. Guichard divise en trois parties : cinématique du point, cinématique du corps solide et théorie des mouvements relatifs.

La cinématique du point repose essentiellement sur la considération des deux vecteurs *vitesse* et *accélération*. L'Auteur commence par étudier la vitesse et donne le calcul de ses projections en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires. Il passe ensuite à l'accélération qu'il définit au moyen de l'hodographe : il en détermine les composantes tangentielle et centripète, d'abord géométriquement, puis analytiquement au moyen des formules de Serret-Frenet. Il donne les projections de l'accélération en coordonnées polaires, et termine en définissant les accélérations d'ordre supérieur.

Après la cinématique du point, vient celle du corps solide ou système invariable. On trouvera, tout d'abord, l'étude des trois mouvements simples fondamentaux : translation, rotation et mouvement hélicoïdal, avec la détermination, dans chaque cas, des vitesses des différents points du corps. Vient ensuite l'étude complète et détaillée, tant au point de vue géométrique qu'au point de vue analytique, du mouvement d'un plan sur un plan, avec toutes les propriétés du centre instantané de rotation et des deux courbes, base et roulette, dont le roulement l'une sur l'autre peut servir à définir le mouvement. Cette théorie est riche en applications géométriques : M. C. Guichard propose, comme exemples, l'étude des conchoïdes, podaires, développantes et développées, cycloïdes et épicycloïdes. Il termine l'exposé du mouvement d'un plan sur un plan par la détermination du *cercle des inflexions*, lieu des points du plan mobile pour lesquels la composante normale de l'accélération est nulle.

Il passe ensuite au mouvement d'un corps solide ayant un point fixe, et le ramène au roulement de deux cônes l'un sur l'autre ; et, enfin, au mouvement le plus général d'un solide, qui peut être considéré à chaque instant, au point de vue des vitesses, comme un mouvement hélicoïdal, et dont on a une représentation géométrique en imaginant une surface réglée liée au solide, et qui roule en glissant sur une surface réglée fixe à laquelle elle est tangente tout le long d'une génératrice, qui est l'axe instantané du mouvement hélicoïdal.

Pour achever la Cinématique, il reste à étudier les changements du système de comparaison, c'est-à-dire la théorie des mouvements relatifs et la composition des mouvements. Tandis que la compo-

sition des vitesses se fait par la règle simple du parallélogramme, celle des accélérations exige l'intervention du vecteur complémentaire de Coriolis. Enfin, une translation étant équivalente, au point de vue des vitesses, à un couple de deux rotations, la composition d'un nombre quelconque de rotations et de translations se fait comme celle d'un système de forces.

La rédaction du texte de l'Ouvrage, un peu trop hâtive peut-être par endroits, rend bien partout, néanmoins, je le crois, la pensée de l'Auteur. Étudiants et répétiteurs trouveront, avec satisfaction, dans ce Livre, un guide précieux pour la préparation aux examens.

H. Vergne.

WIENER (H.) und TREUTLEIN (P.). — Verzeichnis von Sammlungen mathematischer Modelle. Für Hochschulen, höhere Lehranstalten und technische Fachschulen. Zweite Ausgabe, mit 6 Tafeln. 1 vol. gr. in-8, 64 pages, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912.

M. P. Treutlein, dans l'*Avant-Propos* du Mémoire de M. H. Wiener, relatif à la Collection des modèles mathématiques qui lui sont dus et qui ont été construits par M. P. Treutlein, expose que ces modèles ont été construits, depuis plus de trente ans, pour les besoins de l'enseignement et qu'un grand nombre de professeurs les ont employés avec succès dans leurs cours. Les premiers modèles de M. H. Wiener, qui furent exécutés et utilisés par M. P. Treutlein, conviennent à l'enseignement dans les Universités. M. P. Treutlein, dans une Conférence qu'il fit en octobre 1909 à Gœttingue devant M. Félix Klein, a obtenu la pleine approbation de ce géomètre et des nombreux auditeurs de ses explications. Il eut le même succès lorsqu'il fit, en août 1910, à Bruxelles, sa Conférence sur l'enseignement de la Géométrie par les yeux. A présent qu'il est hors de doute que maîtres et élèves reconnaissent que les modèles mathématiques sont un précieux secours pour l'enseignement à tous les degrés, M. P. Treutlein a bien fait de se décider à compléter sa Collection par une série de nouveaux modèles que M. H. Wiener lui offrait pour cette Collection.

Le Mémoire de M. H. Wiener doit servir de complément aux modèles ; il sert d'éclaircissement à l'importante et abondante utilisation de la méthode intuitive dans l'enseignement mathématique ;

il peut être utile pour guider dans le maniement des modèles et dans la manière méthodique de s'en servir.

Le *Catalogue des Collections de Modèles mathématiques*, pour les Universités, les Établissements d'enseignement supérieur et les Écoles professionnelles d'enseignement technique, est une seconde édition qui diffère de la première par une étendue plus grande et par une destination plus large. Il existe maintenant une Collection en 18 séries de plus de 200 modèles ; de plus, la Collection de M. H. Wiener se continue en 4 nouvelles séries de 49 modèles qui traitent, en dehors des courbes géométriques du troisième ordre, différents genres de systèmes articulés relatifs à la cinématique de l'espace.

L'Éditeur informe qu'une extension de l'entreprise est projetée et souhaite que des spécialistes collaborent à son travail. Il indique que les modèles qu'il désire devraient servir plus à l'enseignement qu'à des recherches particulières ; qu'ils devraient former des séries comprenant des groupes complets de figures géométriques et des principes mathématiques, et non être composés de pièces séparées se rapportant à divers domaines.

L'élève que l'on initie aux abstractions mathématiques et géométriques doit être constamment renvoyé à la perception du monde extérieur, à l'observation des objets matériels et aux phénomènes qui se produisent entre eux. Dès l'âge de 10 à 11 ans, on doit lui donner un enseignement géométrique pratique pour développer en lui peu à peu la faculté d'abstraction qui lui permettra de traiter rigoureusement les choses mathématiques et le rendra capable, s'il continue ses études, de posséder la science mathématique nécessaire dans la vie.

Si l'emploi des modèles est non seulement utile, mais nécessaire, pour les grands élèves des Universités, il l'est, à plus forte raison, pour les jeunes écoliers de l'enseignement secondaire. De même que le maître doit arriver à devenir inutile aux élèves, leurs études terminées, de même les modèles doivent devenir inutiles et disparaître successivement du début à la fin des études.

Le maître ne doit pas négliger de faire construire, sous sa direction, par ses élèves eux-mêmes, certains corps géométriques simples ; mais il y aurait une perte regrettable de temps à leur faire construire les modèles compliqués.

Le Catalogue contient une courte description de toutes les séries et pièces, avec l'exposé des motifs du genre choisi pour l'exécution de chaque pièce.

Parmi les modèles de la Collection, citons :

Des modèles pour l'enseignement du Calcul et du Système métrique, de la Géométrie, soit plane, soit dans l'espace;

Des modèles des sections planes du cylindre et du cône circulaires;

Des modèles de quadrilatères articulés, de polyèdres articulés en fer-blanc et en papier;

Des modèles en fil pour les singularités des courbes géométriques;

Des modèles en fil métallique des surfaces du second ordre représentées par des sections principales et par des sections circulaires.

Er. L. et Em. L.

SAINTE-LAGUË (A.). — Notions fondamentales de Mathématiques. *Introduction au Cours de Mathématiques générales : Arithmétique, Algèbre, Trigonométrie, Géométrie, Cinématique, Tables numériques.* Avec Préface de G. Koenigs. Un vol. in-8, VII-512 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1913.

L'esprit dans lequel a été conçu le présent Ouvrage, la manière dont son exécution a été conduite, plairont à ceux qui ont le souci de voir la Mathématique continuer à servir de base au développement de nos connaissances. Ce développement est tel aujourd'hui, surtout dans le domaine de la Mécanique et de la Physique, il excite tellement les aspirations et les ambitions de notre moderne jeunesse qu'on aurait grand tort de ne point se préoccuper de constituer un enseignement des Mathématiques plus adapté aux exigences pratiques.

Disons tout de suite que ce qui doit caractériser un tel enseignement ce sont moins ses programmes que sa méthode. Un enseignement abstrait, dogmatique, qui ne montre les choses que sous leurs formes logiques est pratiquement inopérant. Au contraire, l'éveil de l'intuition, l'examen direct des choses, le recours occasionnel à l'expérience sont éminemment propres à préparer les esprits à

traiter mathématiquement les contingences, sans exclure le souci d'une correcte application du raisonnement.

Un enseignement de ce genre est devenu nécessaire; il doit être l'œuvre de nos meilleurs maîtres, car leur savoir et leur expérience les garantiront mieux que d'autres des solécismes mathématiques, de l'à peu près et de l'imprécision. Car la précision est au moins aussi nécessaire à celui qui veut faire aboutir une formule à un résultat numérique qu'à celui qui se contente d'y voir un résultat logique.

Nous devons donc louer hautement M. Sainte-Laguë d'avoir entrepris cette tâche. Sous le nom de *Mathématiques générales*, on a constitué en France, depuis quelques années, un programme d'enseignement qui, pratiqué bien entendu dans le sens que nous venons d'indiquer, peut et doit rendre les plus grands services. Mais, pour beaucoup, les lacunes de leur savoir concernent des matières plus élémentaires que celles de cet enseignement, déjà relevé. Le présent Livre leur offrira le moyen de combler ces lacunes, de consolider leurs connaissances élémentaires et les initiera à des formes de pensées, à des modes de conception qui les rapprocheront eux-mêmes des applications.

Nous nous reprocherions de ne pas attirer spécialement l'attention sur les exercices dont certains sont très originalement posés : leur choix judicieux est de nature à concourir le plus utilement au but général de l'Ouvrage. G. Koenigs.

MÉLANGES.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE PROCÉDANT SUIVANT LES INVERSES DE POLYNOMES DONNÉS;

Par M. Paul Appell.

I. Dans leurs recherches sur l'attraction mutuelle de deux sphères électrisées, ou d'une sphère et d'un plan, MM. A. Guillet et M. Aubert (*C. R. Acad. Sc.*, t. 155, 1912, p. 139, 204, 708

et 820; t. 157, 1913, p. 367), ont rencontré des développements procédant suivant les inverses de certains polynomes analogues aux fonctions sphériques, polynomes qu'ils nomment *électro-sphériques* (*loc. cit.*, p. 820).

Dans le cas fondamental, sphère et plan (*loc. cit.*, p. 139), s'introduisent les polynomes U_n ayant pour fonction génératrice

$$\frac{1}{1-2uz+z^2} = \Sigma z^n U_n(u);$$

la capacité commune des deux armatures en présence est, à un facteur près, donnée par la série

$$\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots + \frac{1}{U_n} + \ldots.$$

et la force F, appliquée au conducteur sphérique, est, à un facteur près, représentée par la dérivée de cette série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{d}{du}\left(\frac{1}{U_n}\right).$$

Il se pose ainsi une question d'analyse que j'ai déjà étudiée sommairement dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 157, 1913, p. 5) et au sujet de laquelle je voudrais donner ici quelques compléments.

II. Soient $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ... des polynomes *donnés*, de degrés marqués par l'indice, dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de x est supposé égal à l'unité. Cette hypothèse n'a rien d'essentiel, car si l'on donnait des polynomes X_n dans lesquels le coefficient de x^n serait une constante k_n, différente de zéro, il suffirait de faire, dans ce qui suit,

$$P_n(x) = \frac{1}{k_n} X_n.$$

Supposons également que, x désignant une variable complexe,

$$x = x' + ix'',$$

les racines du polynome $P_n(x)$ soient, pour toutes les valeurs

de n, représentées sur le plan complexe par des points situés à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon déterminé R.

Soit, d'autre part, $f(x)$ une fonction donnée, régulière à l'extérieur de ce cercle, c'est-à-dire développable en série de la forme

$$(1) \qquad f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x telles que $|x| > \mathrm{R}$.

Le problème est de développer $f(x)$ sous la forme suivante :

$$(2) \qquad f(x) = \mathrm{A}_0 + \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{P}_1(x)} + \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{P}_2(x)} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{P}_n(x)} + \ldots,$$

les A_n étant des coefficients indépendants de x.

En supposant le développement possible pour les valeurs de x, dont le module surpasse un nombre déterminé R′, supérieur ou égal à R, on peut, comme je l'ai montré, déterminer les coefficients A_ν, de proche en proche, par des équations linéaires, en remarquant que le développement de la différence

$$\Delta_n = f(x) - \mathrm{A}_0 - \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{P}_1(x)} - \ldots - \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{P}_n(x)},$$

suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$, commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$.

En particulier, si l'on applique la méthode générale au développement de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x-y},$$

pour

$$|y| < \mathrm{R}, \qquad |x| > \mathrm{R}' \geq \mathrm{R},$$

on trouve que ce développement est de la forme

$$(3) \qquad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{\mathrm{P}_1(x)} + \frac{\mathrm{Q}_1(y)}{\mathrm{P}_2(x)} + \ldots + \frac{\mathrm{Q}_{n-1}(y)}{\mathrm{P}_n(x)} + \ldots,$$

où les numérateurs $\mathrm{Q}_{n-1}(y)$ sont des polynomes, de degrés $n-1$ en y, dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de y est l'unité. Les dérivées successives de ce développement par rapport à y donneront les développements analogues de

$$\frac{1}{(x-y)^2}, \quad \frac{1}{(x-y)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(x-y)^\nu}.$$

III. C'est au sujet de ce développement (3), qui est fondamental à cause de la formule de Cauchy, que je vais présenter quelques remarques permettant de calculer directement le polynome Q_n, à l'aide des fonctions symétriques des racines des polynomes P_n.

Prenons d'abord le cas particulier où les polynomes P_n ont, quel que soit n, toutes leurs racines égales :

$$P_n(x) = (x - \lambda_n)^n.$$

On aurait alors

$$(4) \qquad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{x-\lambda_1} + \frac{Q_1(y)}{(x-\lambda_2)^2} + \ldots + \frac{Q_{n-1}(y)}{(x-\lambda_n)^n} + \ldots$$

Si, dans cette identité, on fait $y = \lambda_1$, on voit que tous les polynomes $Q_1(y), \ldots, Q_{n-1}(y), \ldots$ s'annulent. De même en prenant la dérivée par rapport à y, des deux membres, et faisant $y = \lambda_2$, on voit que toutes les dérivées premières des Q s'annulent, sauf Q'_1, qui est une constante. En général, en prenant la dérivée d'ordre ν par rapport à y, puis faisant $y = \lambda_{\nu+1}$, on voit que toutes les dérivées d'ordre ν des polynomes Q s'annulent, sauf Q_ν^ν qui est une constante $1.2. \ldots \nu$.

On a donc

$$(5) \qquad Q_n^\nu(\lambda_{\nu+1}) = 0$$

pour

$$\nu \neq n.$$

Si $\nu > n$, cette dérivée est nulle identiquement, mais en écrivant qu'elle est nulle pour

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

on a n équations linéaires qui déterminent les n coefficients du polynome Q_n. Ces équations sont toujours résolubles, car la dernière ne contient qu'une inconnue, la précédente deux, la précédente trois, etc.

IV. Le polynome Q_n est alors déterminé par la résolution d'une sorte de problème spécial d'interpolation, dans lequel on donne les valeurs d'un polynome et de ses dérivées successives pour des valeurs données de la variable.

Supposons maintenant que le polynome $P_\nu(x)$ ait, quel que soit ν, toutes ses racines distinctes et égales à

$$\lambda_{\nu,1}, \quad \lambda_{\nu,2}, \quad \ldots, \quad \lambda_{\nu,\nu}.$$

Décomposons $\frac{1}{P_\nu(x)}$ en fractions simples, et soit

$$(6) \qquad \frac{1}{P_\nu(x)} = \frac{L_{\nu,1}}{x-\lambda_{\nu,1}} + \frac{L_{\nu,2}}{x-\lambda_{\nu,2}} + \ldots + \frac{L_{\nu,\nu}}{x-\lambda_{\nu,\nu}}$$

Dans le développement supposé

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Q_n(y)}{P_{n+1}(x)},$$

faisons successivement

$$y = \lambda_{\nu,1}, \qquad y = \lambda_{\nu,2}, \qquad \ldots, \qquad y = \lambda_{\nu,\nu}:$$

puis multiplions les développements obtenus par $L_{\nu,1}, L_{\nu,2}, \ldots, L_{\nu,\nu}$ et ajoutons-les de façon à réaliser, dans le premier membre, la combinaison (6).

Nous obtiendrons

$$(7) \qquad \frac{1}{P_\nu(x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{L_{\nu,1}Q_n(\lambda_{\nu,1}) + L_{\nu,2}Q_n(\lambda_{\nu,2}) + \ldots + L_{\nu,\nu}Q_n(\lambda_{\nu,\nu})}{P_{n+1}(x)}.$$

Mais alors, dans le second membre, tous les coefficients doivent être nuls, excepté celui du terme pour lequel

$$n+1 = \nu, \qquad n = \nu - 1.$$

On a ainsi les équations suivantes, où nous supposerons n donné :

$$(8) \qquad L_{\nu,1}Q_n(\lambda_{\nu,1}) + L_{\nu,2}Q_n(\lambda_{\nu,2}) + \ldots + L_{\nu,\nu}Q_n(\lambda_{\nu,\nu}) = 0$$

pour

$$\nu = n+1:$$

la quantité (8) est, au contraire, égale à 1 pour $\nu = n+1$.

Ces sommes (8), en nombre infini, sont identiquement nulles pour $\nu > n+1$, en vertu des relations élémentaires (9) qui existent entre les résidus $L_{\nu,1}, L_{\nu,2}, \ldots, L_{\nu,\nu}$ et les racines $\lambda_{\nu,1}, \lambda_{\nu,2}, \ldots, \lambda_{\nu,\nu}$.

Mais pour

$$\nu \leqq n+1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

les relations (8) fournissent n équations linéaires pour calculer les n coefficients qui figurent dans $Q_n(y)$.

Ces équations peuvent encore être résolues, car elles présentent aussi cette circonstance que chacune d'elles contient une inconnue de plus que la suivante. Cela résulte des relations

$$(9) \qquad L_{\nu,1}\lambda_{\nu,1}^p + L_{\nu,2}\lambda_{\nu,2}^p + \ldots + L_{\nu,\nu}\lambda_{\nu,\nu}^p = 0$$

pour

$$p = 0, 1, 2, \ldots, (\nu - 2),$$

qui s'obtiennent immédiatement, comme il est connu, en développant les deux membres de l'identité (6) suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$. Au contraire, la quantité (9) est égale à 1, pour $p = \nu - 1$.

On pourrait traiter de même le cas général où le polynome P_n aurait des racines multiples en nombre quelconque.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus : a history of Greek astronomy to Aristarchus, together with Aristarchus's Treatise on the sizes and distances of the sun and moon. A new Greek trans. and notes by Sir *Thomas Heath.* In-8, 432 p. London, Frowde. 18 s.

Fubini (G.). — *Lezioni di analisi matematica.* In-8, 535 p. Turin, Soc. Tip. Ed. Naz. 14 L.

Horbiger's Glacial-Kosmogonie. Eine neue Entwickelungsgeschichte des Weltalls u. des Sonnensystems. Auf Grund der Erkenntnis des Widerstreites e. kosm. Neptunismus m. e. ebenso universellen Plutonismus nach den neuesten Ergebnissen samtl. exakter Forschungszweige beab m. eigenen Erfahrgn. gestützt u. hrsg. v. *Ph. Fauth.* Lex. in-8, XXXII-772 p. avec 212 fig. Kaiserslautern, H. Kayser. Relié, 30 m.

JORDAN (Camille). — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* T. II. Calcul intégral (intégrales définies et indéfinies). 3e édit. rev. In-8. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

Opus palatinum. Sinus- u. Cosinus-Tafeln von 10″ zu 10″. Hrsg. v. *W. Jordan.* 2. bericht. Aufl. Lex. in-8, VII-270 p. Hannover, Hahn. 7 m.

STUDY (E.). — *Vorlesungen üb. ausgewählte Gegenstände der Geometrie.* 2. Heft. Konforme Abbildg. einfacher zusammenhäng. Bereiche. Hrsg. unter Mitwirkg. v. *W. Blaschke.* Gr. in-8, V-142 p. avec 43 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m. 60.

VIVANTI (G.). — *Esercizi di Analisi infinitesimale.* In-8, 320 p. Pavia, Mattei e Co. 15 L.

VOLTERRA (Vito). — *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910. In-8, IV-172 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr. 50.

SCHRÖDER (J.) — *Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Madchenschulen Deutschlands, insbesondere Norddeutschlands.* Mit e. Schlusswort zu Bd. I. v. *F. Klein.* I. Bd. 5. Heft. (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.*) In-8, XII-III-183 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 m.

OTT (Karl). — *Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie.* IV. Bd. 2 Heft. (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.*) In-8, VI-128 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m.

Annales de l'Observatoire de Paris. Observations 1906. In-4° (31-22), VIII-62-104-86-4-243-96-83 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

Annales du Bureau central météorologique de France. Mémoires. Année 1908. In-4 (33-25), XI-177 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Berichte u. Mitteilungen, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. T. VIII. Gr. in-8, p. 129-186 avec 1 portrait. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. 60.

BIGOURDAN (G.). — *Observations de nébuleuses et d'amas stellaires.* T. III, 2e partie. Observations différentielles XII h. 0 m. — XIV h. 0 m. In-4 (31-22), IV-119 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

BOURLET (C.). — *Cours de Mathématiques. Éléments d'Analyse et de Géométrie analytique à l'usage des élèves architectes et ingénieurs.* 2e édit. In-8, VI-250 p. avec 101 fig. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

FABRY (E.). — *Problèmes et exercices de Mathématiques générales.* 2e édit. In-8, 500 p. Paris, A. Hermann et fils. 10 fr.

FRISCHAUF (Johs.). — *Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme u. Kartographie des Erdsphäroids.* In-8, XII-192 p. avec 23 fig. Stuttgart, K. Wittwer. 7 m. 50; relié, 8 m. 40.

AMODEO (F.). — *Lezioni di Geometria proiettiva* dettate nella R. Università di Napoli. In-8, XV-506 p. Napoli, L. Pierro. 12 L.

CALDRERA (F.). — *Trattato dei determinanti.* In-8, 255 p. Palermo, Virzi. 7 L.

CAPRILLI (A.). — *Nuove formule d'integrazione.* VII-178 p. Livorno, S. Belforte et Cie. 4 L.

HATTON (J.-L.-S.). — *The principles of projective geometry applied to the straight line and conic.* 9, 50-6, 25, 376 p. Cambridge, Univ. Press. 10 s. 6 d.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet v. *Karl* Orthmann u. *Fel. Müller*. Im Verein m. anderen Mathematikern u. unter besond. Mitwirkg v. *Alb. Wangerin* u. *Erich Salkowski* sowie der Berliner mathemat. Gesellschaft hrsg. v. *Emil Lampe*. 41. Bd. Jahrg. 1910. 3. (Schluss-)Heft. gr. in-8, LXXIX et p. 753-1137. Berlin, G. Reimer. 17 m. 50.

PICART (Luc). — *Calcul des orbites et des éphémérides.* 320 p. avec 22 fig. Paris, O. Doin et fils. 5 fr.

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Stiftung *Heinrich Lanz*. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Jahrg. 1912. Bd. III A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften. Gr. in-8. Heidelberg, Carl Winter. 17 m. 10.

VOOS (A.). — *Ueber das Wesen der Mathematik.* Rede, erweitert u. m. Anmerkgn. versehen. 2., sorgfältig durchgeseh. u. verm. Aufl. Gr. in-8, IV-123 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m.

HILBERT (Dav.). — *Wissenschaft u. Hypothese.* Neue Aufl. VII : *Grundlagen der Geometrie.* 4., durch Zusätze u. Literaturhinweise v. neuem verm. u. m. 7 Anhängen verseh. Aufl. In-8, VI-258 p. avec de nombreuses figures. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 6 m.

PLANCK (MAX.). — *Leçons de Thermodynamique, avec une conférence sur le théorème de Nernst et l'hypothèse des Quanta*, trad. par *R. Chevassus*. In-8, VIII-320 p. Paris, A. Hermann et fils. 12 fr.

LORIA (Gino). — *Vorlesungen üb. darstellende Geometrie.* Autoris., nach dem italien. Mskr. bearb. deutsche Ausg. v. *Fritz Schütte*. 2. Tl. : Anwendungen auf ebenfläch. Gebilde, Kurven u. Flächen. (B. G. Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen, n° 25.) Gr. in-8, XII-294 p. avec 146 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 11 m.; relié, 12 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WEBER (H.). — LEHRBUCH DER ALGEBRA. Kleine Ausgabe in einem Band. 1 vol. in-8°, x-528 pages. Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1912.

L'Algèbre supérieure de Serret est vieille maintenant de plus de cinquante ans. Celle de Salmon commence aussi à dater; d'ailleurs, elle ne contient rien des théories les plus en vogue actuellement, comme celle des groupes et celle des corps algébriques. L'excellent Ouvrage de M. Vogt : *Leçons sur la résolution algébrique des équations*, est plus récent, mais il ne traite qu'un sujet restreint. Comme livre d'Algèbre supérieure, au courant, il n'y avait jusqu'ici que le *Lehrbuch der Algebra* de M. Weber (1). Mais combien de lecteurs, surtout parmi les lecteurs français, ne se sont-ils pas laissé effrayer, tout d'abord, à la vue de ses trois gros volumes (2). C'est pour eux que l'illustre professeur de Strasbourg en a publié le présent extrait. Je dis *extrait* et non pas *abrégé*. Je veux dire par là que l'auteur a procédé de la façon suivante : il a supprimé complètement certaines théories, et dans celles qu'il gardait il a supprimé certains points de détail; mais il n'a rien omis des explications nécessaires à la compréhension du reste.

On sait avec quelle merveilleuse concision rédige M. Weber. On en jugera une fois de plus par l'énumération des matières que le Livre qui nous occupe contient dans ses 528 pages. Ne sont supposées connues à l'avance que les parties les plus élémentaires de l'Algèbre, celles qui, chez nous, font partie du programme du baccalauréat. Quant à celles qui font partie de notre programme de

(1) Voir *Bull. des Scienc. math.*, 2e série, t. XV, 1891, p. 105; t. XIX, 1895, p. 161; t. XXI, 1897, p. 93; t. XXII, 1898, p. 181, 293; t. XXIII, 1899, p. 131.

(2) L'Ouvrage de M. Weber : *Elliptische Functionen und Algebraïsche Zahlen*, dont il est rendu compte dans le *Bulletin*, t. XV, 1891, p. 105, a été refondu par l'auteur et forme, depuis 1908, le troisième volume du *Lehrbuch der Algebra*.

Mathématiques spéciales, inutile de les énumérer; bornons-nous à citer quelques compléments qui ne sont pas ordinairement traités dans nos cours : règle de Laplace pour le développement des déterminants; loi d'inertie des formes quadratiques, règle pour trouver le nombre des carrés positifs et celui des carrés négatifs dans la décomposition; théorème de Gauss sur le produit de deux polynomes; résolution algébrique des équations du troisième et du quatrième degré; théorèmes de Sturm et de Fourier; approximation des racines par la méthode de Bernoulli; résolution trigonométrique des équations du troisième degré; résolution des équations trinomes d'après Gauss.

Voici maintenant l'énumération des matières complètement en dehors des programmes français : théorie des groupes en général, groupes abéliens, suite de décomposition d'un groupe, théorème de M. Jordan sur l'invariance des indices d'une telle suite, théorème de Kronecker sur la représentation univoque des éléments d'un groupe abélien au moyen de certains d'entre eux jouant le rôle d'éléments premiers; applications de la théorie des groupes à celle des équations, équations des troisième et quatrième degrés, équations abéliennes, équations cycliques, comment les premières se ramènent aux secondes et résolution de celles-ci, application à la division des angles; équation et congruence binomes; restes quadratiques, loi de réciprocité; irréductibilité de l'équation de division du cercle, périodes dans cette équation, équation aux périodes; nombres complexes de Gauss; résolution algébrique des équations; corps algébrique, fonctionnaux, leur application aux nombres algébriques et au théorème de la décomposition univoque des nombres algébriques entiers en facteurs premiers (cette façon d'arriver à ce théorème fameux, due à M. Weber, est particulièrement rapide); théorème de Fermat dans un corps algébrique quelconque; idéaux de Dedekind; théorème de Dedekind sur les discriminants des corps algébriques; idéaux premiers dans les corps normaux; application des théories précédentes au corps de la division du cercle.

Je me borne à cette énumération, je n'analyse pas. C'est inutile. Cette analyse a été faite dans le *Bulletin*, pour le Livre complet, d'une façon magistrale, par le regretté J. Tannery (*voir* 2e série, t. XIX, 1895, p. 161, et t. XXI, 1897, p. 93).

En parlant de toutes ces belles choses, je ne peux me défendre d'un sentiment de regret, en pensant qu'elles sont si peu étudiées en France. Un licencié ou même un agrégé a le droit de les ignorer.

Au moment où j'écris, j'apprends que M. le Ministre de l'Instruction publique vient de mettre à l'étude une proposition tendant à introduire dans l'obtention du diplôme d'études supérieures, exigé des candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques, une épreuve portant sur un programme comprenant en particulier les éléments de la théorie des groupes et l'application de cette théorie à celle des équations. Tout cela se trouve dans le Livre dont nous parlons. Les candidats y trouveront aussi un peu de Théorie des Nombres, ce qui ne pourra pas leur faire de mal.

Comme le prouve le Livre de M. Weber, l'Algèbre et la Théorie des Nombres sont inséparables.

E. Cahen.

AUTONNE (Léon). — Sur les groupes de matrices linéaires non intervertibles. *Annales de l'Université de Lyon*, nouvelle série, I. *Sciences, Médecine*, fasc. 25. 1 vol. gr. in-8°, IV-79 pages. Lyon, Rey; Paris, Gauthier-Villars, 1909).

Une matrice n-aire est un tableau carré de n^2 éléments a_{ik}. Le produit $[a_{ik}][b_{ik}]$ de deux matrices n-aires est constitué par les éléments $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$. Un groupe de matrices n-aires est un ensemble de matrices tel que le produit de chaque matrice de l'ensemble par toute autre matrice de l'ensemble fasse partie de l'ensemble. Dans le cas des matières invertibles, c'est-à-dire de déterminant non nul, la théorie de ces groupes se confond avec celle des groupes des transformations linéaires homogenes correspondantes

$$(1) \qquad x'_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et a donné lieu à de nombreuses et importantes recherches bien connues.

Dans ce Mémoire, M. Autonne aborde l'étude des groupes de

matrices à rang variable. Pour interpréter encore, dans ce cas, les formules (1), il y fait usage d'une terminologie géométrique, relative aux variétés linéaires de l'espace à $n-1$ dimensions, auxquelles il donne le nom de *droites* : cette terminologie a fait l'objet d'un Mémoire précédent de l'auteur [1].

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe de matrices n-aires à rang variable. Toutes celles de ces matrices dont le rang ne dépasse pas ρ forment un sous-groupe G_ρ; celles qui sont de rang minimum r constituent un groupe G, qui sera dit le *noyau* de $\mathfrak{G}$: l'auteur se limite au cas $r > 0$.

Toute matrice A de $\mathfrak{G}$ se met sous la forme

$$(2) \qquad A = \begin{vmatrix} a & a\alpha_{12} \\ \alpha_{21}a & \alpha_{21}a\alpha_{12} + a_{22} \end{vmatrix} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}),$$

où les petites lettres désignent elles-mêmes des tableaux, les multiplications et les additions de ces lettres ayant les significations bien connues : a est une matrice r-aire, inversible; a_{22} une matrice $(n-r)$-*aire*; α_{12} et α_{21} sont respectivement des tableaux à r lignes, $(n-r)$ colonnes; et $(n-r)$ lignes, r colonnes.

Pour une matrice du noyau, on a $a_{22} = 0$; et l'on écrit simplement

$$(3) \qquad A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, 0) = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}).$$

L'étude des noyaux, c'est-à-dire des groupes à rang fixe r, est liée par l'auteur à celle des sous-groupes formés de matrices (3), dans lesquelles α_{12} et α_{21} sont les mêmes; ces sous-groupes sont isomorphes holoédriquement à des groupes de matrices r-aires invertibles.

La solution du problème de la construction des groupes-noyaux est achevée par l'auteur dans le cas où tous les sous-groupes en question ont leurs matrices deux à deux inverses, cas qui contient celui des groupes finis. Les matrices a forment alors un groupe ordinaire Γ; et les α_{12}, α_{21} sont assujettis à la seule condition que les matrices $e_r + \alpha_{12}\alpha_{21}$ (e_r désigne la matrice r-aire unité) appartiennent à Γ.

---

[1] *Sur les coordonnées plückeriennes de droite, dans un espace à $n-1$ dimensions* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, IIe Cahier, p. 109).

Relativement aux groupes $\mathfrak{G}$, à noyau G donné, l'auteur se borne à des cas particuliers ; cas où le noyau appartient à la classe précédente ; cas où le groupe est permutable à lui-même ; cas où le noyau est permutable à toute matrice du groupe extérieure au noyau. Dans ces divers cas, les matrices du groupe présentent des particularités de forme, mais qui ne suffisent pas à fournir la construction effective du groupe.

E. Vessiot.

GEVREY (Maurice). — Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques*, soutenue le 30 juin 1913, sous la présidence de M. Émile Picard. 1 vol. in-4, IV-212 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Les problèmes aux limites auxquels conduit l'étude des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique et du type elliptique ont fait l'objet d'un grand nombre de recherches, dont les résultats les plus importants sont déjà classiques. Jusqu'à ces dernières années, les équations générales du type parabolique avaient été moins bien étudiées. Cependant, pour ne citer que les travaux les plus récents, MM. Holmgren et Eugenio Levi avaient publié de fort beaux Mémoires sur l'équation de la chaleur et l'équation plus générale

$$\delta z = f(x, y), \text{ en désignant par } \delta z \text{ l'expression } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Les problèmes aux limites qui interviennent dans ces équations participent à la fois du problème de Cauchy, par la nature du contour qui portera les données, et du problème de Dirichlet, par les données elles-mêmes qui sont du genre elliptique.

M. Gevrey s'est proposé d'étudier les équations générales du type parabolique à deux variables, linéaires et non linéaires.

Les nombreuses questions qu'il a traitées peuvent se rattacher à deux recherches distinctes. D'une part, il établit l'existence d'intégrales satisfaisant à des conditions aux limites dont le type était fourni par l'équation de la chaleur ; il étudie ensuite la nature analytique de ces intégrales considérées comme fonctions, soit de x,

soit de y, soit des deux variables à la fois. Pour le premier objet, il fait un usage constant de la méthode féconde des approximations successives de M. Picard, ce qui l'amène tout d'abord à résumer les résultats de M. Levi sur les intégrales de l'équation

$$\delta z = f(x, y),$$

et à les compléter sur plusieurs points importants, tout particulièrement en ce qui concerne les limitations de l'intégrale et de ses dérivées dans le domaine et l'allure de ces dérivées sur le bord. C'est l'objet d'un premier Chapitre où l'auteur est obligé d'entrer dans des détails parfois un peu minutieux et exigeant d'assez longs calculs, mais qui sont indispensables pour la suite.

Toute équation linéaire du type parabolique, tout au moins dans un champ où le coefficient b de $\frac{\partial z}{\partial y}$ est négatif, peut être ramenée à la forme canonique

$$\delta z = a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f.$$

On en déduit, en suivant la même marche que M. Picard pour le cas elliptique, une équation intégro-différentielle pour déterminer une intégrale satisfaisant aux conditions aux limites. Cette équation est ici du type de Volterra, ce qui facilite beaucoup l'emploi de la méthode des approximations successives, mais c'est surtout, comme dans beaucoup de cas analogues, la démonstration de la proposition réciproque qui offre le plus de difficultés.

M. Gevrey parvient à les surmonter grâce aux limitations qui ont été faites dans le premier Chapitre. Dans les paragraphes suivants, la solution est étendue aux équations paraboliques non linéaires et aux équations du type parabolique-elliptique à n variables. Dans le cas de deux variables, l'équation peut être ramenée à l'une des deux formes

$$\delta z = f(x, y, z, p), \qquad \delta z = f(x, y, z, p, q).$$

Les méthodes d'approximations successives s'appliquent encore, mais, comme on devait s'y attendre, l'existence de l'intégrale n'est établie que dans une bande comprise entre deux caractéristiques et dont la hauteur est limitée par le calcul lui-même. Tandis que le premier type ne présente pas de difficultés essentiellement nou-

velles, le second type exige au contraire une discussion bien plus délicate, que M. Gevrey a pu mener jusqu'au bout, grâce à d'ingénieuses modifications dans l'application de la méthode générale.

Le Chapitre suivant est consacré à l'étude des propriétés des intégrales, considérées comme fonctions des variables x et y. On sait que toute solution de $\delta z = 0$ est une fonction holomorphe de la variable x sur tout segment de caractéristique situé dans le domaine où l'intégrale est régulière. Cette propriété s'étend à toute solution d'une équation parabolique $\delta z = f$, pourvu que le second membre f soit lui-même une fonction analytique de x, z, p, q. Ces intégrales seraient aussi des fonctions analytiques de y, pourvu qu'elles soient déterminées par des conditions aux limites où n'interviennent que des fonctions analytiques. Mais il n'en est plus de même pour des données quelconques. L'étude des solutions de l'équation $\delta z = 0$, considérées comme fonctions de y, a été faite par M. Holmgren. On est ainsi conduit à définir une nouvelle classe de fonctions de la variable réelle y, indéfiniment dérivables, et pour lesquelles les valeurs absolues des dérivées dans un intervalle ont des limites plus étendues que celles qui conviennent aux fonctions analytiques. M. Gevrey montre que ces fonctions, qu'il appelle les fonctions $\mathcal{H}$, se reproduisent par les opérations algébriques élémentaires, comme les fonctions analytiques elles-mêmes. L'étude approfondie du type le plus simple des équations paraboliques devait conduire nécessairement à cette nouvelle catégorie de fonctions, qui paraissent jouer, dans la théorie des équations de ce type, le même rôle que les fonctions analytiques dans la théorie des équations elliptiques. L'auteur montre en effet que, lorsque les coefficients de l'équation linéaire parabolique sont d'espèce $\mathcal{H}$ en y dans un domaine R, il en est de même de toute solution de l'équation dans le même domaine, ainsi que de sa dérivée par rapport à x. Ces fonctions interviennent aussi dans l'étude du problème de Cauchy et de différents problèmes de prolongement des intégrales. Parmi les nombreux résultats obtenus, nous signalerons seulement le suivant : Une intégrale de l'équation $\delta z = 0$, prenant des valeurs analytiques sur deux courbes analytiques sécantes en un point O, n'est pas en général analytique autour de ce point.

Dans les deux derniers Chapitres, M. Gevrey reprend les pro-

blèmes traités au début de son travail pour étendre la solution aux équations qu'il appelle singulières, où le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ peut s'annuler le long d'une ligne située dans le domaine R et même changer de signe en traversant cette ligne. Un changement de variable permet de ramener le cas général au cas particulier où la ligne singulière est l'un des axes de coordonnées. Parmi les nouveaux problèmes auxquels on est conduit, nous signalerons seulement le suivant : Lorsque le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ change de signe en traversant l'axe Oy, les courbes qui portent les données doivent avoir des dispositions différentes de part et d'autre de cette ligne. En cherchant les conditions que doivent remplir ces données pour obtenir des intégrales qui se raccordent le long de la ligne singulière, on est conduit à résoudre une équation intégrale de première espèce à noyau fermé, à laquelle on pourra essayer d'appliquer le théorème fondamental de M. Picard sur les équations intégrales de première espèce.

Dans le dernier Chapitre, on forme la solution fondamentale par une méthode d'approximations successives déjà employée par M. Hadamard dans un cas simple. M. Gevrey montre qu'elle est applicable à l'équation linéaire générale à plus de deux variables du type déjà étudié, et aux équations singulières. Parmi les applications que l'on peut faire, citons une nouvelle solution du problème de raccordement qui conduit aussi à une équation intégrale de première espèce.

On a pu juger, par ce résumé succinct, de la variété et de l'importance des problèmes abordés par M. Gevrey, quoique nous ayons dû laisser de côté beaucoup de résultats particuliers, remarquables soit par l'élégance de l'énoncé, soit par l'ingéniosité de la méthode.

Ce travail considérable apporte une contribution très importante à la théorie des équations du type parabolique.

La R.

ZIEMKE (Erich). — Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit Integralvereinen, die als Punktmannigfaltigkeiten zweifach ausgedehnt sind. *Inaugural-Dissertation der hohen philosophischen Fakultät der Königlichen Universität Greifswald zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde.* Un vol. in-8°. 74 pages. Leipzig, Breitkopf und Hartel, 1909.

Les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre de l'espace à n dimensions, tant qu'on les considère comme des lieux géométriques de ∞^1 éléments de contact, dépendent essentiellement de $2n - 3$ constantes arbitraires; mais il peut arriver que les courbes caractéristiques qui leur servent de support dépendent de moins de $2n - 3$ constantes. C'est ainsi que les équations linéaires n'ont que ∞^{n-1} courbes caractéristiques, et elles sont les seules dans ce cas. S. Lie a donné le nom de *quasi-linéaires* aux équations qui ont ∞^n, ∞^{n+1}, ... courbes caractéristiques; et a étudié, d'une manière assez approndie, les cas de ∞^n et ∞^{n+1} courbes caractéristiques.

Les équations linéaires peuvent aussi être caractérisées par le fait que leurs courbes caractéristiques en constituent, lorsqu'on les considère comme des multiplicités d'éléments de contact à une dimension, une intégrale complète. De là l'idée, due aussi à S. Lie, qui en a fait une application extrêmement importante à la théorie des systèmes en involution, d'étudier les équations aux dérivées partielles du premier ordre qui admettent des intégrales complètes formées de multiplicités, qui, au point de vue ponctuel, ont seulement 2, 3, ... dimensions. L'existence de telles intégrales complètes résulte, dans certains cas, de la réduction du nombre des constantes arbitraires dont dépendent les courbes caractéristiques : il y a toujours, par exemple, au moins une intégrale complète formée de variétés à deux dimensions, s'il y a seulement ∞^n courbes caractéristiques.

La thèse de M. Ziemke, faite sous l'inspiration de M. Fr. Engel en utilisant ses méthodes, a pour but d'élucider, en partie, les questions précédentes. L'auteur donne les formules explicites qui permettent, une équation aux dérivées partielles étant donnée : 1° de reconnaître si elle a ∞^{n+m-1} courbes caractéristiques; 2° dans le cas $m = 2$, de décider si elle a des intégrales complètes formées

de variétés à deux dimensions ; 3° de préciser à quoi se ramène la recherche de telles variétés intégrales dans les cas $m = 1$ et $m = 2$.

Ces questions sont traitées avec la restriction que les courbes caractéristiques passant en un point arbitraire de l'espace y ont des directions différentes. L'étude de la première conduit à ce théorème intéressant que, dans ce cas, la condition pour que les courbes caractéristiques dépendent de $n + m - 1$ constantes arbitraires est que, parmi les $n - 2$ conditions qui expriment que deux de ces courbes, infiniment voisines, se coupent, doivent figurer exactement $n - m - 1$ équations de Pfaff, qu'on peut alors écrire explicitement. Ces équations de Pfaff fournissent la clef de la recherche des variétés intégrales à deux dimensions : dans le cas $m = 1$, on est ramené à l'étude d'un système de $n - 2$ équations de Pfaff à n variables, dont la nature dépend de l'équation aux dérivées partielles donnée ; dans le cas $m = 2$, on est conduit, au contraire, à des systèmes complètement intégrables.

E. Vessiot.

ROSENTHAL (Artur). — Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven. *Habilitationsschrift zur Erlangung der Venia legendi der hohen philosophischen Fakultät, II. Sektion der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München, am 4. Juli* 1912. Une brochure in-8°. 45 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1912.

Soit t un paramètre, qui prendra toutes les valeurs comprises dans un intervalle donné ; à chacune de ces valeurs de t faisons correspondre un point P du plan, et un seul ; supposons cette correspondance continue, en ajoutant cette seule restriction que l'ensemble des valeurs de t auxquelles correspond un même point P ne contienne jamais un intervalle entier : le lieu de P sera un arc de courbe de l'espèce la plus générale. M. Rosenthal, en systématisant les résultats déjà obtenus dans cette voie et en en ajoutant un grand nombre de nouveaux, étudie les ensembles formés par les diverses singularités que peut présenter une telle courbe.

Un premier paragraphe contient la discussion des particularités que la courbe peut offrir en un de ses points, au point de vue des positions limites des sécantes issues de ce point : demi-tangentes (antérieures et postérieures), tangentes propres et impropres,

pointes, points anguleux, points en étoiles, inflexions de diverses natures. De là les notions de différentiabilité, continue ou non, complète ou non, et de tangibilité.

La superposition des singularités en un même point fait l'objet d'un second paragraphe : l'ensemble des valeurs de t auxquelles correspond un même point P peut être fini ou infini ; dans le second cas il est fermé et non dense. L'auteur étudie les ensembles formés par celles de ces valeurs qui sont inflexionnelles ; puis par celles qui fournissent des pointes, des points anguleux, des branches complètement différentiables : certains de ces ensembles sont ce qu'on appelle des ensembles limites-intérieures (*innere Grenzmengen*).

Au même point de vue, l'auteur discute ensuite les possibilités relatives à la nature des ensembles qui correspondent à toutes les singularités, d'une même espèce, ou d'espèces différentes, de la courbe : ici apparaissent, dans certains cas, des ensembles de deuxième catégorie. Les résultats sont liés à la nature de la classe et de l'ordre de la courbe, qui peuvent être finis, dénombrables, ou de la puissance du continu.

Un dernier paragraphe est consacré à caractériser les courbes auxquelles peut s'appliquer le principe de dualité.

E. Vessiot.

LORIA (Gino). — Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Prof. Fritz Schütte. Zweiter Teil : *Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven und Flächen*. Mit 146 Figuren im Text, 1 vol. in-8, 12-294 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

Comme l'indique son titre, cette Deuxième Partie de l'Ouvrage de M. Loria a pour but d'appliquer les principales méthodes de la Géométrie descriptive, qui avaient été exposées avec tous les détails nécessaires dans la Première Partie (voir *Bulletin*, 1907, p. 265), à l'étude et à la représentation graphique des plus importantes figures de la Géométrie, c'est-à-dire des angles polyèdres et des polyèdres, des courbes et des surfaces. Pour chaque figure, il considère les questions vraiment fondamentales, en en donnant autant que possible des solutions applicables, quelle que soit la méthode

de représentation qu'on emploie ; nous disons *autant que possible*, car quelquefois chaque méthode exige un procédé particulier. Comme preuve, nous citerons les problèmes de l'intersection d'un polyèdre avec un plan ou avec une droite ; en effet, les solutions classiques de la méthode de Monge peuvent être d'une certaine façon adaptées à la méthode de projection centrale, mais elles sont tout à fait impuissantes lorsqu'on se sert des plans cotés, et l'Auteur expose de nouvelles solutions qui mènent au but avec toute la rapidité et l'exactitude désirables.

Parmi les figures étudiées dans ce Volume, il y en a qui sont déjà bien connues par la Géométrie élémentaire ; mais la notion et l'étude des figures limitées par des lignes qui ne sont pas toutes droites et par des surfaces qui ne sont pas toutes planes appartiennent aux régions les plus élevées de notre Science. L'Auteur aurait pu supposer que le Lecteur eût puisé à d'autres sources les connaissances nécessaires pour le comprendre ; mais il a préféré lui en donner les moyens. Cette décision prise, la question s'est posée pour lui de choisir la méthode d'exposition à adopter. Or, M. Loria a l'opinion que la Géométrie pure n'est pas encore assez avancée pour pouvoir donner une théorie tout à fait générale et vraiment rigoureuse des courbes et des surfaces, même si l'on s'astreint aux surfaces algébriques (limitation qui serait, d'ailleurs, contraire à l'esprit même de la Géométrie descriptive) ; et, pour appuyer son opinion, il cite dans son *Avant-Propos* le fait singulier qu'il n'est pas possible d'établir (voire même d'énoncer) les conditions pour l'existence du plan tangent en un point d'une surface sans avoir recours à l'Analyse. Comme il n'est pas possible de se passer tout à fait de cet auxiliaire, il a préféré fonder franchement toutes ses considérations sur l'emploi de coordonnées ; ainsi, il effectue la fusion de la Géométrie descriptive avec la Géométrie analytique (ce mot étant pris dans son acception la plus large). De là naît une méthode d'exposition qui sera abandonnée lorsque la Géométrie pure sera assez avancée pour atteindre les sommets auxquels est arrivée l'Analyse, mais qui aujourd'hui (et probablement encore pendant longtemps) est peut-être, selon l'Auteur, la seule méthode permettant de parvenir à la fois à la simplicité et à la rigueur. M. Loria se propose de prouver, dans la Troisième Partie de son Ouvrage (qui contiendra l'Histoire

de la Géométrie descriptive), que bon nombre des progrès que fit la science dont il s'agit au cours du dernier siècle sont précisément dus à l'emploi alternatif de considérations analytiques et de constructions géométriques; il est bien probable qu'en écrivant ces lignes il songeait à plusieurs Mémoires de J. de la Gournerie, ne particulier au Mémoire *Sur les lignes d'ombre et de perspective dans les hélicoïdes gauches*.

A l'aide des coordonnées, M. Loria étudie avant tout les courbes planes avec plus d'ampleur qu'on ne le fait ordinairement. Il passe ensuite aux courbes à double courbure, considérées comme série de points continus (non comme intersection de surfaces). Il fait connaître leur représentation analytique la plus générale, leurs propriétés et tout ce qui se rapporte à la représentation graphique; il termine en appliquant ses considérations à deux courbes spéciales remarquables : l'une est transcendante, c'est l'hélice tracée sur un cylindre de révolution; l'autre est algébrique, c'est une courbe rationnelle du dixième ordre que l'Auteur a exhumé de la *Collection mathématique* de Pappus d'Alexandrie, où elle était ensevelie depuis plus de quinze siècles. Enfin M. Loria arrive aux surfaces, qu'il étudie d'abord en général; il s'occupe ensuite successivement des surfaces du second ordre, des cônes et des cylindres, des surfaces réglées, développables ou gauches, et des surfaces hélicoïdales, en résolvant, pour chaque classe de surfaces, les questions les plus importantes et en citant les exemples les plus intéressants au point de vue théorique ou pratique. Remarquables par leur nouveauté et leur simplicité sont les problèmes traités par l'Auteur sur les surfaces du second degré.

En résumé, M. Loria a réussi à condenser dans un petit nombre de pages tout ce qui forme aujourd'hui « la moelle épinière » de la Géométrie descriptive. Nous croyons que quiconque aura étudié les deux Volumes publiés par le savant professeur de l'Université de Gênes, sera en mesure, soit de résoudre de nouvelles questions de Géométrie descriptive, soit de comprendre les Ouvrages plus étendus et si renommés relatifs à cette Science.

Er. L.

WEBB (W. L.). — Brief Biography and popular Account of the unparalleled Discoveries of T. J. J. See, *famous Astronomer, natural Philosopher, and Founder of the new Sciences of Cosmogony and Geogony*. 1 vol. in-8, XII-298 pages, avec de nombreuses planches. Lynn, Thos. P. Nichols and son Co; London Wm. Wesley and Son; 1913.

Pour M. Webb, astronome amateur, M. See est le prophète d'une vérité nouvelle, le créateur à lui seul des deux nouvelles sciences de la Cosmogonie et de la Géogonie (Introduction) et il mérite par ses « incomparables découvertes » d'être appelé l'Herschell américain, le Newton de la Cosmogonie.

M. Webb nous présente les photographies de son héros à 17, à 20, à 22 et à 44 ans, et n'oublie pas celles de son père, de sa mère, de sa femme et de ses professeurs. Nous voudrions croire qu'une telle réclame est le fait de M. Webb seul, et que M. See, docteur en philosophie de l'Université de Berlin, a puisé, dans sa culture classique et son admiration pour l'antiquité grecque, ce sentiment de la mesure qui est l'antipode de l'amour du « colossal ».

Comme Herschell, M. See descend d'une famille allemande de la Prusse orientale ayant émigré en 1734 en Pensylvanie à la suite de persécutions religieuses. Son père, architecte et ingénieur, se fixa aux environs de Montgomery (Virginie). Jusqu'à 17 ans, M. See, obligé d'aider aux travaux de la ferme paternelle, ne suit l'école du village que pendant les quatre mois d'hiver (Chap. I). En moins de deux ans (1883-1884), il se classe le premier à l'École supérieure de Montgomery (Chap. II), puis entre à l'Université de Missouri, où il se spécialise dans l'étude des sciences physiques et mathématiques. C'est à 20 ans seulement qu'il commence le grec et le latin. Négligeant les sports pour la lecture du *Cosmos* de Humboldt et d'une traduction de la *Mécanique céleste* de Laplace, il prend ses grades, étant déjà attaché comme aide-astronome à l'Observatoire de l'Université (Chap. III). En 1889, il passe sa thèse sur *l'origine des étoiles doubles* où il étudie l'influence des marées sur ces astres, d'après les idées de G. Darwin. Des sympathies ataviques et son admiration pour Humboldt conduisent M. See (Chap. IV) à l'Université de Berlin où il passe 3 ans et demi étudiant la Philosophie grecque avec

Édouard Zeller, et les sciences avec Helmholtz et Weierstrass. Entre temps, il visite l'Égypte, la Grèce, l'Italie, l'Angleterre.

Attiré en 1893 à l'Université de Chicago, il doit s'occuper de la fondation de l'Observatoire d'Yerkes qui lui suscite de sérieuses difficultés (Chap. V) : les traitements promis aux professeurs passent en constructions et, en Amérique comme ailleurs, les sciences désintéressées, telle l'Astronomie, ne trouvent guère de donateurs. A 30 ans, n'ayant pas encore le rang de professeur assistant, gagnant moins de 800 dollars par an, il se voit refuser une subvention de l'Université pour la publication de son Volume I : *Researches on the evolution of the stellar system*, qui a commencé en 1896 sa réputation. Il accepte alors l'offre de M. P. Lowell d'aller continuer ses recherches à Flagstaff (Arizona) et à Mexico.

Dans ces Observatoires M. See scrute le ciel austral (1896-1898) pour y découvrir des étoiles doubles (Chap. VI), après quoi il est nommé professeur de Mathématiques à l'École navale des États-Unis et astronome à l'Observatoire de Washington. Dans son cours à l'Institut Lowell de Boston, il émet, avant Arrhénius, l'idée que le léger voile visible sur le fond des photographies de la Voie lactée, prises par M. Barnard, peut être dû à la poussière cosmique chassée des étoiles par la force répulsive.

(Chap. VII). M. See entreprend jusqu'en 1902 la mesure des diamètres des planètes et satellites par un travail de jour et de nuit permettant de déterminer la constante de l'irradiation : il découvre les zones équatoriales sombres de Neptune et participe aux observations d'Eros.

(Chap. VIII). Pour réparer sa santé épuisée par ces travaux intensifs et par une appendicite chronique, M. See passe à l'Observatoire naval de Mare-Island (Californie), où il trouve un climat meilleur et plus de temps pour publier des Mémoires dont l'analyse fait l'objet des Chapitres suivants. Le bruit fait dans le monde astronomique par ces travaux originaux suscite à M. See une jalousie professionnelle que M. Webb réprouve en disant : « L'inventeur doit avoir autant de courage que d'*humilité*. »

(Chap. IX). Dans ses *Researches on the Internal Constitution and Rigidity of the Heavenly Bodies* (1904-1906), M. See cherche la loi de densité interne la plus probable, qu'il trouve être

celle de Laplace : il calcule quelles pressions et propriétés doivent en résulter pour la matière interne des planètes et du Soleil. Ces calculs très aléatoires, dirigés comme ceux de Lord Kelvin et Sir G. Darwin pour la Terre, ne peuvent amener à des conclusions certaines, puisqu'on ne connaît pas, en général, la densité des couches superficielles ni les propriétés des corps sous des pressions de millions d'atmosphères et des températures de millions de degrés. Tout au plus peut-on prévoir que les courants de la surface solaire ne peuvent se propager très loin en profondeur et que, contrairement à l'opinion de Humboldt, l'hypocentre des tremblements de terre est voisin de la surface, ce que confirment les sismographes.

Le Chapitre X, reproduit d'une Adresse à l'Université de Missouri, résume les *Researches on the Cause of Earthquakes, Mountain formation, and Kindred phenomena connected with the Physics of the Earth.*

Le Chapitre XI traite du même sujet en citant divers exemples de tremblements de terre. M. See reprend la thèse d'Aristote qui les attribuait déjà à la vapeur confinée dans la croûte et avait aussi remarqué la fréquence des tremblements de terre et des volcans dans les régions maritimes. Mais alors, n'est-ce pas Aristote qui a fait « l'incomparable découverte »? D'après M. See, la vapeur formée sous le fond d'un océan en expulse la lave sous le continent, d'où exhaussement de celui-ci et affaissement du fond de la mer. Les montagnes et les grandes fosses océaniques sont donc en bordure des continents. La vapeur sous les montagnes forme la pierre ponce, d'où déficit d'attraction, comme le constatent les opérations géodésiques. Ainsi, la Terre, loin de se contracter comme le croient les géologues et entre autres Dana, s'enfle par le travail souterrain des océans. La théorie de M. See, vraie dans son ensemble en tant que systématisation des faits, n'apporte aucune explication physique ou cosmogonique. Pourquoi commence-t-il à y avoir une différence de niveau entre un continent et le fond d'un océan? Comment la vapeur, au lieu de soulever directement le fond des océans, à une profondeur d'environ 10^{km} où l'eau liquide ne peut plus exister, descend-elle à un niveau trois fois plus bas pour y trouver la lave et pourquoi la pousse-t-elle horizontalement dans une direction de prédilection, celle

des continents? Aucune réponse n'est donnée à ces questions.

Le Chapitre XII contient des *Considérations sur l'origine de l'Himalaya et du plateau du Tibet*, exposées à la Réunion annuelle (1913) de la Société philosophique américaine. M. See y montre, que, contrairement aux idées de M. Suess et conformément à la théorie et aux faits constatés par le colonel Burrard, l'Himalaya résulte d'une poussée venant du Sud. Un calcul intéressant montre que, sur tout le pourtour du Pacifique, le volume des plateaux (Montagnes-Rocheuses, plateaux des Andes, Tibet) est le même, d'où cette loi : « Plus un plateau est large, moins il est élevé. » L'Auteur combat la théorie de Hayford sur la compensation isostatique par érosion des montagnes. « L'isostase ainsi comprise, dit-il, est un processus négatif qui, par un mouvement de bascule, *maintient*, mais ne crée pas, les inégalités de niveau existantes. » La même objection peut, dans une certaine mesure, être opposée à la théorie de M. See.

Avec le Chapitre XIII, reproduction d'une Communication à l'Académie des Sciences de Californie (décembre 1911) sur *l'Évolution de l'Univers stellaire*, nous entrons dans la « nouvelle Science de la Cosmogonie », célébrée de suite avec emphase : « Notre nouvelle Science illumine le firmament comme une étoile nouvelle et nous sommes éblouis par la splendeur de la lumière qui, subitement, a pénétré dans les invisibles laboratoires de la Création. »

(P. 163). M. See se glorifie de l'adhésion, à sa théorie de la capture, de W. Huggins, Schiaparelli et même de H. Poincaré : il est difficile cependant de trouver une adhésion dans la lettre de Poincaré, datée du 6 juillet 1911, qui se termine ainsi : « Mes leçons seront publiées et je vous les enverrai. Vous y verrez les remarques et les difficultés que vos théories m'ont suggérées. » Il est plus étrange encore que M. Webb, après la publication des *Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques*, se soit permis de dire (p. 243) : « Poincaré abandonna rapidement la théorie de Laplace et adopta la nouvelle théorie de l'astronome américain. »

M. See cherche d'abord les conditions requises pour les découvertes dans les sciences exactes. Chaque progrès de l'Astronomie est lié, d'après lui, à une connaissance plus parfaite des causes physiques des phénomènes. C'est là, semble-t-il, une contradic-

tion. En tant que science exacte, la Cosmogonie devrait procéder par déduction, alors que, science de la Nature, elle doit employer l'induction. M. See n'aborde pas cette question de méthode qui pourtant est capitale. Il parle bien de la *formation* des corps célestes, mais se borne en réalité à chercher comment des corps *tout formés* dans les profondeurs sidérales arrivent à se grouper en systèmes : c'est seulement une partie, la moins difficile, du problème cosmogonique. D'après lui, la cause du groupement en systèmes est dans *la capture* aidée par la résistance du milieu nébuleux qui diminue les distances et arrondit les orbites, ainsi que Poisson l'avait déjà montré.

La considération de l'intégrale de Jacobi dans le problème restreint des trois corps permet de partager le plan où ils circulent en régions séparées par des courbes en 8, ce qui expliquerait comment un astre capté peut sortir du contrôle du Soleil pour tourner autour d'une planète et passer du sens direct au sens rétrograde. Mais, puisque la théorie de la capture ne permet pas de prévoir un sens de révolution prédominant, comment le sens direct a-t-il prévalu? Parce que les astres captés ont rencontré près du centre des tourbillons de masse météoritique tournant dans le sens direct : il semble que c'est déplacer et non résoudre la question d'autant plus que les comètes tournent indifféremment dans les deux sens.

M. See utilise aussi ces tourbillons pour expliquer les obliquités des axes planétaires par la quantité plus ou moins grande de matière météoritique condensée sur chaque planète. Jupiter, ayant une faible obliquité, aurait condensé le plus de cette matière : mais il s'ensuivrait, puisque cette matière doit obéir à la troisième loi de Képler, que la rotation de la planète serait rétrograde. Par ailleurs, M. See est mal informé s'il croit que « la grande difficulté présentée aux astronomes par ces obliquités n'a pas été résolue avant lui » (en 1908) [1]. Il donne ensuite plusieurs arguments probants contre la théorie de G. Darwin sur l'origine terrestre de la Lune. Notre satellite ne serait qu'un astre capté par la Terre : les cirques lunaires, au lieu d'être formés par

[1] J'ai trouvé la loi des inclinaisons des axes comme conséquence de la loi des distances planétaires démontrée par la cosmogonie tourbillonnaire (*C. R. Acad. Sc.*, 4 décembre 1905).

la même cause (action de l'eau) que les montagnes terrestres, seraient le résultat de chocs d'énormes bolides ([1]).

Avec raison, M. See considère les comètes comme le résidu de la nébuleuse primitive; mais comment n'ont-elles pas obéi à la condensation générale et surtout à l'action du milieu résistant qui arrondit les orbites?

L'Auteur insiste sur l'importance des forces répulsives négligées depuis Newton et produisant cependant l'expulsion des poussières cosmiques qui, chassées des étoiles, vont former les nébuleuses. Mais, bien loin d'attribuer aux forces répulsives une part d'action dans la formation des systèmes, il imagine, pour les nébuleuses spirales, un processus de formation centripète, contrairement à l'opinion de la plupart des astronomes.

M. See se borne à faire agir l'attraction sur les particules de la nébuleuse disséminées par la force répulsive pour les réunir en un tourbillon central (whirling vortex) qui devient un soleil (?), pendant que les planètes nées très loin du centre (comment ?) s'en approchent sur des orbites d'abord très excentrées qui, par la résistance de milieu, se resserrent et s'arrondissent, à moins qu'elles ne soient absorbées par le noyau solaire. Le premier stade de cette formation est la nébuleuse planétaire, collection d'orbites cométaires. Mais, puisque M. See est obligé d'admettre un tourbillon central, dont les orbites sont évidemment presque circulaires, pourquoi chercher ailleurs la cause de la circularité des orbites planétaires?

Les étoiles nouvelles seraient dues au choc de planètes ou de grandes comètes sur l'astre central; Buffon avait déjà fait cette hypothèse difficilement admissible.

En un mot, M. See considère les forces répulsives comme agent de destruction des astres au lieu d'en faire le principe constructif des mondes ([2]).

([1]) En attribuant les cirques lunaires à l'action de l'eau, je suis arrivé à une reproduction expérimentale au moyen de reliefs en paraffine. (*C. R. Acad. Sc.*, 4 mars 1912.)

([2]) Dans une Note (*C. R. Acad. Sc.*, 18 mars 1912), j'ai montré qu'à l'origine la force répulsive est prépondérante sur l'attraction, et peut, comme je l'ai indiqué dans mon *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, rendre compte, par la formation d'anneaux et tourbillons divergeant du centre, des phénomènes constatés dans les Novæ et le système solaire.

Dans le Chapitre XIV, il expose ses recherches de 1912 sur la *Détermination de la profondeur de la Voie lactée*. Par la méthode spectroscopique appliquée aux étoiles doubles télescopiques, on ne peut guère mesurer de distances d'étoiles supérieures à 1000 années de lumière. Mais W. Herschel estimait à 1 million de ces unités la distance extrême de la Voie lactée, tandis que les mesures faites par M. Campbell, pour 225 étoiles à hélium de grandeur moyenne 4,14, donnent 540 années de lumière. Peut-on, ignorant le coefficient d'extinction de l'espace supposé nul par Herschel et la grandeur absolue des étoiles de la Voie lactée, savoir quelle est celle de ces deux distances qui se rapproche le plus de la vérité? M. See le pense et adopte le chiffre d'Herschel sans que ses arguments entraînent la conviction. Pour lui, la Voie lactée est une nébuleuse spirale ayant un diamètre de 5 millions d'années de lumière où le Soleil occupe une position excentrée.

Le Chapitre XV présente un résumé des *Recherches de W. Herschel et de M. See sur l'origine des amas d'étoiles et de la rupture de la Voie lactée par le pouvoir d'agglomération de la gravitation universelle*. En appliquant le théorème de Green et cherchant l'expression de l'énergie potentielle mutuelle dans un amas globulaire, M. See établit le processus deviné par Herschel, par lequel un amas capture les étoiles entrant dans sa sphère d'action en même temps qu'il se condense vers le centre. L'attraction centrale dans un amas serait proportionnelle à la distance et la durée de révolution commune pour toutes les étoiles. Cette recherche, très ardue au point de vue mathématique, suppose une symétrie complète autour du centre : comment concilier cette idée avec l'idée précédemment émise que la Voie lactée est une nébuleuse spirale composée de rubans d'étoiles? Or, dans certaines conditions de masse faciles à établir, un ruban d'étoiles est instable; il se rompt dans sa longueur, et cette scissiparité est un processus bien différent de la concentration sphéroïdale imaginée par M. See pour expliquer les amas.

Le Chapitre XVI n'est que le résumé de la présente Cosmogonie sous forme de 75 conclusions dogmatiques, d'où il ressort que M. See a voulu tirer des faits sidéraux l'explication du système solaire, au lieu de se servir des précisions que celui-ci nous donne pour remonter aux systèmes stellaires. Mais, parce que la

capture, même modifiée par la résistance du milieu, est un fait de hasard, il s'ensuit que les distances, inclinaisons d'axes, excentricités, masses dans le système solaire seraient dues au hasard, ce qui paraît inquiétant. De ce principe de la capture posé *a priori* comme universel, tout est tiré par déduction : or, une science de la Nature comme la Cosmogonie doit partir des faits et non de postulats. Il suffit dès lors, pour faire crouler par la base un édifice aussi fragile, de prouver qu'il existe une loi exponentielle des distances des planètes et satellites incompatible avec le hasard de la capture [1].

Dans les Chapitres XVII et XVIII, M. Webb, reprenant la plume, veut démontrer le caractère révolutionnaire de la nouvelle Cosmogonie et son triomple définitif, malgré l'opposition rencontrée en Angleterre et en France. Mais M. See n'est révolutionnaire que pour avoir rejeté les idées de l'école de Laplace et de Sir G. Darwin : il ne l'est pas assez pour avoir édifié la Cosmogonie sur des bases nouvelles. Comme ses devanciers, il a appliqué à la Cosmogonie la méthode déductive qui ne peut être la sienne, et n'a mis en œuvre pour la formation des noyaux des astres que l'attraction, sans prendre garde que la force répulsive suffirait à empêcher l'agrégation des molécules cosmiques et sans imaginer sous quelle forme elle peut devenir, avec l'électricité, l'agent constructif des mondes.

Mais ce que M. Webb n'a pas suffisamment mis en lumière, c'est que l'éminent astronome américain, dans son Volume II de *Researches*, a produit une œuvre considérable, d'un style clair et entraînant, d'une puissante documentation dans le domaine des recherches cosmogoniques, et que, par la contradiction même qu'il suscite, il est évocateur d'idées nouvelles. A ce titre, cette œuvre sera, comme le Livre de M. Webb, lue avec profit par tous les astronomes.

Émile Belot.

---

[1] *Voir* une Note que j'ai publiée dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 4672.

COMBEROUSSE (CHARLES DE). — COURS DE MATHÉMATIQUES, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, à l'École Centrale des Arts et Manufactures. 5e édition, revue et augmentée. Tome II, Seconde Partie : *Trigonométrie rectiligne et sphérique*. 1 vol. in-8°, IV, 550-881 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

La seconde Partie du Tome II du *Cours de Mathématiques* de Charles de Comberousse contient, pour la *Trigonométrie*, le développement des matières du Programme d'admission aux grandes Écoles du Gouvernement.

Les diverses questions fondamentales de la *Trigonométrie rectiligne* et de la *Trigonométrie sphérique* sont exposées avec une élégance de langage qui rend très claires les démonstrations toujours rigoureuses et les discussions toujours complètes.

Il n'y a pas lieu de parler, dans cette Analyse, des questions et des problèmes qui sont traités dans tous les Ouvrages analogues. Mais il ne faut pas négliger de citer quelques-uns des énoncés de questions et de problèmes qui sont traités dans ce Volume et qu'on ne trouve pas dans toutes les Trigonométries élémentaires.

Pages 616-624 : Résolution trigonométrique de l'équation du second degré. — Sommation des sinus ou des cosinus d'une série d'arcs en progression arithmétique. — Formules relatives aux rapports trigonométriques de trois arcs dont la somme est égale à 180°.

Pages 701-706 : Expressions trigonométriques des aires des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés, inscrits et circonscrits à un cercle de rayon R. Rapport de ces aires. — Expression trigonométrique de l'aire d'un segment circulaire. — On suppose donnés les quatre côtés a, b, c, d d'un quadrilatère inscriptible ABCD, et l'on demande de calculer ses angles, ses diagonales, son aire et le rayon du cercle circonscrit.

Pages 819-833 : Questions proposées sur la Trigonométrie.

Pages 841-854 : Quatre Notes ayant pour titres :

I. Problème de la sphère tangente à quatre plans (*Géométrie*).

II. Des Tables trigonométriques centésimales.

III. Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré.

IV. Emploi de la règle à calcul en Géométrie et en Trigonométrie.

Pages 858-881 : Table des lignes trigonométriques naturelles des angles ou des arcs variant de minute en minute, depuis 0° jusqu'à 90°.

ÉR. L.

MÉLANGES.

SUR UNE CORRESPONDANCE ENTRE LES MOUVEMENTS DE DEUX SYSTÈMES MÉCANIQUES HOLONOMES CONSERVATIFS;

PAR M. HENRI VERGNE.

1. Considérons un système de $2n$ équations *canoniques*

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

définissant les $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ en fonction du temps t. La fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sera supposée ici ne pas dépendre explicitement de t. Pour abréger, nous écrirons parfois simplement $F(x_i; y_i)$.

Soit $S(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une fonction *arbitraire* dépendant de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de n autres lettres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si l'on pose

$$(1) \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura $2n$ équations (1) permettant d'exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$, en fonction de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (ou inversement), ce qui définit un changement de variables que je désignerai par la notation $(x, y) \to (\beta, \alpha)$.

Puisque l'expression

$$\sum_i y_i\, dx_i - \sum_i \alpha_i\, d\beta_i = d\left(S - \sum_i \alpha_i \beta_i\right)$$

est une *différentielle exacte*, ce changement de variables est *canonique* [1], c'est-à-dire qu'il n'altère pas la forme canonique des équations (I) qui se transforment en

$$(2) \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}, \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \beta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1] H. POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. I; *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 3.

2. Nous pouvons toujours faire en sorte que l'une des nouvelles variables, α_1 par exemple, soit la fonction F elle-même : $F = \alpha_1$. Il suffira pour cela de choisir pour la fonction $S(x_i; \alpha_i)$ (qui est arbitraire) une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \alpha_1, \tag{3}$$

contenant, outre la constante α_1, $n-1$ autres constantes $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, dont aucune n'est additive.

Alors, puisque le changement de variables $(x, y) \to (\beta, \alpha)$ défini par les formules (1) transforme $F(x_i; y_i)$ en α_1, les nouvelles équations canoniques (2) prendront la forme

$$(T) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\beta_1}{dt} = 1, \\ &\frac{d\beta_k}{dt} = 0 \qquad (k \neq 1), \\ &\frac{d\alpha_k}{dt} = 0; \end{aligned} \right.$$

si bien que les $2n$ intégrales des équations (I) seront

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = C_1, & \alpha_2 = C_2, & \ldots & \alpha_n = C_n, \\ \beta_1 - t = C_{n+1}, & \beta_2 = C_{n+2}, & \ldots, & \beta_n = C_{2n}, \end{array}$$

les C étant des constantes d'intégration [1].

3. M. Appell, dans son Cours de cette année à la Sorbonne, a fait observer que ceci constitue une forme de démonstration du théorème classique suivant de Jacobi : *Si l'on possède une intégrale complète* $S(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *de l'équation aux dérivées partielles* (3), *on sait écrire immédiatement les intégrales générales des équations canoniques* (I). Dans un ordre d'idées analogue, M. Appell a bien voulu aussi attirer mon attention sur un point relatif à la correspondance entre deux systèmes mécaniques holonomes conservatifs ayant le même

---

[1] H. Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 7. *Voir* aussi H. Vergne, *Sur certaines propriétés des systèmes d'équations différentielles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXVII, décembre 1910, p. 548).

nombre de degrés de liberté. Sur son conseil, je me propose de développer ici ce point, qui a déjà été indiqué sommairement dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹).

4. Supposons, pour fixer les idées, que les équations (I) définissent le mouvement d'un système mécanique holonome à n degrés de liberté [que j'appellerai le système (I)], pour lequel il existe une fonction de forces indépendante du temps (²). Nous venons de voir que, prenant pour $S(x_i; \alpha_i)$ une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi (3), le changement de variables $(x, y) \to (\beta, \alpha)$ transforme les équations canoniques (I) dans la forme *type* (T).

Prenons un second système mécanique holonome [que nous appellerons système (II)] ayant le même nombre n de degrés de liberté, et dont le mouvement soit défini par de nouvelles équations canoniques que j'écrirai, en appelant ξ_i, η_i les variables canoniques de ce système,

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la fonction $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ ne contenant pas t si, comme je le supposerai, il existe pour ce nouveau système une fonction de forces indépendante du temps.

Si nous prenons une intégrale complète

$$\mathcal{S}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi

$$\Phi\left(\xi_i; \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi_i}\right) = \alpha_1,$$

le changement de variables $(\xi, \eta) \to (\beta, \alpha)$ défini par les formules

$$(4) \qquad \eta_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(¹) P. Appell et H. Vergne, *C. R. Acad. Sc.*, Note du 16 juin 1913.

(²) Bien entendu, tout ce que nous allons dire s'appliquera même à des équations canoniques tout à fait générales, ne tirant pas leur origine d'un problème de Mécanique.

transformera les équations canoniques (II) dans la *même forme type* (T).

Ainsi les équations de mouvement du système (I) et du système (II) ont pu être ramenées à la même forme (T). En d'autres termes, le système (T) des variables (β, α) peut être considéré comme ayant servi d'intermédiaire pour passer du système (I) des variable (x, y) au système (II) des variables (ξ, η). Autrement dit encore, *le changement de variables* $(x, y) \to (\xi, \eta)$ [défini par l'ensemble des formules (1) et (4) entre lesquelles on éliminerait les α et les β] *est un changement canonique transformant le système canonique quelconque* (I) *dans le système canonique quelconque* (II) *ayant le même nombre de variables.*

5. On peut présenter la chose d'une façon encore plus simple, en ne parlant pas du tout du système intermédiaire (T). Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(5) \qquad F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \Phi\left(\xi_i; -\frac{\partial S}{\partial \xi_i}\right),$$

et supposons qu'on ait su en trouver *une intégrale particulière quelconque* $S(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Les $2n$ formules

$$(6) \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \eta_i = -\frac{\partial S}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un changement de variables $(x, y) \to (\xi, \eta)$ qui est *canonique*, puisque l'expression

$$\sum_i y_i\, dx_i - \sum_i \eta_i\, d\xi_i = dS$$

est une différentielle exacte. Ce changement de variables transforme la fonction $F(x_i; y_i)$ en la fonction $\Phi(\xi_i; \eta_i)$, et par suite *transforme le système* (I) *dans le système* (II).

Bien entendu, il faudra, pour que le procédé réussisse, que les formules (6) puissent être résolues soit par rapport aux (x_i, y_i), soit par rapport aux (ξ_i, η_i), ce qui exige chaque fois qu'un certain déterminant fonctionnel ne soit pas nul.

6. Remarquons que nous pouvons donner au changement cano-

nique de variables transformant le système (I) dans le système (II) toute une série d'autres formes.

Au lieu de considérer une intégrale particulière $S(x_i; \xi_i)$ de l'équation (5), nous aurions pu tout aussi bien considérer une intégrale particulière $S(x_i; \xi_i)$ de l'équation

$$(5') \qquad F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = -\Phi\left(\xi_i; \frac{\partial S}{\partial \xi_i}\right),$$

et définir le changement de variables $(x, y) \to (\eta, \xi)$ au moyen des formules

$$(6') \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \eta_i = \frac{\partial S}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

en effet, l'expression

$$\sum_i y_i\, dx_i - \sum_i \xi_i\, d\eta_i$$

est une différentielle exacte, et la fonction $F(x_i; y_i)$ devient $-\Phi(\xi_i; \eta_i)$.

Nous serions encore arrivés au même résultat en prenant une intégrale particulière $S(x_i; \eta_i)$ de l'équation

$$(5'') \qquad F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_i}, \eta_i\right)$$

et définissant le changement $(x, y) \to (\xi, \eta)$ par les formules

$$(6'') \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ou bien encore en prenant une intégrale particulière $S(x_i; \eta_i)$ de l'équation

$$(5''') \qquad F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = -\Phi\left(-\frac{\partial S}{\partial \eta_i}; \eta_i\right)$$

et définissant le changement $(x, y) \to (\eta, \xi)$ par les formules

$$(6''') \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = -\frac{\partial S}{\partial \eta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On donnerait encore d'autres formes à l'équation aux dérivées partielles pouvant tenir lieu de (5), en mettant à son premier

membre $F\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}; y_i\right)$ au lieu de $F\left(x_i; \frac{\partial S}{\partial x_i}\right)$. Car rien ne distingue, dans les équations canoniques, le rôle des x de celui des y.

7. Pour prendre un exemple très simple, nous pouvons supposer que le système (I) définit le mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe, et n'étant soumis à l'action d'aucune force : le système (II) sera de même supposé définir le mouvement d'un point matériel qui n'est soumis à l'action d'aucune force et assujetti à rester sur une autre surface fixe. Le procédé qui précède permettra, et d'une infinité de façons, de faire correspondre les lignes géodésiques de la première surface aux lignes géodésiques de la seconde.

Mais il faut bien observer que ce n'est pas là du tout une correspondance *ponctuelle* entre les deux surfaces : pour que les deux surfaces se correspondent point par point, il faudrait que les coordonnées de l'une s'expriment en fonction des coordonnées de l'autre; or, les formules de transformation (6) contiennent non seulement les *coordonnées* x_i, ξ_i des deux surfaces, mais aussi les variables auxiliaires y_i, η_i servant à définir les *vitesses* [1].

8. Considérons maintenant deux systèmes quelconques d'équations différentielles *non canoniques* à n variables chacun :

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

$$(\mathrm{II}') \qquad \frac{d\xi_1}{\Xi_1} = \frac{d\xi_2}{\Xi_2} = \ldots = \frac{d\xi_n}{\Xi_n} = dt,$$

les X_i étant des fonctions des x_i, et les Ξ_i des fonctions des ξ_i, ne dépendant pas de t. Une remarque très simple et bien connue, due à Liouville, permet de transformer chacun de ces systèmes en un système canonique, en lui adjoignant n variables nouvelles : il suffit, en effet, de poser

$$F(x_i; y_i) = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots + X_n y_n,$$
$$\Phi(\xi_i; \eta_i) = \Xi_1 \eta_1 + \Xi_2 \eta_2 + \ldots + \Xi_n \eta_n.$$

---

[1] Le problème de la possibilité d'une représentation ponctuelle de deux surfaces l'une sur l'autre, avec correspondance des lignes géodésiques, a été étudié par les géomètres italiens E. Beltrami et U. Dini (G. Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. III, Livre VI, Chap. III.)

pour que le système (I′) devienne le système (I) et que le système (II′) devienne le système (II). Les n variables auxiliaires y_i sont définies par les secondes équations (I); les n variables auxiliaires η_i sont définies par les secondes équations (II).

L'équation aux dérivées partielles (5) s'écrit alors

$$X_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial S}{\partial x_n} = -\Xi_1 \frac{\partial S}{\partial \xi_1} - \Xi_2 \frac{\partial S}{\partial \xi_2} - \ldots - \Xi_n \frac{\partial S}{\partial \xi_n};$$

elle est *linéaire* par rapport aux dérivées de S. Si l'on en possède une intégrale particulière quelconque, les $2n$ formules (6) définiront un changement de variables $(x, y) \to (\xi, \eta)$ qui transformera le système (I) dans le système (II), c'est-à-dire le système (I′) dans le système (II′).

Mais, ici encore, il faut bien remarquer qu'il ne s'agit pas du tout d'une correspondance *ponctuelle* entre l'espace à n dimensions des $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et l'espace à n dimensions des $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, puisque les formules (6) dépendent des variables auxiliaires y_i, η_i, que nous avons introduites.

Toutefois, il est remarquable que *de telles correspondances ponctuelles* $(x) \to (\xi)$, *transformant le système* (I′) *dans le système* (II′), *existent toujours*. M. Kœnigs, en effet, a montré [1] qu'on pouvait ramener un système d'équations différentielles donné à la forme canonique, *sans introduire de variables supplémentaires* comme le fait Liouville. Ayant alors ramené les deux systèmes (I′) et (II′) à la forme canonique, on les transformera l'un dans l'autre par la méthode donnée au n° 5.

Ainsi, *il est toujours possible, par un changement de variables convenable* $(x) \to (\xi)$, *de transformer un système quelconque d'équations différentielles* (I′) *dans un système quelconque* (II′) *ayant le même nombre de variables.*

9. Cette possibilité est d'ailleurs tout à fait évidente, si l'on se place à un autre point de vue. Soient, en effet,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n intégrales distinctes des équations (I′); et soient

$$\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1] G. Kœnigs, *C. R. Acad. Sc.*, décembre 1895.

n intégrales distinctes des équations (II'). Les $n+1$ formules

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$t = t,$$

définissent un changement de variables $(x) \to (\xi)$ qui transforme le système (I') dans le système (II').

Si l'on n'avait pas voulu introduire la variable auxiliaire t, on aurait simplement supprimé la $n^{\text{ième}}$ équation (I') et la $n^{\text{ième}}$ équation (II'), et l'on aurait raisonné d'une façon identique : soient

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$n-1$ intégrales des équations (I'); et soient

$$\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$n-1$ intégrales des équations (II'). *Les n formules*

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$x_n = \xi_n$$

définissent un changement de variables $(x) \to (\xi)$ transformant le système (I') *dans le système* (II'). D'ailleurs, la $n^{\text{ième}}$ formule, $x_n = \xi_n$, pourrait être remplacée par une relation absolument arbitraire

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0;$$

autrement dit, cette formule est surabondante, elle sert seulement à relier entre elles la variable indépendante du système (I') et la variable indépendante du système (II').

La remarque qui précède rend évidente la possibilité, rappelée tout à l'heure, d'après M. Kœnigs, de la réduction d'un système quelconque d'équations différentielles à la forme canonique : il suffit d'imaginer que le système (II'), dans lequel on transforme le système (I'), est canonique.

La même remarque rend également évident le fait, établi au n° 4, de l'existence de changements de variables canoniques $(x, y) \to (\xi, \eta)$, transformant le système canonique (I) dans le système canonique (II).

10. Revenons maintenant à nos systèmes mécaniques primitifs

(I) et (II) et au théorème du n° 5 : *La connaissance d'une intégrale particulière quelconque* $S(x_i; \xi_i)$ *de l'équation aux dérivées partielles* (5) *permet de ramener le système canonique* (I) *au système canonique* (II) *au moyen des formules de transformation* (6). Ce théorème peut être considéré comme une généralisation du théorème classique de Jacobi rappelé au n° 3.

Supposons, en effet, que la fonction $\Phi(\xi_i; \eta_i)$ soit de telle nature qu'*on ait su intégrer les équations* (II) : alors les ξ_i, η_i seront des fonctions connues du temps t et de $2n$ constantes d'intégration. *Si l'on possède en outre une intégrale particulière* $S(x_i; \xi_i)$, *de l'équation* (5), *on saura écrire immédiatement les intégrales générales des équations* (I) : elles seront données par les formules (6).

Le cas où la fonction $\Phi(\xi_i; \eta_i)$ se réduirait simplement à ξ_1 redonne le théorème ordinaire de Jacobi sous la forme même rappelée au n° 3.

On saura encore intégrer immédiatement les équations (II) si la fonction Φ est de la forme $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k; \eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \ldots, \eta_n)$ ne dépendant pas de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n$. Alors, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \ldots, \eta_n$ seront des constantes; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n$ seront des fonctions linéaires du temps.

Donnons un exemple extrêmement simple où ce dernier cas particulier permet l'intégration du mouvement d'un système mécanique. Supposons que les équations (I) définissent le mouvement plan d'un point pesant de masse 1, dans le vide : si x_1, x_2 sont les coordonnées rectangulaires du point (l'axe des x_2 étant vertical vers le haut), et si y_1, y_2 sont les composantes de sa vitesse, la fonction $F(x_1, x_2; y_1, y_2)$ (qui représente l'énergie totale) aura pour valeur

$$F(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 + g x_2.$$

Prenons alors, pour la fonction auxiliaire $\Phi(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ la suivante :

$$\Phi(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}(\xi_2 + \eta_1^2),$$

qui ne dépend que de ξ_2 et η_1. Alors ξ_2, η_1 seront des constantes, et ξ_1, η_2 des fonctions linéaires du temps.

L'équation aux dérivées partielles (5), dont il s'agit de trouver

une intégrale particulière, est

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + 2gx_2 = \xi_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_1}\right)^2;$$

on peut y satisfaire en posant séparément

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{\partial S}{\partial \xi_1},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + 2gx_2 = \xi_2,$$

d'où l'intégrale particulière

$$S(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = f(x_1 + \xi_1) + \int \sqrt{\xi_2 - 2gx_2}\, dx_2,$$

où f est une fonction quelconque. Les formules (6) donnent alors les intégrales du problème. Nous aurons en particulier, pour définir les trajectoires,

$$\eta_1 = -f'(x_1 + \xi_1), \qquad \eta_2 = -\int \frac{dx_2}{2\sqrt{\xi_2 - 2gx_2}}.$$

La première de ces formules nous apprend que $x_1 + \xi_1$ est une constante, c'est-à-dire que x_1 est une fonction linéaire du temps; et la seconde nous montre que $\sqrt{\xi_2 - 2gx_2}$ est une fonction linéaire du temps, donc que x_2 est une fonction quadratique du temps.

Nous retrouvons ainsi les résultats classiques relatifs au mouvement parabolique d'un point pesant.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXVII.

50980 Paris. Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

E. PICARD.

P. APPELL.

E. BOREL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 1 *bis*, Paris, 5e.

50980 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands Augustins.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, É. LACOUR, ER. LEBON, S. RINDI, P. H. SCHOUTE, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOËL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXVII. — ANNÉE 1913.

(XLVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XXV [*Suite* (1)].

Mellin (*H.-J.*). — Une formule relative au logarithme des fonctions transcendantes de genre fini (165-183).

1. L'auteur met ce logarithme sous la forme d'une intégrale, qui rentre dans le type étudié au paragraphe 7 du Mémoire précédent, formule (8). De la formule

$$\log(1+x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z}\,\frac{x^z}{z}\,dz \qquad \text{pour} \qquad 0 < a < 1,$$

il déduit que, pour une fonction entière de genre p,

$$\Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\alpha_\nu}\right) e^{-\frac{x}{\alpha_\nu}+\ldots+(-1)^p\frac{x^p}{\alpha_\nu^p}}$$

on a

$$\log \Pi(x) = (-1)^p S(p+1)\frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a+i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z}\, S(z)\,\frac{x^z}{z}\,dz.$$

$$(1) \qquad S(z) = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_\nu^z} \qquad (p+1 < a < p+2).$$

Si les arguments des α sont compris entre $-\mathfrak{I}$ et $+\mathfrak{I}$, la formule est valable dans le domaine

$$-(\pi-\mathfrak{I}) < \mathfrak{h} < \pi-\mathfrak{I}.$$

(1) Voir *Bull. des Sciences math.*, 1912, t. XXXVI$_2$, p. 185.

Si l'exposant de convergence de $S(z)$ est $\rho < p+1$, on a

$$\log \Pi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z}\, dz,$$

en choisissant $\rho < a < p+1$. Si $-\alpha_\nu$ est un zéro d'ordre m_ν dans les formules précédentes, $S(z)$ sera la série $\sum_1^\infty \frac{m_\nu}{\alpha_\nu^z}$; l'expression du logarithme convient également si les m ne sont pas entiers; on obtient alors des fonctions que l'auteur appelle *transcendantes de genre fini*, qui rentrent dans la formule

$$\Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{\alpha_\nu}\right)^{-\frac{x}{\alpha_\nu}+\ldots+(-1)^p\frac{x^p}{\alpha_\nu^p}}\right]^{m_\nu}$$

et dont les fonctions entières sont un cas particulier.

2. *Étude du cas où les zéros sont en progression arithmétique :* $\alpha_\nu = -\nu$ avec $p = n$ et $m_\nu = \nu^n$. On trouve, pour cette fonction $P_n(z)$,

$$(-1)^n \log P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z}\zeta(z)\frac{x^{z+n}}{z+n}\, dz = I_n(x, a),$$

où $1 < a < 2$. Pour $n = 0$, on déduit de là la formule de Stirling, qui est ainsi valable dans tout le plan, à l'exception du demi-axe réel négatif. Si $n > 0$, l'auteur étudie l'allure, pour x infini, de l'intégrale $I_n(x, a)$.

3. *Étude des cas où les zéros sont en progression géométrique*, le genre étant nul : ceci conduit l'auteur à une égalité qui est une formule de transformation linéaire d'une fonction Θ.

4. Étude des produits envisagés par M. Appell (*Math. An.*, t. XIX) :

$$\Pi(x; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \prod_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} (1 - x q_1^{2\nu_1+1} \ldots q_n^{2\nu_n+1})$$

$$q_\lambda = e^{\pi i \tau_\lambda}, \qquad |q_\lambda| < 1,$$

généralisation du cas précédent.

5. Les *séries de Dirichlet*, telles que (1), s'introduisent tout naturellement dans l'étude du *développement asymptotique* du logarithme. L'existence, en dehors du cercle de convergence, de la fonction qu'elles définissent peut être étudiée dans bien des cas grâce à la proposition suivante : soient les séries

$$S(s) = \sum_1^\infty A_\nu^{-s} \quad \text{et} \quad S_1(s) = \sum_1^\infty a_\nu^{-s}$$

telles que $A_\nu = a_\nu^\alpha P(a_\nu^{-1})$ quand ν est suffisamment grand, P étant une série entière $[P(0) = 0]$, et $\alpha > 0$; $S(s)$ est une fonction régulière en tout point du plan non singulier pour $S_1(\alpha s + K)$, $K = 1, 2, \ldots, \infty$.

L'auteur donne quelques applications de cette proposition : il énonce notamment des résultats relatifs à

$$S_2(s) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty} [R(\omega_1+\nu_1, \ldots, \omega_n+\nu_n]^{-s},$$

R étant une fonction rationnelle entière, dont les coefficients ont leur partie réelle positive. S_2 est une fonction méromorphe dans tout le plan et ses pôles sont sur l'axe réel; dans une bande parallèle à l'axe imaginaire, $e^{-\varepsilon|s|}S_2(s)$ tend vers zéro, pour s infini, quel que soit ε. Ces considérations permettent d'obtenir pour $\log \Pi(x)$ un développement asymptotique valable dans tout le plan, sauf pour la partie négative de l'axe réel. Les recherches de l'auteur embrassent également beaucoup d'autres séries de Dirichlet (*voir* aussi *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XIX).

Dini (*U.*). — Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler). (185-230).

Ce Mémoire contient des remarques sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation

$$\Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + h.$$

On sait qu'on forme la chaîne suivante

$$\Delta u_0 = 0. \qquad \Delta u_1 = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 + h. \qquad \ldots.$$

Il s'agit de trouver des conditions suffisantes pour que : 1° on puisse limiter u_0 (prenant sur un contour C des valeurs données) et ses dérivées premières à l'aide du maximum des données et de leurs dérivées, et cela dans C et sur C; 2° on puisse limiter $u_1, u_2, \ldots$ (s'annulant sur C) et leurs dérivées à l'aide des limitations précédentes; 3° la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ vérifie l'équation proposée.

Pour cela, l'auteur étudie tout d'abord les propriétés de l'intégrale

$$W(x', y') = \frac{1}{2\pi}\int\int_C F(x, y)\log r\, dx\, dy, \qquad r^2 = (x-x')^2 - (y-y')^2.$$

et il retrouve, en les précisant, des résultats déjà obtenus dans le cas de trois variables par MM. Hölder et Morera. Si W′ et W″ sont les valeurs de W en deux points M′, M″, de distance δ, situés dans C ou sur C, on a, en supposant $F(x, y)$ intégrable et $|F(x, y)| < F$.

$$|W' - W''| < KF\delta, \qquad \left|\frac{\partial W'}{\partial x'} - \frac{\partial W''}{\partial x''}\right| < K_1 F\delta|\log\delta|.$$

K et K_1 dépendant seulement de C, et K tendant vers zéro avec l'aire de C.

De plus les dérivés secondes existent et satisfont à l'équation $\Delta W = F(x, y)$, pour tout point intérieur à C, si le rapport $\left|\frac{F(x, y) - F(x', y')}{r}\right|$ est intégrable dans le domaine du point M′, uniformément sur tout vecteur issu de M′. Si cette condition est vérifiée pour tous les points intérieurs à C, sauf peut-être

pour un nombre fini de points ou de lignes, l'auteur dit que $F(x, y)$ satisfait aux *conditions normales*. Il appelle également *champ normal* le domaine limité par un contour C, tel que la fonction harmonique, prenant sur C des valeurs données, admette des dérivées premières finies *dans* C *et sur* C, quand la succession des données au contour a des dérivées premières, dont les rapports incrémentaux sont absolument intégrables.

Dès lors, si C est un champ normal, où $F(x, y)$ satisfait aux conditions normales, l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int\int_C F(x, y)\, G\, dx\, dy$, où G désigne la fonction de Green, reste, ainsi que ses dérivées premières, $< MF$ *dans* C *et sur* C, M tendant vers zéro avec l'aire de C. Ces conditions ne sont d'ailleurs que suffisantes : ainsi, dans le cas du cercle, il n'est pas nécessaire que $F(x, y)$ satisfasse aux conditions normales.

Cela posé, *si les conditions du champ normal relatives à* C *et aux données sont vérifiées, et si a, b, c, h satisfont aux conditions normales*, les deux premières questions envisagées plus haut sont résolues et l'on obtient pour $u_0 u_1 \ldots$ des limitations qui assurent la convergence de la série et des séries dérivées.

La 3e question est aussi élucidée par la convergence des séries des dérivées secondes : la série formée donne la solution à l'intérieur de C, sauf peut-être en un nombre fini de points ou de lignes. Si a et b sont nuls, la condition de champ normal disparaît : l'existence de la fonction de Green et la continuité des données suffisent.

L'auteur démontre ensuite que le cercle est un champ normal, ainsi que les contours qu'on en déduit par représentation conforme.

Les résultats obtenus subsistent pour l'équation

$$\Delta u = F(x, y, z, p, q),$$

si F reste fini et tel que

$$F(x, y, z, p, q) - F(x', y', z', p', q') = A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + P,$$

A, B, C étant bornés et $\left|\frac{P}{r}\right|$ intégrable dans le voisinage du point (x', y').

Hürwitz (*J.*). — Sur la réduction des formes quadratiques binaires à coefficients variables et complexes. (231-291).

Dans le présent article, l'auteur expose un mode de développement en fraction continue des nombres complexes (déjà étudié par lui dans un travail précédent), et l'applique à la réduction des formes quadratiques à coefficients et à variables complexes, de même que l'on a utilisé le développement en fraction continue des nombres réels pour la réduction des formes quadratiques réelles à déterminant positif.

I. *Sur une espèce particulière de développement en fraction continue des grandeurs complexes.*

1. Supposons le plan des variables complexes divisé en carrés par les droites $x + y = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ $x - y = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$; et à l'aide de conventions précises, qu'il est inutile d'indiquer ici, associons chacun des côtés à un nombre complexe carré bien déterminé et à un seul : étant donné un nombre complexe non entier x_0, sa première valeur approchée sera l'entier complexe a

centre du carré qui contient x_0 ; déduisant a_n de x_n comme on a déduit a_0 de x_0, le *développement de première espèce* de x_0 se trouve défini par la suite d'égalités

$$x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad \ldots,$$

et on le désignera par $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

2. Il est aisé de voir que les points qui ont pour affixes $x_1 x_2 \ldots x_r \ldots$ sont à l'extérieur du domaine R limité par les quatre demi-cercles qui résultent par une inversion, de puissance 1 et de pôle 0, des côtés du carré fondamental. D'autre part, l'application des conventions précises signalées plus haut, relativement aux côtés des carrés du plan, permet d'indiquer certaines impossibilités dans la loi de succession des entiers $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$; en particulier, on peut indiquer la nature de cette succession dans le cas où x_0 se trouve sur la frontière du domaine R. Ces résultats sont utiles dans la résolution du problème suivant : étant donnée une fraction continue $(b_0, b_1, \ldots b_n, x_{n+1})$ dont la valeur est x_0, reconnaître si c'est le développement de première espèce de x_0; plusieurs théorèmes donnent pour cela des critériums suffisants, et ils montrent en même temps que les lois indiquées précédemment sont caractéristiques du développement de première espèce.

3. Les nombres complexes rationnels ont un développement limité.

Pour un nombre complexe irrationnel, il est nécessaire de démontrer la convergence du développement obtenu : la méthode pour y arriver consiste à montrer, le plan étant divisé d'une certaine manière en domaines limités par des arcs de cercle, que le rapport $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ des dénominateurs de deux réduites successives tombent dans le même domaine que l'entier a_n sans tomber sur son contour; il en résulte que $|q_n|$ augmente indéfiniment; or, un calcul facile montre que la différence $x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\Theta_n}{q_n^2}$ est inférieure en module à $\frac{1}{|q_n|}$; d'où résulte la convergence.

Une étude un peu plus approfondie des quantités Θ_n permet d'établir des lemmes importants qui sont utiles pour montrer la périodicité du développement d'une irrationnelle du second degré.

4. La démonstration de la convergence a mis en évidence une division du plan qui donne lieu, de la même manière que la division en carrés, à un développement intéressant, dit *développement de seconde espèce* : ses propriétés, et leurs démonstrations, sont analogues à celles du développement de première espèce; et il existe entre les deux des liens qui apparaissent aisément : par exemple, si l'on développe de la première manière une quantité x_0,

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots)$$

l'expression $(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1)$ est le développement de seconde espèce de la quantité $R_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$ (rapport des dénominateurs de deux réduites consécutives).

II. *Réduction des formes quadratiques linéaires.*

La recherche d'une représentation d'un nombre entier m à l'aide d'une forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (où a, b, c sont des entiers donnés) conduit, dans le domaine complexe comme dans le réel, aux deux problèmes suivants :

1° Deux formes données de même déterminant sont-elles équivalentes, autrement dit, peut-on, par une substitution linéaire (de déterminant $=+1$), transformer l'une dans l'autre?

2° Déterminer toutes les substitutions linéaires qui tranforment une forme f en une forme équivalente F.

C'est pour la résolution de ces deux problèmes qu'est utile le développement en fraction continue exposé précédemment.

On peut répartir les substitutions $x = \alpha x' - \beta y'$; $y = \gamma x' - \delta y'$ où $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$, que l'on peut indiquer par $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, en six classes; les substitutions d'une classe se déduisent de l'une d'entre elles en remplaçant α, β, γ, δ par des nombres qui leur sont respectivement congrus (mod. $1+i$) : deux formes sont équivalentes si l'on peut transformer l'une dans l'autre par une de ces substitutions, et *complètement équivalentes* si l'on peut employer pour cela une substitution de première ou de deuxième classe : la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes soient complètement équivalentes et que leurs *premières racines* soient liées par une relation telle que $x_0 = \frac{\alpha x'_0 - \beta}{\gamma x'_0 - \delta}$, où $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est une substitution de première ou de deuxième classe : des indications précises montrent ce que l'on entend par première racine d'une forme.

La notion de forme réduite dérive de celle de couple de racines réduit; si l'on considère une forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$, le couple $x_0\ y_0$ des racines de $ax^2 + 2bx + c$ est dit *réduit* si le développement de première espèce de x_0 est périodique simple : on démontre que, dans ce cas, il en est de même de celui de seconde espèce de $\frac{1}{y_0}$: si $x_0 = (a_0, a_1 \ldots a_n, x_0)$ (première espèce), on a

$$\frac{1}{y_0} = \left(a_n, a_{n-1}, \ldots a_0, \frac{1}{y_0}\right) \qquad \text{(deuxième espèce)};$$

une forme est réduite si le couple $x_0 y_0$ correspondant est réduit. D'autre part, a_0 étant le premier terme du développement de première espèce de x_0; (x_0, y_0) étant réduit ou non; posons $x_0 = a_0 - \frac{1}{x'}$, $y_0 = a_0 - \frac{1}{y'}$; (x', y') sera dit *adjacent* (benachbart) à (x_0, y_0); deux formes sont dites *adjacentes* si les couples correspondants sont adjacents. Il est immédiat que deux formes adjacentes sont complètement équivalentes et que toute forme quadratique est complètement équivalente à une forme réduite. En se reportant au développement de première espèce d'une irrationnelle du second degré, on voit qu'il n'y a qu'un nombre fini de formes réduites de déterminant donné; d'autre part, chaque couple (x_0, y_0) correspondant à une forme réduite donne naissance à une suite périodique de couples qui correspondent eux-mêmes à des formes équivalentes : les formes réduites de déterminant donné se groupent donc en périodes de formes équivalentes entre elles. Mais la question suivante se pose alors : étant données deux formes réduites de même déterminant appartenant à des périodes différentes, reconnaître si elles sont équivalentes. Pour y arriver, on démontre d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que deux irrationnelles du deuxième degré soient complètement équivalentes et que l'une, soit par elle-même, soit changée de signe, entre comme reste dans le développement de première espèce de l'autre : la démonstration de la nécessité, en particulier, entraîne quelques longueurs. (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_n, y_n) étant les couples de racines qui constituent

une période de formes réduites de déterminant D, si l'on convient d'appeler *période équivalente* celle qui correspond aux couples $(-x_0, -y_0)\ldots(-x_n, -y_n)$, on peut dire que deux formes réduites de même déterminant sont complètement équivalentes si elles appartiennent à la même période ou à des périodes équivalentes, et alors seulement. Le premier problème posé au début est alors résolu : si un des développements de x_0, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, premières racines de f, $f\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, conduit à une période semblable ou équivalente à celle que donne le développement de x', première racine de f', les formes f et f' sont équivalentes au sens ordinaire du mot.

Pour le deuxième problème, le procédé même de réduction permet d'obtenir une substitution qui transforme une forme f en une forme f' équivalente. Pour les obtenir toutes, il suffit d'avoir celles qui transforment f en elle-même et pour cela celles qui transforment une forme réduite f_0 en elle-même; ce dernier problème se traite simplement à l'aide du développement de première espèce de la première racine de f_0.

Burnside (*W.*). — Sur les quatre rotations qui transforment un système d'axes orthogonaux en un autre. (291-295).

Cette question a été traitée par une élégante méthode analytique par M. Lipschitz (*Acta*, t. XXIV); l'objet de cette courte Note est de la traiter par une méthode cinématique qui fait mieux saisir les rapports géométriques entre les éléments de la figure considérée.

Elle s'appuie essentiellement sur ce théorème (dû à Hamilton) : trois rotations successives autour de trois rayons d'une sphère, d'angles doubles du triangle sphérique correspondant, ne donnent aucun déplacement.

Riquier (*Ch.*). — Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque. (297-357).

M. Riquier a montré, dans des travaux précédents, comment on peut, étant donné un système complètement intégrable, fixer par la seule considération de ses *premiers membres*, l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement un groupe d'*intégrales ordinaires* du système, et mettre en évidence les fonctions ou constantes arbitraires, en nombre fini, dont dépend la solution générale. Si l'on considère un système différentiel quelconque, réduit, de plusieurs manières, à une forme intégrable, et si l'on compare dans ses diverses formes le nombre et la nature des éléments arbitraires, il est aisé de se rendre compte que les résultats intéressants d'une telle comparaison ne peuvent se rapporter qu'aux valeurs d'entiers λ, μ, définis de la manière suivante : λ genre maximum des arbitraires (le genre d'une fonction arbitraire est le nombre de ses variables), μ nombre des arbitraires de genre λ. Cette étude a pu donner divers résultats intéressants — en particulier relativement à ce qu'on peut appeler le degré de généralité d'un système différentiel quelconque — et le présent Mémoire est consacré à les exposer.

I. *Systèmes différentiels explicites, arithmoïques, monoïques.*

Envisageons un système différentiel composé d'un nombre fini d'équations, résolues par rapport à certaines fonctions inconnues ou de leurs dérivées : ces

quantités qui constituent les premiers membres sont appelées, ainsi que toutes leurs dérivées, quantités *principales;* les quantités inconnues sont dites *paramétriques.* Si les seconds membres ne contiennent alors aucune quantité principale, et si, de plus, on peut déduire du système infini formé par les équations données et par celles qui s'en déduisent par différentiation un système numériquement équivalent, qui donne pour chacune des quantités principales une expression où n'entrent que des quantités paramétriques (relations *ultimes*), on dit que le système est *explicite;* si les relations obtenues en égalant les diverses expressions d'une même quantité principale sont identiquement vérifiées (c'est-à-dire vérifiées quelles que soient les variables indépendantes et les quantités paramétriques, considérées toutes, pour un instant, comme des variables indépendantes), le système est dit *passif.* Enfin rappelons qu'un système explicite est *complètement intégrable* s'il admet un groupe d'*intégrales ordinaires* répondant à des données initiales arbitrairement choisies (voir *Comptes rendus*, 1898, et *Acta*, t. XXIII).

Ces préliminaires posés, arrivons au but essentiel de cette première partie qui est la définition des systèmes *arithmoïques* et *monoïques.* Soient $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues; $x, y, \ldots$ les variables indépendantes; choisissons arbitrairement des entiers, les uns $c_u, c_v, \ldots$ positifs nuls ou négatifs; les autres $c_{u,x}, c_{u,y}, \ldots, c_{v,x}, c_{v,y}, \ldots$ positifs; l'*arithme* d'une dérivée $\frac{\partial^{\alpha+\beta\ldots} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots}$ sera l'entier

$$c_w + \alpha c_{w,x} + \beta c_{w,y} + \ldots.$$

On peut, par des différentiations et des combinaisons variées, déduire du système donné une infinité de relations; parmi ces relations, celles qui ne contiennent au second membre aucune quantité dont l'arithme surpasse celui du premier seront dites *arithmoïques*; si, par un choix convenable des c, les relations ultimes du système explicite donné S sont, sauf un nombre limité d'entre elles, toutes arithmoïques, le système est dit *arithmoïque.* Si, en particulier, on peut réaliser cela en donnant une même valeur à $c_{u,x}, c_{u,y} \ldots c_{v,x}, c_{v,y} \ldots$, le mot *arithmoïque* est remplacé par le mot *monoïque.*

Dans un Mémoire précédent (*Acta*, t. XXIII), l'auteur a défini ce qu'il entend par système orthoïque, et système orthonome, définition fondée sur l'attribution d'un système de p cotes à chaque variable et à chaque inconnue. Un système orthoïque est arithmoïque, un système orthonome est monoïque.

On peut envisager des systèmes formés de plusieurs groupes d'équations, orthoïques chacun par rapport à certains groupes d'inconnues : moyennant certaines hypothèses supplémentaires, on obtient des systèmes intéressants, explicites, que l'on peut nommer *polyorthoïques :* leur importance tient à ce résultat, ici démontré, que tout système polyorthoïque est arithmoïque. En remplaçant dans la définition le mot orthoïque par le mot orthonome, on obtient les systèmes polyorthonomes; tout système polyorthonome est monoïque.

II. *Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme passive.*

Le but essentiel de cette deuxième partie est de montrer qu'on peut, en général, déduire d'un système différentiel donné, un système explicite équivalent. Tout d'abord, pour montrer que deux systèmes différentiels sont équivalents (analytiquement), il suffit de montrer que les systèmes prolongés (systèmes obtenus en adjoignant aux relations données les relations différentiées) sont équivalents (numériquement).

La méthode consiste alors à chercher à remplacer un système donné S par un système explicite passif S', tel que S prolongé et S' prolongé soient numériquement équivalents : ceci se fait au moyen d'un certain nombre d'opérations successives, qu'il ne serait pas aisé de résumer en quelques lignes.

Signalons pourtant une proposition qui s'appuie sur divers lemmes relatifs à l'équivalence des systèmes et indique comment on peut remplacer un système résolu par rapport à certaines dérivées, les seconds membres de ce système étant indépendants de toute quantité *anormale* (voir *Acta*, t. XXIII), par un système d'un même nombre de relations qui ont les mêmes premiers membres et dont les seconds membres soient indépendants, non seulement de toute quantité anormale, mais aussi de toute quantité principale.

Indiquons, d'autre part, l'emploi de cotes pour ranger les dérivées dans un ordre convenable, utile pour la transformation du système proposé.

Cette étude, qui ne fait intervenir ni changement de variables ni intégration, donne le résultat suivant : à moins que l'on n'arrive à une relation non identique entre les variables indépendantes, auquel cas le système proposé est analytiquement impossible, on obtient un système explicite passif composé de deux groupes : 1° un groupe orthoïque passif où se trouvent engagées certaines inconnues du système : 2° un groupe de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes des inconnues du premier groupe et des dérivées paramétriques de celles-ci. Si les cotes premières des inconnues sont toutes égales, le mot *orthoïque* peut être remplacé dans cet énoncé par le mot *orthonome;* et l'on est amené à une forme monoïque complètement intégrable.

L'auteur termine cette deuxième partie en exposant un mode plus général de réduction à une forme passive, où interviennent les systèmes appelés précédemment *polyorthoïques*.

III. *Propositions relatives au degré de généralité d'un système différentiel quelconque.*

Étant donné un système explicite, la seule connaissance de ses premiers membres permet, comme l'a montré l'auteur, de représenter les déterminations initiales des intégrales par des sommes de termes, en nombre limité, dont chacun s'obtient en multipliant une fonction arbitraire de quelques-unes des variables indépendantes, $x, y, \ldots$, par un monome en $(x-x_0)$, $(y-y_0), \ldots$, etc. Il est aisé de voir que le genre maximum des arbitraires λ et le nombre μ des arbitraires de genre λ sont indépendants de la représentation particulière.

Le but essentiel de ce Mémoire est, comme nous l'avons dit, la comparaison des nombres λ, μ obtenus dans les différents systèmes explicites équivalents à un système différentiel quelconque.

Si l'on réduit un système différentiel quelconque non impossible à une forme monoïque passive (avec ou sans changement des variables et des inconnues), les nombres λ et μ ont des valeurs indépendantes du mode de réduction, L, M; si l'on réduit à une forme explicite passive, en appelant λ et μ les nombres correspondants, on a

$$\begin{array}{lll} \text{ou bien} & L-\lambda>0; & \\ \text{ou bien} & L-\lambda=0, & M-\mu>0; \\ \text{ou bien} & L-\lambda=0, & M-\mu=0. \end{array}$$

La démonstration suppose d'abord qu'on ne fait aucun changement de variables, et s'étend ensuite au cas général; elle repose, en particulier, sur la considération

du nombre de quantités principales et des quantités paramétriques dont l'arithme ne surpasse pas un nombre donné k.

En faisant des conventions faciles à concevoir, l'énoncé précédent devient : parmi toutes les formes explicites passives que peut prendre un système donné, non impossible, les formes monoïques passives présentent un degré de généralité constant qui est, de plus, supérieur ou égal à celui de tout autre.

Dans le cas particulier où l'on peut réduire un système à une forme explicite passive ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires, toutes les formes explicatives passives du système en question sont monoïques et dépendent du même nombre de constantes.

Enfin si l'on suppose un système différentiel réduit à une forme non monoïque, mais seulement arithmoïque, on peut montrer que le nombre λ correspondant est le même que pour toute forme monoïque équivalente; il n'en est pas nécessairement de même du nombre μ, dont la valeur est tantôt inférieure, tantôt égale à celle qu'il possède dans le dernier cas. C'est ce que montre l'exemple très simple de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (forme monoïque passive) qu'on peut écrire $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (forme arithmoïque passive); la solution générale dépend dans le premier cas de deux fonctions arbitraires d'une variable, dans le second d'une seule.

Bendixson (*I.*). — Sur les racines d'une équation fondamentale. (359-365).

Étant donnée l'*équation en* S *classique* formée avec un déterminant dont les éléments $a_{\lambda\mu}$ sont réels, on sait que toutes les racines sont réelles, si $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$. Dans le cas général, si $S_K = R(S_K) + i\,I(S_K)$ est une racine, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

I. Si g est la plus grande des quantités $\frac{|a_{\lambda\mu} - a_{\mu\lambda}|}{2}$, on a

$$I(S_K) \quad g\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

II. Si M et m sont la plus grande et la plus petite des racines de l'équation déduite de la proposée en remplaçant $a_{\lambda\mu}$ par $\frac{a_{\lambda\mu} + a_{\mu\lambda}}{2}$, on a

$$m \quad R(S_K) \quad M.$$

Si $a_{\lambda\mu} + a_{\mu\lambda} = 0$, on a $R(S_K) = 0$ pour toutes les racines.

La méthode s'étend aux équations plus générales de la forme

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - S\,b_{11} & \dots & a_{1n} - S\,b_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} - S\,b_{n1} & \dots & a_{nn} - S\,b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$a_{\lambda\mu}$ étant réel, $b_{\lambda\mu} = b_{\mu\lambda}$ et la forme quadratique $\Sigma b_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$ étant définie et positive. Les deux théorèmes établis subsistent : 1° en remplaçant g par $\frac{g}{\rho}$, ρ étant la plus petite racine de l'équation en S ordinaire relative aux $b_{\lambda\mu}$; 2° en dési

gnant par M, m, les racines extrêmes de l'équation déduite de (1) en remplaçant $a_{\lambda\mu}$ par $\frac{a_{\lambda\mu}+a_{\mu\lambda}}{2}$.

Hirsch (*A.*). — Sur les racines d'une équation fondamentale (Extrait d'une lettre à M. Bendixson). (367-370).

Généralisation des deux théorèmes établis dans la Note précédente : en supposant les $a_{\lambda\mu}$ complexes, et en désignant par $\overline{a}_{\lambda\mu}$ la quantité conjuguée, par A, B, C les plus grandes des quantités $|a_{\lambda\mu}|$, $\left|\frac{a_{\lambda\mu}+\overline{a}_{\mu\lambda}}{2}\right|$, $\left|\frac{a_{\lambda\mu}-\overline{a}_{\mu\lambda}}{2}\right|$, par M et m les racines extrêmes de l'équation déduite de la proposée en remplaçant $a_{\lambda\mu}$ par $\frac{a_{\lambda\mu}+\overline{a}_{\mu\lambda}}{2}$, on a les inégalités

$$|S_K| \leqq nA, \qquad |R(S_K)| \leqq nB, \qquad I(S_K) \leqq nC \qquad \text{et} \qquad m \leqq R(S_K) \leqq M.$$

Si $a_{\lambda\mu}+a_{\mu\lambda}$ est réel, la troisième inégalité peut être remplacée par

$$I(S_K) < C\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Stäckel (*P.*). — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. (371-383).

Les fonctions *algébriques* y de x, définies par l'égalité $g(x,y)=0$ *à coefficients entiers*, comprennent, comme cas particulier, les fonctions *rationnelles* à coefficients rationnels : celles-ci prennent une valeur rationnelle pour toute valeur rationnelle de x (réelle ou complexe), et M. Hilbert a montré que cette propriété, remplie dans un intervalle arbitrairement petit, était caractéristique. Si, au lieu de g, nous considérons *une série entière* $P(x,y)$ *à coefficients rationnels*, convergente dans le voisinage de $x=y=0$, les fonctions y de x définies par $P(x,y)=0$ comprennent, comme cas particulier, les fonctions algébriques envisagées plus haut : existe-t-il, pour caractériser celles-ci, une propriété aussi simple que celle qui permet de distinguer, dans le cas de la relation $g(x,y)=0$, les fonctions rationnelles parmi les fonctions algébriques ?

L'auteur rappelle que Weierstrass avait construit une transcendante prenant une valeur rationnelle pour toute valeur rationnelle de la variable : il remarqua de plus qu'il était possible de construire des transcendantes prenant une valeur *algébrique* pour toute valeur algébrique de la variable. Strauss en donna un exemple ; mais le domaine de convergence était limité : la question subsiste encore pour les transcendantes entières.

Dans le cas de l'égalité $g(x,y)=0$, à toute valeur algébrique de l'une des lettres x, y, correspond une valeur algébrique de l'autre. Mais cette double propriété ne suffit pas à caractériser les fonctions algébriques ainsi définies vis-à-vis des fonctions définies par $P(x,y)=0$, car on peut trouver des fonctions transcendantes y de x, et x de y, vérifiant une telle relation et satisfaisant à la double propriété envisagée. C'est ce que montre l'auteur (*voir* aussi *Comptes rendus*, 20 et 27 mars 1899) en construisant une relation de la forme $x+y+\Sigma c_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta=0$.

L'auteur signale enfin la propriété suivante des fonctions définies par $g(x, y) = 0$: à toute valeur algébrique a de x correspondent des valeurs algébriques pour y et toutes ses dérivées; les coefficients du développement autour de $x = a$ sont donc algébriques. Existe-t-il des transcendantes représentées par un développement de ce genre autour de l'origine et dont le prolongement analytique soit fourni par un développement analogue en tout point voisin?

M. Gevrey et M. Janet.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI.

5e série, Rendiconti.

Tome VI; année 1897, 1er semestre [1].

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le troisième trimestre de 1896 et considérations sur la couronne solaire observée en août (3-4).

Millosevich (*E.*). [U]. — Observations de la comète Perrine (déc. 8), faites à l'équatorial de $0^m,25$ de l'Observatoire royal du Collège Romain (4-5).

Dini (*U.*). [H 9*d*]. — Sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (5-16).

Dini (*U.*). [H 9*d*]. — Sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (45-48).

Autres applications des formules trouvées dans les Notes précédentes (t. V, 1896, 2e semestre, p. 381 et p. 421), principalement aux équations dépourvues du terme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2.$$

Almansi (*E.*). [T 2*a*]. — Sur la déformation de la sphère élastique (61-64).

La résolution du problème, en supposant donnés à la surface les déplacements ou les tensions, est faite par l'application du théorème suivant :

---

[1] Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XXXVI$_2$, p. 167.

Étant u, v, w trois fonctions liées à k par les formules

$$\Delta^2 u = \frac{\partial k}{\partial x}, \qquad \Delta^2 v = \frac{\partial k}{\partial y}, \qquad \Delta^2 w = \frac{\partial k}{\partial z},$$

et k satisfaisant à l'équation $\Delta^2 = 0$, on peut poser

$$u = (r^2 + R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda,$$

$$v = (r^2 + R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu,$$

$$w = (r^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu,$$

où

$$\Delta^2 \varphi = \Delta^2 \lambda = \Delta^2 \mu = \Delta^2 \nu = 0,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$R = \text{const.}$$

et

$$2\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = k.$$

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le quatrième trimestre de 1896 (87-88).

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le quatrième trimestre de 1896 (88-89).

Millosevich (*E.*). [U]. — Dernière observation de la comète Perrine, 8 décembre 1896 (90-91).

Reina (*V.*). [J2*e*]. — Sur la probabilité des erreurs de situation d'un point dans l'espace (107-112).

Enriques (*F.*). [$M_2$8]. — Les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 2$ (139-144).

Elles peuvent se rapporter birationnellement à l'un des types suivants :

1° $p^{(1)} = 2, \quad p = 1.$

Surface F_6 du sixième ordre à trois droites cuspidales situées dans un plan et passant par un point où F_6 a avec soi-même un contact du cinquième ordre.

2° $p^{(1)} = 2, \quad p = 2.$

Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec courbe de diramation $f(x, y) = 0$ du dixième ordre, douée de deux points quintuples infiniment rapprochés.

Ascione (*E.*). [N_1 1 ref. Q_2]. — Sur le complexe du premier ordre des trisécantes d'une surface dans un S_3 (162-169).

Il y a trois surfaces. Chacune de ces surfaces peut déterminer un tel complexe, dont elle est la surface focale. Ce sont : la surface F_2^6 de Véronèse, une surface F_2^5 du cinquième ordre ayant cinq plans qui la coupent suivant des cubiques, et une surface F_2^4 du quatrième ordre qui n'a pas de plans qui la coupent suivant des cubiques. *Voir* aussi à la page 190.

Enriques (*F.*). [M_2 8]. — Sur les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 3$ (170-174).

Trois types

1° $$p^{(1)} = 3, \quad p = 3.$$

Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec courbe de diramation $f(x, y) = 0$ du huitième ordre

2° $$p^{(1)} = 3, \quad p = 2.$$

Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec courbe de diramation composée d'une droite r et d'une courbe du neuvième ordre douée de trois points triples sur r et de deux autres points triples infiniment rapprochés.

3° $$p^{(1)} = 3, \quad p = 1.$$

a. Surface du huitième ordre, douée de courbe double du quatorzième ordre (éventuellement dégénérée) définie, dans le cas général, comme la courbe double d'une surface du septième ordre, rationnelle à sections elliptiques.

b. Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec courbe de diramation du dixième ordre, douée d'un point quadruple et de quatre couples de points triples infiniment rapprochés.

Blaserna (*P.*). [V 9]. — Commémoration de Galilée Ferraris (189-197).

Avec la liste des travaux de G. Ferraris.

Riccò (*A.*). [U]. — Sur la théorie de Wilson relative au niveau des taches solaires (202-206).

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1897 (235-236).

Ascione (*E.*). [N_1 ref. Q_2]. — Sur les surfaces d'un S_4 dont les trisécantes forment des complexes du premier ordre (240-247).

Étude de la surface F_2^3 mentionnée dans l'autre Note (*voir* ce Tome, p. 162).

Viterbi (*A.*). [E5]. — Sur l'opération fonctionnelle représentée par une intégrale définie regardée comme élément de calcul (247-254).

Viterbi (*A.*). [E5]. — Une extension de quelques notions du calcul infinitésimal (267-275).

L'opération

$$I = \int f(y_1)\, a(y_1, y_2)\, dy_1,$$

y_1, y_2 étant des variables en général complexes, peut se regarder comme variable en dépendance de la forme de la fonction caractéristique a et du chemin d'intégration. On peut donc, à ce point de vue, traiter ces opérations I comme les quantités et en faire un calcul. L'auteur donne les définitions et les propriétés des opérations arithmétiques appliquées à ces opérations, et la relative extension de la notion de fonction. Il n'y a que les énoncés. La seconde Note contient l'extension aux I des notions de limite, continuité, dérivation et intégration.

Medolaghi (*P.*). [J 4*a*]. — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles définissant un groupe (275-279).

L'équation du dernier multiplicateur,

$$\varphi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,$$

en considérant φ comme fonction connue et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ comme fonctions inconnues, admet, outre les solutions $\xi_i = \eta_i$, le système

$$\xi_i = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\xi_\nu \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \right),$$

ce qu'on exprime aussi en disant qu'elle définit à elle-même un groupe. L'auteur démontre que l'équation est la seule qui ait cette propriété. Tout groupe dans un espace de n dimensions a au moins $n-1$ équations de définition; s'il en a une seule, il est un des groupes. Pour la démonstration, il emploie la correspondance relevée par Engel (*Math. Ann.*, t. XXVII) entre un groupe donné dans l'espace de n dimensions avec m équations de définition et de l'ordre s, et un groupe en N_s variables et à $N_s - m$ paramètres, renfermé comme sous-groupe dans un groupe B_n à N_s paramètres où

$$N_s = n(\varepsilon_{1n} + \varepsilon_{2n} + \ldots + \varepsilon_{sn}).$$

ε_{kn} étant le nombre des dérivées d'ordre K d'une fonction de n variables. Par cela, la question de trouver les équations dont chacune peut à elle-même définir un groupe se réduit à la suivante : pour toute valeur de s trouver les sous-groupes de $B_{\varepsilon n}$ à $N_\varepsilon - 1$ paramètres

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1897 (300-301).

Pincherle (*S.*). [H 11]. — Sur la généralisation de la propriété du déterminant wronskien (301-307).

Une opération distributive Λ possédant un théorème de multiplication

$$\Lambda(\varphi\psi) = \alpha\Lambda(\varphi)\Lambda(\psi) + \beta[\varphi\Lambda(\psi) + \psi\Lambda(\varphi)] + \gamma\varphi\psi,$$

est nécessairement une forme différentielle linéaire du premier ordre, ou bien une opération de substitution.

La condition

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \Lambda\varphi_1 & \Lambda\varphi_2 & \dots & \Lambda\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda^{n-1}\varphi_1 & \Lambda^{n-1}\varphi_2 & \dots & \Lambda^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix} = 0$$

est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une relation

$$\pi_1\varphi_1 + \pi_2\varphi_2 + \dots + \pi_n\varphi_n = 0,$$

les $\pi_1, \dots, \pi_2$ étant des solutions d'une même équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(\pi) = \lambda\pi.$$

Niccoletti (*O.*). [H 9*e*]. — Sur les équations linéaires du deuxième ordre du type hyperbolique, dont la série de Laplace est finie dans les deux sens (307-314).

Étant

$$\Omega(z) = s - ap + bq + cz = 0$$

l'équation donnée, et

$$\Phi(u) = 0$$

l'équation adjointe, les deux transformations intégrales singulières correspondant à la solution u_0 sont

$$z = \int u_0(p - bz)\,dx + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - au_0\right)dy,$$

$$z = \int z\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - bu_0\right)dx + u_0(q - az)\,dy.$$

et l'auteur démontre qu'on peut construire toutes les équations linéaires du

deuxième ordre dont l'intégrale générale contient explicitement les deux fonctions arbitraires, par l'application répétée des deux transformations σ et τ à l'équation

$$s = 0.$$

Niccoletti (O.). [H 9*e*]. — Sur les équations linéaires du deuxième ordre du type hyperbolique, dont la série de Laplace est finie dans un seul sens (334-341).

On peut construire toutes ces équations par l'application répétée des transformations σ et τ (*voir* la Note précédente) aux deux équations

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha p) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\beta q) = 0.$$

Castelnuovo (G.). [$M_2$8]. — Sur le genre linéaire d'une surface et sur la classification qu'on en déduit (372-378, 406-413).

Le genre $p^{(1)}$ d'une surface a été défini par Noether pour le cas où la surface donnée, d'ordre n, a une (au moins) surface adjointe d'ordre $n-4$, c'est-à-dire qu'il existe $p_g \geqq 1$. La définition de $p^{(1)}$ donnée par M. Enriques, qui comprend celle de M. Noether et qui s'applique aussi à des cas où $p_g = 0$, est

$$(1) \qquad p^{(1)} = n + \pi' - 3(\pi - 1),$$

où π est le genre de la courbe générale d'un système linéaire $|C|$ dépourvu de points de base, existant sur la surface, n le nombre des intersections variables de deux courbes de ce système et π' le genre de la courbe générale du système adjoint à $|C|$.

Toutefois cette définition ne peut plus s'appliquer lorsque la surface a un nombre infini de courbes exceptionnelles, c'est-à-dire de courbes (rationnelles) qui peuvent correspondre à des points simples dans des transformations birationnelles de la surface. Ici l'auteur observe d'abord qu'on peut, dans la définition de $p^{(1)}$, abandonner la condition que le système $|C|$ n'ait pas de points de base, et définir $p^{(1)}$ comme le maximum des valeurs que l'expression (1) peut prendre pour les divers systèmes linéaires de courbes de la surface. Puis il démontre que, même dans le cas où il y a un nombre infini de courbes exceptionnelles, on a toujours un maximum fini pour l'expression (1). Une distinction entre les systèmes linéaires conduit à deux maxima, et précisément :

Lorsqu'on considère les systèmes linéaires de courbes pour lesquelles

$$(2) \qquad n \geqq 2\pi - 2,$$

on a un maximum $p^{(1)}$ que l'auteur continue à appeler *genre linéaire* (principal) de la surface, et qui coïncide avec la définition de Noether et avec celle de Enriques, dans les cas où ces définitions sont applicables.

Pour les systèmes linéaires qui ont

$$(3) \qquad n \leqq 2\pi - 2$$

et qui peuvent se considérer seulement sur des surfaces particulières, il y a un maximum $\mathfrak{p}^{(1)}$ que l'auteur appelle *genre linéaire secondaire*.

En correspondance des relations (2), (3), les surfaces se distinguent en deux familles: celles de la première ont un nombre fini de courbes exceptionnelles et $p^{(1)} \geqq 1$; celles de la seconde en ont un nombre infini et $p^{(1)} < 0$.

Les surfaces de la seconde famille se distinguent en deux catégories

a $\qquad p^{(1)} = 1$.

b $\qquad p^{(1)} = 1$.

Dans le cas a la surface contient un faisceau de courbes rationnelles, et peut, par conséquent, être transformée en une surface réglée ou en une surface renfermant ∞^1 coniques.

Le cas b comprend le plan (et les surfaces rationnelles). L'auteur pose aussi, sans la résoudre, la question de savoir s'il y a d'autres surfaces appartenant à cette catégorie.

Volterra (*V.*). [T 7]. — Sur la décharge électrique dans les gaz et sur certains phénomènes d'électrolyse (389-401).

L'action des rayons ultraviolets et des rayons Röntgen sur la cathode favorise la décharge jusqu'à une limite supérieure de la distance (distance neutre); au delà le phénomène s'invertit. L'analogie, relevée principalement par J. J. Thomson, entre le passage de l'électricité dans les gaz et l'électrolyse, a amené l'auteur à examiner un phénomène électrolytique présentant analogie avec celui de la décharge, sous l'influence d'une perturbation de l'électrolyte, et il trouve pour ce cas des lois analogues à celles qui régissent le phénomène de la décharge.

Peano (*G.*). [B 1 *c*]. — Sur le déterminant wronskien (413-415).

Étant $x_1, \ldots, x_n$ des fonctions réelles de t, la condition que le wronskien soit égal à zéro est nécessaire pour l'existence d'une relation linéaire

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0.$$

La proposition inverse, qu'une telle condition soit aussi suffisante, a besoin de restrictions. Une condition sous laquelle la proposition peut s'invertir est qu'il n'existe aucune valeur de t, qui réduise égaux à zéro tous les mineurs de la dernière horizontale. La démonstration est fondée sur les méthodes de Grossmann et sur les nombres complexes d'ordre supérieur.

(*Voir* une autre démonstration de M. Vivanti dans le t. VII, 1er semestre, p. 194.)

Tome VI: année 1897, 2e semestre.

Reina (*V.*). [U 10]. — Sur la théorie des projections quantitatives (12-16).

Les systèmes orthogonaux isothermes qui peuvent représenter les parallèles et

les méridiens, dans une projection quantitative de l'ellipsoïde terrestre, sont définis par la relation

$$x = iy = A \int e^{c\,u - iv^2 + c'\,u - iv}\, d(u + iv) + B.$$

Véronèse (*G.*). [V 1]. — Sur le postulat de la continuité (161-168).

Pour établir les fondements de la Géométrie, il n'est pas nécessaire de poser un postulat pour la continuité de la droite. Les résultats contenu dans cette Note se trouvent développés dans l'*Appendice agli Elementi di Geometria* de l'auteur (Vérona-Padova, 1898).

Segre (*C.*). [M_1 1 *b* ref. M_2 1 *c* α]. — Sur certains points singuliers des courbes algébriques et sur la ligne parabolique d'une surface (168-175).

Soient deux branches de courbes, ayant en commun un point O, la tangente en O et l'ordre de contact en ce point. Si une droite non parallèle à la tangente rencontre les deux branches en P, P′ et la tangente en T, et si l'on fait varier cette droite de manière qu'elle vienne à passer par O, la limite du rapport anharmonique

$$(MTPP').$$

M étant un point de la droite, qui reste toujours distinct de O, est un invariant pour les transformations projectives des deux branches. Il en est de même pour la limite du rapport des courbures aux points qui se trouvent sur une même perpendiculaire à la tangente. On obtient des invariants relatifs à plusieurs courbes en prenant (lorsqu'il y en a lieu) ces limites invariantes pour les couples de branches qu'on peut considérer. L'auteur ajoute des résultats relatifs à la singularité appelée *tacnode symétrique* (Wölfing, *Math. Ann.*, t. XXXVI, p. 119) et à la courbe parabolique d'une surface, dans l'étude de laquelle se présente ce dernier genre de singularité, comme on le voit par le théorème suivant, démontré par l'auteur :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point simple de la surface soit double pour la courbe parabolique est que l'intersection de la surface avec le plan tangent en ce point y ait un tacnode symétrique ou un point triple.

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant les deuxième et troisième trimestres de 1897 (241-242).

Millosevich (*E.*). [U]. — Observations de la comète Perrine (octobre 16) (244-245).

Medolaghi (*P.*). [C 4]. — Sur certains invariants ponctuels des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (247-254).

Medolaghi (*P.*). [C 4]. — Nouvelles recherches sur certains invariants ponctuels des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (313-317).

Ces invariants sont déterminés [Lie, *Ueber Differentialinv.* (*Math. Ann.* t. XXIV)] en étendant à p, q, r, s, t la transformation infinitésimale

$$\delta x = \alpha(xyz)\,\delta t,$$
$$\delta y = \beta(xyz)\,\delta t,$$
$$\delta z = \gamma(xyz)\,\delta t,$$

c'est-à-dire en calculant les variations δp, δq, δr, δs, δt.

L'équation est supposée sous la forme

$$r = F(xyzpqst) = 0;$$

on calcule $\delta\frac{\partial F}{\partial x}, \ldots, \delta\frac{\partial F}{\partial t}$, ou, en indiquant les dérivées par des indices placés en bas, $\delta F_x, \ldots, \delta F_t$; puis $\delta F_{xx}, \ldots, \delta F_{tt}, \delta F_{xxx}, \ldots$, et il suffit d'arriver aux dérivées troisièmes pour que le nombre des variations surpasse celui des dérivées qui entrent dans le calcul. L'auteur se borne aux invariants qui ne contiennent que les dérivées de F par rapport à s et à t. La solution d'un système complet de quatre équations avec cinq variables F_s, F_t, F_{ss}, F_{st}, F_{tt} donne l'invariant

$$A = \frac{\varpi_2\varpi_6}{\varpi_4^2},$$

où

$$\varpi_2 = F_s^2 + 4F_t,$$
$$\varpi_4 = F_tF_{ss} - F_sF_{st} + F_{tt},$$
$$\varpi_6 = F_{st}^2 + F_{ss}F_{tt}.$$

Ces trois expressions sont des *poids* 2, 4, 6 respectivement, en appelant *poids* d'une dérivée de F le nombre des indices s augmenté du double nombre des indices t, et *poids* d'un produit la somme des poids des facteurs. L'invariant A est du poids zéro, et, comme l'auteur le démontre dans la seconde Note, tous les invariants sont du poids zéro. La première Note contient aussi l'interprétation des conditions

$$\varpi_2 = 0, \qquad \varpi_4 = 0, \qquad \varpi_6 = 0.$$

L'invariant A est le plus simple.

Dans la seconde Note, l'auteur trouve les invariants d'ordre supérieur, toujours avec la condition qu'ils ne renferment que les dérivées par rapport à s et à t. Étant φ un invariant absolu, les trois solutions d'un système complet de quatre équations avec sept variables $F_s, \ldots, F_{tt}, \varphi_s, \varphi_t$, sont des invariants, dont l'un est encore A et dont les deux autres sont

$$D_s(\varphi) = \varpi_4^{-1}(F_{st}\varpi_2 - F_s\varpi_4)\varphi_s + \varpi_6^{-1}(2\varpi_4 - F_{ss}\varpi_2)\varphi_t,$$
$$D_t(\varphi) = \varpi_6^{-1}\varpi_2^{\frac{1}{2}}(F_{tt} + F_tF_{ss})\varphi_s - \varpi_6^{-1}\varpi_2^{\frac{1}{2}}(F_sF_{ss} + 2F_{st})\varphi_t.$$

Par application successive des opérations $D_s(\varphi)$, $D_t(\varphi)$, on obtient les autres invariants.

Berzolari (*L.*). [Q 2 ref. O 5 *f*]. — Une observation sur l'extension des théorèmes d'Euler et de Meusnier aux hyperespaces (283-290).

Cette extension avait été faite par Kronecker et d'autres en étudiant la courbure des lignes obtenues comme intersection de la variété donnée à $n-1$ dimensions de S_n avec des *plans* (à deux dimensions). Les théorèmes obtenus sont étendus par l'auteur aux sections de la variété avec des hyperplans (espaces S_{n-1}), et cela en supposant que S_n soit un espace riemannien de courbure $\frac{1}{k^2}$. La question, pour le cas des *plans*, avait été traitée (aussi dans l'espace non euclidien) par Killing (*Die nichteuklid. Raumf.* etc., Leipzig, 1885). Les coordonnées employées par l'auteur sont celles de Weierstrass. Étant R_1 la courbure (de Kronecker) d'une section hyperplane quelconque et R celle de la section hyperplane normale ayant même trace sur l'hyperplan tangent au point considéré, on a

$$R_1 = \frac{R}{\cos^{n-2}\varphi},$$

φ étant l'angle des deux hyperplans sécants. En un point O, la courbure des sections hyperplanes normales a un maximum et un minimum, lorsque la trace de l'hyperplan sur le tangent à la variété est un des S_{n-2} principaux de l'indicatrice. Pour $n-1$ hyperplans quelconques normaux en un point O à la variété et deux à deux entre eux, la somme des courbures en O des sections est constante.

Arzelà (*C.*). [D 2 *a* γ]. — Sur l'intégration par séries (290-292).

Observation relative à la proposition démontrée par l'auteur dans ces *Rendiconti*, Tome I, 1884-1885, page 53. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe

$$\int_a^x f(x, y_0)\,dx = \lim_{y=y_0} \int_a^x f(x, y)\,dx$$

est que $f(x, y_0)$ soit intégrable et que

$$\lim_{y=y_0} \int_a^x f(x, y)\,dx = \Phi(x, y_0)$$

existe et soit continue. Ici il observe que, lorsque

$$f(x, y) \leqq L,$$

la condition de la continuité de Φ est superflue.

Le passage au cas des séries se fait en posant

$$f(x, y) = \sum_1^n u_n(x),$$

$$f(x, y_0) = \sum_1^\infty u_n(x)$$

Stranco (*P.*). [M 4*c*]. — Sur la conductibilité thermique de la glace suivant différentes directions (299-306).

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur les Léonides observées en novembre 1897 (309).

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant les deuxième et troisième trimestres de 1897 (310-311).

Millosevich (*E.*). [U]. — Observations des dernières petites planètes découvertes entre Mars et Jupiter (311-312).

Loria (*G.*). [V 7 ref. O 2*c*]. — Evangelista Torricelli et la première rectification d'une courbe (318-323).

Torricelli est le premier qui ait rectifié une courbe, et cette courbe est la spirale logarithmique.

Messedaglia (*L.*). [V 9]. — Commémoration de F. Brioschi (353-355).

Banal (*R.*). [C 4*d* ref. Q 2]. — Sur les espaces à courbure constante (357-362).

Outre les espaces riemannien et lobatschefskien auxquels correspondent respectivement les éléments linéaires

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2},$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

il y a un autre espace à courbure constante, trouvé par M. Ricci, dont l'élément linéaire peut prendre la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + \frac{1}{c^2}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

ou l'autre forme

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

L'auteur démontre que ce dernier espace (*espace de Ricci*) peut se déformer dans l'espace de quatre dimensions et qu'il y a une correspondance univoque

et réciproque entre les configurations de cet espace et celles que peut prendre une sphère dans l'espace ordinaire. Il n'y a dans ce Tome que le premier Chapitre où, après avoir démontré que la condition nécessaire pour la déformabilité d'un espace à trois dimensions est qu'il ait la courbure totale égale à zéro, et en avoir déduit que les espaces de Riemann et de Lobatschefsky ne sont pas déformables, l'auteur montre que l'espace de Ricci est à courbure de Gauss constante et positive $= c^2$. La démonstration de la déformabilité est renvoyée (*voir* t. VII, 1er semestre, p. 7).

Schoenfliess (*A.*). [J 5]. — Sur les nombres transfinis de M. Véronèse (362-368).

L'auteur se propose de montrer que ces nombres, que M. Véronèse a considérés dans ses *Fondamenti di Geometria* (Padova, 1891), ne permettent pas la multiplication, et que, par conséquent, une Géométrie projective n'est pas possible dans le champ de ces nombres. *Voir* la réponse de M. Véronèse dans le Tome VII, 1er semestre, page 79.

S. Rindi.

PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE.

Tome XVII, 1906.

Levi Civita (*F.*). — Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur le mouvement stationnaire. (En français, p. 1-40.)

Exposition simplifiée des recherches parues dans les *Rendiconti dei Lincei* (1901, t. I. p. 3-9, 35-41, 137-143, 338-346, 429-434, 461-466; 1905, t. I. p. 143, 203-209).

Le point de départ de ces Notes était une généralisation de la méthode, dite *ignoration of coordinates*, généralisation prêtant d'elle-même à d'intéressantes applications dynamiques.

Table des matières : 1. Considérations générales s'appliquant à tout système différentiel; 2. Systèmes canoniques, mouvements stationnaires, mouvements à la Routh, règle de Dirichlet-Liapounoff; 3. Exemples de mouvements à la Routh; 4. Remarques critiques.

Zórawski (*K.*). — Sur les propriétés de courbure des systèmes d'éléments linéaires. (En allemand, p. 41-76.)

L'auteur rattache ses recherches à celles d'Aoust (*Annali di Matematica*, 1864, 68, 69; *Analyse des courbes tracées sur une surface quelconque*, Paris, 1869). Il considère des demi-droites attachées aux points d'une courbe gauche et non tangentes à elles. Soient $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ les cosinus directeurs d'un tel

élément linéaire attaché au point $[x(t), y(t), z(t)]$ de la courbe. On définit *la courbure* du système par $K = \sqrt{\sum \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2}$. Si $K \neq 0$ on peut définir la direction de *la normale principale* (l, m, n) par $\frac{d\alpha}{ds} = Kl \ldots$ etc.; $\Sigma l\alpha = 0$.

Une troisième direction, celle de la binormale (ξ, ψ, ζ), est définie par

$$\xi = \zeta n - \psi m \ldots$$

etc. Le trièdre, ainsi formé et attaché à la courbe, possède les propriétés du trièdre de Serret; les rotations sont : $-K, 0, -S$; S est appelée *la torsion* du système au point (t).

Des exemples de tels systèmes sont fournis par la théorie des surfaces. Si l'on a deux familles (1) et (2) de courbes tracées sur une surface, les tangentes aux courbes (1) le long d'une courbe (2) forment un système qu'on appellera (12). On considère de même (21). K_{12} peut se mettre sous la forme $K_{12} = \sqrt{n_{12}^2 + g_{12}^2}$, où, par exemple,

$$n_{12} = \frac{D\,du\,\delta v - D'(du\,\delta v - dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}$$

n_{12}, g_{12} sont dits *courbure normale* et *courbure géodésique*.

La torsion $S_{12} = \frac{d\Omega_{12}}{ds} = \tau_{12}$ où Ω_{12} est l'angle de la normale principale du système (12) avec la normale à la surface; τ_{12} est appelée *torsion géodésique*.

Toutes ces formules ont une grande analogie avec celles qu'on emploie dans la théorie ordinaire de la courbure, et dont elles sont la généralisation. La dernière formule donne un résultat immédiat, savoir le théorème de Joachimstal sur les lignes de courbure.

Comme second exemple, l'auteur traite le système formé par les normales à la surface le long d'une courbe

$$K = \sqrt{n^2 + \tau^2}, \qquad n = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

$$\tau = \frac{\{D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v\}}{ds\,\delta s},$$

où la direction $(\delta u, \delta v)$ est perpendiculaire à (du, dv). $S = -\frac{d\Omega}{ds} = g$, Ω étant l'angle de la binormale du système avec la tangente à la courbe.

De cette formule on peut tirer un théorème de Bonnet (*Journal de Mathématiques*, 1860) sur les normales le long d'une géodésique.

L'auteur considère, en ce dernier lieu, deux familles doublement infinies de courbes de l'espace (C) et (Γ) et il considère les tangentes aux (Γ) le long d'une courbe (C). Il calcule K et S et les interprète géométriquement.

Sierpinski (W.). — Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques. (En polonais, p. 77-118.)

M. Voronoi a donné une méthode nouvelle pour étudier les valeurs asymptotiques de certaines sommes doubles et il a trouvé la formule asymptotique

$$\sum_{n=0}^{n=t} E\left(\frac{x}{n}\right) = x \log x + (C - 1)x.$$

C désignant la constante d'Euler et l'erreur étant de l'ordre $\sqrt[3]{x}.\log x$ (*Journal für reine und angewandte Mathematik*, t. CXXVI). L'auteur applique la méthode de M. Voronoï au calcul de la valeur asymptotique de $\sum_{n>0}^{n=\sqrt{x}} E(\sqrt{x-n^2})$ et il la trouve égale à $\frac{\pi x-1}{4}$, à une quantité de l'ordre de $\sqrt{x}$ près.

Miller (*G. A.*). — Sur les groupes engendrés par deux opérateurs, dont chacun transforme l'autre en une puissance du transformé, la même pour les deux opérateurs. (En anglais, p. 119-122.)

Les opérateurs étant t_1 et t_2,

$$t_1^{-1} t_2 t_1 = t_2^{\alpha},$$
$$t_2^{-1} t_1 t_2 = t_1^{\alpha}.$$

On étudie le cas $\alpha = 3$ et l'on démontre que le seul groupe non abélien formé dans les conditions de l'énoncé est le groupe quaternaire.

On passe à la généralisation $\alpha = p^n - 1$, p étant un nombre premier.

Przeborski (*A.*). — Sur les intégrales non analytiques des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. (En polonais, 123-128.)

L'auteur démontre que toute équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, dont les coefficients sont des fonctions analytiques dans un domaine ε, admet, outre les intégrales analytiques, des intégrales non analytiques dans un domaine ε_1, compris dans ε.

Doborzynski (*G.*). — L'hypothèse de Van der Waals des états correspondants. (En polonais, p. 129-222.)

Mémoire de Physique expérimentale.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (En polonais, p. 223-258.)

Traduction polonaise, par M. S. Dickstein, de la Note parue dans les *Acta mathematica* (1902, p. 353-392).

Przeborski (*A.*). — Sur les intégrales non analytiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre de forme quelconque (En polonais, p. 259-264.)

L'auteur démontre que toute équation du premier ordre de la forme

$$F(z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0,$$

où F est une fonction analytique dans un domaine ε, admet outre les intégrales analytiques, des intégrales non analytiques dans des domaines compris dans (ε).

Tome XVIII, 1907.

Sierpinski (W.). — Sur la sommation de la série $\sum_{n>a}^{n=b} \tau(n) f(n)$, où $\tau(n)$ désigne le nombre de décompositions du nombre n en une somme de deux carrés. (En polonais, p. 1-60; Thèse de doctorat.)

Pour étudier les propriétés de la fonction τ de la théorie des nombres, il est avantageux de considérer la somme double

$$S = \sum_{a}^{b} \sum_{m^2+n^2=k} f(m^2+n^2) = \sum_{k>a}^{k=b} \tau(k) f(k)$$

(m, n, k = entiers). En s'appuyant sur certaines propositions de M. Voronoï : *Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries* (*Annales de l'École Normale*, 1904), on exprime S au moyen de certaines intégrales définies dépendant des fonctions

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{n=x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!};$$

on prouve que $\varphi_k(x)$ ne diffère de

$$\pi \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!}$$

que d'une quantité de l'ordre de $X^{\frac{k+1}{2}}$.

Ce résultat permet de démontrer simplement une proposition sur la relation qui existe entre le nombre de décompositions possibles d'un nombre en une somme de quatre carrés et le nombre de ses diviseurs.

Ensuite, en transformant S par le théorème de Jacobi sur le nombre de décompositions possibles d'un nombre en une somme de deux carrés, on arrive à cette formule, qui est la généralisation d'une formule de Liouville :

$$E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{x-1}) - E(\sqrt{x-2}) + \ldots + E\left(\frac{x}{4}\right) - E\left(\frac{x}{9}\right) + E\left(\frac{x}{16}\right) - \ldots$$

On démontre que $\sum_{n=0}^{n=N} \frac{\tau(n)}{n}$ ne diffère de $\pi \log x - K$ (K étant une constante)

que d'une quantité de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{x}}$. On étudie la fonction analytique

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \qquad (R(s) > 1),$$

[$\mathcal{R}(s) > 1$], qui jouit de la propriété

$$\frac{\Gamma(s)\,F(s)}{\pi^s} = \frac{\Gamma(1-s)\,F(1-s)}{\pi^{1-s}}.$$

En profitant de formules sommatoires obtenues par ces considérations, on établit certaines propriétés de $\tau(n)$ pour les n en progression arithmétique et pour les nombres carrés. Pour ces derniers, le nombre moyen de décompositions en une somme de deux carrés croît proportionnellement au logarithme du nombre considéré. On calcule la valeur moyenne de $\tau^2(n)$.

Denizot. — Contribution à la théorie de la perspective axonométrique. (En polonais, p. 61-79.)

L'auteur démontre, par une méthode nouvelle, le théorème fondamental de Pohlke. Suivent des applications à la perspective.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique d'une fonction monogène. (En polonais, p. 81-141.)

Traduction, par M. S. Dickstein, de la Note parue dans les *Acta mathematica* (1905, p. 101-181).

Zórawski (*K.*). — Notes de Géométrie infinitésimale. (En allemand, p. 143-170.)

I. L'auteur établit les équations différentielles que vérifient les paramètres u', v', de deux familles de courbes égales et parallèles qui forment un réseau conjugué sur une surface de translation.

II. On établit le système complet des invariants différentiels des lignes asymptotiques par rapport à un groupe linéaire. (Suite d'un travail présenté en 1906 à l'Académie de Cracovie.)

III. On cherche les transformations infinitésimales qui laissent invariants tous les éléments linéaires de la surface et une famille de courbes, et l'on établit les conditions sous lesquelles cela est possible.

IV. On établit les critères pour que deux familles de courbes planes soient identiques.

Broniewski (*W.*). — Relation entre la variation de la résistance électrique et la dilatation des métaux monoatomiques. (En polonais, p. 171-214.)

Mémoire de Physique expérimentale.

Gorczynski (*W.*). — Sur le calcul des sommes de la chaleur en grandes calories. (En polonais, p. 225-233.)

(Mémoire de Météorologie.)

Miller (*G. A.*) — Les groupes engendrés par deux opérateurs d'ordre 3, dont le produit est d'ordre 4. (En anglais, p. 235-240.)

1° $s_1^3 = s_2^3 = 1$, $(s_1 s_2)^4 = (s_1 s_2^2)^4 = 1$ (ce qui revient à $s_1 s_2 = s_2 s_1$).

2° $s_1^3 = s_2^3 = 1$, $(s_1 s_2)^4 = (s_1 s_2^2)^4 = 1$.

Tome XIX. 1908.

Stozek (*W.*). — Sur l'intégration de certaines équations différentielles du second ordre. (En polonais, p. 1-16.)

L'auteur détermine *effectivement* l'ensemble des équations différentielles qui se ramènent à l'équation $\frac{d^2y}{du^2} = 0$ par un changement convenable de la variable et de la fonction inconnue. Ce problème n'a été résolu par Sophus Lie que *virtuellement*. Les raisonnements se rattachent à ceux de S. Lie; une partie des calculs est empruntée au Mémoire de M. Zórawski sur les équations analogues du troisième ordre (*Acad. de Cracovie*, t. XXXIV).

Miller (*G. A.*). — Sur les groupes dans lesquels le sous-groupe formé par toutes les substitutions qui ne changent pas une lettre donnée est régulier. (En anglais, p. 17-19.)

Soient G le groupe considéré et G_1 le sous-groupe en question. Soit n l'ordre de G et $n - \alpha$ celui de G_1. Le cas $\alpha = 1$ a été étudié par différents auteurs. Cette Communication a pour objet de présenter quelques remarques sur le cas $\alpha > 1$.

Krygowski (*Z.*). — Sur le développement des fonctions hyperelliptiques en séries trigonométriques. (En français, p. 21-61; la suite, t. XX, p. 153-187.)

M. P. Appell, dans son Mémoire *Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*, publié dans les *Acta mathematica*, t. XIII, 1890, n'a pas présenté aussi simplement le développement des fonctions

$$\frac{\Theta_{pr}(v_1, v_2)}{\Theta(v_1, v_2)} \quad (p, r = 0, 1, 2, 3; p \geq r)$$

que celui de $\frac{\Theta_{pr}(v_1, v_2)}{\Theta(v_1, v_2)}$; ceci tient à ce que les formules du premier de ces cas font intervenir une certaine intégrale double, qu'on ne peut pas décomposer en

intégrales simples indépendantes. L'auteur de cette Communication, en développant ses recherches antérieures (*Comptes rendus* du 29 avril 1907; *Wiadomosci matematyczne*, t. XII, Varsovie), est arrivé à montrer comment l'introduction des intégrales hyperelliptiques de seconde espèce permet de tourner cette difficulté. Il présente les intégrales canoniques de seconde espèce sous une forme nouvelle; ensuite il passe aux formules, qui lient les sommes aux fonctions thêta.

Dans la deuxième Partie (*Prace mat.-fiz.*, t. XX) il démontrera comment ces formules peuvent être utilisées pour les développements des fonctions

$$\frac{\partial \log \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)}{\partial v_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho),$$

au moyen desquelles il passe ensuite aux fonctions $\frac{\vartheta^2_{\beta\gamma}(v_1, \ldots, v_\rho)}{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\rho)}$.

Laub (*J.*). — Contributions à l'électrodynamique des corps en mouvement. (En polonais, p. 63-75).

Le principe de relativité, comme le concevait Einstein, n'est valable *a priori* que pour le vide. L'auteur de cette Communication se propose d'étudier quelques questions, qui se rattachent aux mouvements dans les milieux matériels, en se plaçant au point de vue de l'électrodynamique, basée sur le principe de la relativité. Il commence par la théorie de l'expérience classique de Fizeau (concernant la vitesse de propagation de la lumière dans un courant d'eau); sans se servir de l'hypothèse de l'éther, il établit la valeur du coefficient de Fresnel.

Dans la suite de cette Communication (qui n'a pas paru jusqu'en 1910) il traitera la question générale des transformations des coordonnées dans le passage du système fixe au système mobile dans les milieux matériels; il va étudier ensuite les rapports qui existent entre l'électrodynamique basée sur les principes de la relativité et les théories électrodynamiques de Lorentz; puis il va examiner les équations de Maxwell et Lorentz pour les corps mobiles dans un milieu isotrope quelconque, en tenant compte de la conductibilité électrique.

Broniewski (*W.*). — Relations entre la variation de la résistance électrique et la dilatation des métaux polyatomiques. (En polonais, p. 77-37.)

Mémoire de Physique expérimentale.

Axer (*A.*). — Sur les systèmes de forces intérieures admettant un centre. (En polonais, p. 99-121.)

M. Delaunay a démontré que, pour le mouvement de trois points matériels s'attirant suivant la loi de Newton, il existe *un centre des forces*, c'est-à-dire que les trois forces résultantes sollicitant respectivement les trois points en question se coupent en un point. (Congrès international de Heidelberg de 1904.)

M. Axer établit la proposition générale, dont le théorème de M. Delaunay n'est qu'un cas très particulier : pour qu'un système des forces centrales agissant

dans l'espace à n dimensions entre $n+1$ points $A_0, A_1, \ldots, A_n$, qui déterminent cet espace sans ambiguïté, admette un centre de forces, distinct de tous les points A_i, il faut et il suffit qu'on puisse écrire

$$P_{ik} = C_i \frac{\overline{A_i A_k}}{\overline{A_0 A_k}} P_{0k} \qquad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ k = i \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right)$$

P_{ik}, désignant la force avec laquelle le point A_k sollicite le point A_i, et les C_i étant des facteurs numériques [1], dont un au moins est $\neq 0$; pour que le point A_0 soit le centre des forces, il faut et il suffit que toutes les composantes $P_{kl} = 0$, si $kl \neq 0$, sauf deux qui ne sont situées dans le même plan.

Si le système vérifie la loi de l'action et de réaction, les conditions précédentes se simplifient et peuvent être résumées toutes deux dans la possibilité d'écrire

$$P_{ik} = K \frac{P_{i0} P_{0k}}{\overline{A_i A_0}\ \overline{A_0 A_k}} \overline{A_i A_k};$$

pour $n = 3$, la condition générale devient

$$P_{01} P_{12} P_{20} = - P_{02} P_{21} P_{10},$$

et, pour le cas *ordinaire*, où la loi de l'action et de la réaction est vérifiée, on a cette proposition élégante :

Pour un mouvement de trois points, qui s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une loi quelconque, il existe toujours un centre de forces.

Pour $n = 4$, on a quatre conditions

$$\begin{aligned} P_{01} P_{12} P_{20} &= - P_{02} P_{21} P_{10}, \\ P_{02} P_{23} P_{30} &= - P_{03} P_{32} P_{20}, \\ P_{03} P_{31} P_{10} &= - P_{01} P_{13} P_{30}, \\ P_{12} P_{23} P_{31} &= - P_{13} P_{32} P_{21}, \end{aligned}$$

qui se réduisent à trois ou six conditions (qui se réduisent à cinq) équivalentes aux précédentes

$$\frac{P_{01} P_{23}}{\overline{A_0 A_1}\ \overline{A_2 A_3}} = \frac{P_{03} P_{21}}{\overline{A_0 A_3}\ \overline{A_2 A_1}}, \qquad \ldots.$$

Quand la loi de l'action et de la réaction est vérifiée, ces conditions se réduisent aux relations simples

$$\frac{P_{01} P_{23}}{\overline{A_0 A_1}\ \overline{A_2 A_3}} = \frac{P_{02} P_{13}}{\overline{A_0 A_2}\ \overline{A_1 A_3}} = \frac{P_{03} P_{12}}{\overline{A_0 A_3}\ \overline{A_1 A_2}}.$$

Zaremba (S.). — Sur le principe de Dirichlet. (En polonais, p. 123-128.)

(Communication présentée à la section d'Analyse du Congrès international de Rome, le 11 avril 1908.)

---

(1) Les points A sont fixes.

Cette Communication présente une méthode nouvelle de démonstration du principe de Dirichlet. On pose

$$B(P, Q) = \int\int_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

en se donnant dans un domaine (D) une fonction φ, telle que $B(\varphi, \varphi)$ ait un sens, on cherche à déterminer une fonction v, harmonique dans (D) et remplissant la condition

$$B(v, h) = B(\varphi, h)$$

pour toute fonction harmonique h, pour laquelle $B(h, h)$ a un sens. On démontre que, pour (D) limité et quarrable, le problème précédent (que l'auteur appelle *le problème de Dirichlet transformé*) admet une solution unique déterminée à une constante arbitraire près.

On considère l'ensemble (E) de toutes les fonctions continues dans (D), ainsi que leurs dérivées premières, qui prennent sur le contour de (D) une succession continue de valeurs données σ. On peut démontrer que, si parmi ces fonctions il y a une fonction harmonique u, elle résout *le problème de Dirichlet transformé* pour toutes les fonctions f de (E) pour lesquelles $B(f, f)$ a une valeur finie. Il en résulte immédiatement, que $B(u, u)$ est égal au minimum des $B(f, f)$, c'est-à-dire que l'existence de la solution du problème de Dirichlet entraîne la validité du principe de Dirichlet.

Le problème de Dirichlet lui-même est résolu dans une large mesure par le théorème suivant :

Les valeurs que prend sur le contour de (D) *une solution du problème de Dirichlet transformé relatif à une fonction de* (E) *ne diffèrent de* σ *que par une constante. Toutefois, pour établir ce théorème, il faut faire une hypothèse complémentaire, du reste peu restrictive sur* (D).

Les propositions précédentes, établies d'abord pour le cas du cercle, se démontrent d'une manière générale par la *méthode de balayage* de M. Poincaré.

Merecki (*R.*). — L'influence de la variable activité solaire sur les éléments météorologiques terrestres. (En polonais, p. 131-181.)

Mémoire de Météorologie.

Arctowski (*H.*). — Les variations séculaires du climat de Varsovie. (En français, p. 183-206.)

Mémoire de Météorologie.

Thullie (*Z.*). — Sur quelques problèmes de la théorie électronique des métaux. (En polonais, p. 207-216.)

Mémoire de Physique expérimentale.

Ernesto Pascal. — Sur la nouvelle théorie des formes différen-

tielles d'ordre et de degré quelconques. (En français, p. 217-223.)

(Communication présentée au Congrès international de Rome, en avril 1908).

L'auteur présente une théorie qui est la généralisation de celles des formes pfaffiennes et des formes quadratiques. Une forme différentielle d'ordre r et du premier degré u est une expression formée comme la différentielle d'ordre r d'une fonction f de plusieurs variables dépendantes $x, \ldots, x_n$, en remplaçant dans chaque terme les dérivées de f par des fonctions quelconques des variables. Une pareille différentielle peut être représentée comme une somme des produits de toutes les dérivées partielles de la fonction jusqu'à l'ordre r par certaines expressions différentielles caractéristiques, somme des produits des différentielles des variables qu'on désigne par $\delta^{(r)}_{j_1, \ldots, j_m}$, $j_1, \ldots, j_m^r$ étant les indices des variables x qui entrent dans la formation des δ. L'auteur énumère les propriétés fondamentales des δ :

1° Elles se transforment linéairement par la transformation générale des variables.

2° Leur différentielle s'exprime par les δ mêmes etc. Une forme différentielle de degré R est une expression homogène k-linéaire des δ de K ordres déterminés fixes $r, \ldots, r_k$; la somme de tous ces ordres est l'ordre de la forme. L'auteur introduit certaines fonctions des coefficients, obtenues par une suite d'opérations nouvelles, appelées *déduction*, et dites *symboles fondamentaux*.

L'auteur résout les problèmes suivants :

1. La condition pour l'équivalence de deux formes différentielles, obtenue par la considération de certaines matrices des symboles introduits.

2. On établit la condition pour l'existence de transformations infinitésimales qui, étant appliquées à la forme, donnent zéro ou reproduisent la forme à un facteur près.

3. Ces conditions sont les mêmes que celles qu'on trouve en généralisant le problème de réduction de Pfaff, c'est-à-dire les conditions pour l'existence de transformations finies par lesquelles la forme donnée d'ordre quelconque se transforme à un facteur près en une forme d'un nombre moindre de variables.

4. Le problème d'intégrabilité complète. Pour les formes pfaffiennes la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité s'énonce : l'équation admet les transformations infinitésimales de l'équation adjointe.

Pour les formes d'ordre supérieur, il faut remonter aux opérations d'ordre supérieur en introduisant les dérivées partielles d'ordre supérieur au premier. L'auteur a établi les conditions nécessaires et suffisantes en se bornant aux formes du second ordre. En tout cas une condition nécessaire est, que chaque système complètement intégrable d'équations aux différentielles totales d'ordre quelconque admet toutes les transformations infinitésimales de son système adjoint.

5. Quelques résultats sur la réductibilité à des formes à types spéciaux, établis pour les formes du second ordre.

Les recherches de l'auteur ont été publiées : *Comptes rendus*, 1900, 1904, *Rendiconti del Instituto Lombardo*, 1900, 1, 2, 3, 4, 6; *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1902, 3, 6; *Annali di Matematica*, t. VI, 1901; *Mathematische Annalen*, t. LIV, 1901; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906, XXIII, 1907.

Tome XX, 1909.

Hoborski (*A.*). — Intégration de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. (En polonais, p. 1-143.)

Un problème analogue a été l'objet du Mémoire de M. Zaremba : *La solution générale du problème de Fourier* (*Académie de Cracovie*, 1905). L'auteur de cette Communication reprend et développe les calculs indiqués dans le Mémoire de M. Zaremba en les adaptant au cas de deux dimensions (M. Zaremba n'avait en vue que l'espace à trois dimensions) et reprend pour ce cas l'étude systématique de certaines propositions, qui servaient de base au Mémoire mentionné de M. Zaremba.

Le problème consiste à déterminer la fonction $v(x, y, t)$ continue, ainsi que $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $t > 0$ et x, y étant les coordonnées d'un point intérieur au domaine (D), simplement connexe et limité en tous sens par une courbe fermée (C), par les trois conditions suivantes :

1° à l'intérieur de (D) on a

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

2° sur la courbe (C) on a

$$h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h(V)_i + \varphi \qquad (h' = 0, \quad \text{ou bien} \quad h' = 1);$$

h-fonction continue du point de la courbe C; φ-fonction continue du point de la courbe C et de t-$\left(\frac{dV}{dN}\right)_i$ la valeur limite de la dérivée de v prise le long de la normale intérieure, quand x, y tend vers un point de (C) par les points de (O).

3° $$\lim_{t=0} V(x, y, t) = F(x, y).$$

On suppose de plus $v(x, y, t)$ borné pour $0 < t \leqq T$, quel que soit T sur la courbe (C) on fait un certain nombre d'hypothèses d'un caractère très général.

On commence par étudier *le problème de Fourier simplifié* où l'on suppose $\varphi = 0$; on cherche à développer $v(x, y, t)$ en série de fonctions fondamentales de *fonctions harmoniques* de M. Poincaré et l'on arrive à la formule

$$(1) \qquad V(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\xi_k t} U_k(x, y),$$

où l'on a, à l'intérieur de (D),

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_c} + \xi_k U_k = 0,$$

sur (C)

$$h'\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = h(U_k),$$

$$A_k = \int_{(D)} F(x, y) U_k(x, y)\, dx\, dy.$$

Ensuite, on ramène facilement le problème général au *problème simplifié*.

Pour suivre un raisonnement régulier qui conduit au développement (1), pour démontrer sa convergence et étudier ses propriétés, on reprend l'étude des *fonctions harmoniques*. Au lieu de suivre la marche classique du Mémoire *Sur les équations de la Physique* de M. Poincaré, l'auteur applique la méthode perfectionnée de M. Zaremba qui consiste à déduire les propriétés de l'équation

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \xi u = P(x, y)$$

non pas celle de Laplace, mais de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu^2 u = 0.$$

μ étant un nombre ayant sa partie réelle positive et suffisamment grande; on pose

$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

et l'on part de la solution particulière de (2)

$$f(\rho, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\mu\sqrt{s^2+t^2}}}{\sqrt{s^2+t^2}}\, dt.$$

On introduit ensuite les *potentiels généralisés : le potentiel de simple couche*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\omega} \int_C \sigma(x', y') f(\rho', \mu)\, ds$$

et le *potentiel de double couche*

$$v(x, y) = \frac{1}{2\omega} \int_{(C)} \sigma(x', y') \frac{df(\rho', \mu)}{d\rho} \cos\mathfrak{I}\, ds.$$

$$[\rho_1^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2;\ ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2.$$

$\mathfrak{I}$-l'angle de la normale à C en un point $O(x', y')$ avec la droite OM, M étant le point (x, y)]. u et v ont des propriétés tout à fait analogues aux potentiels classiques; ce sont des solutions de (2) et pour $R(\mu)$ assez grand, ils peuvent servir à la solution des problèmes analogues à ceux de Dirichlet et Robin par des suites d'approximations rapidement convergentes.

De (2) on passe à (II) par les méthodes de M. Poincaré, que l'on complète dans le cas de $h' = 1$ par le théorème suivant, dû à M. Zaremba :

c étant une constante, qui ne dépend que de la nature de (C), L la borne supérieure de la longueur d'une corde de (C), on a, quelle que soit la fonction $F(x, y)$,

$$\frac{\int_D \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - \xi_0 F^2\right] dx\, dy}{\int_C F\, ds} \geq \frac{\sqrt{\xi_0}}{4c}$$

pourvu que

$$\xi_0 \leq \frac{16c^2}{L^2}.$$

Rosenblatt (*A.*). — Sur les développements en série des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre au voisinage d'un point singulier essentiel. (En allemand, p. 145-152.)

MM. J. Bendixson et J. Horn ont étudié les intégrales de l'équation différentielle

$$(1) \qquad x^n \frac{dy}{dx} = ay + bx + f(x, y),$$

[où $n > 1$, $f(x, y)$ une série des puissances qui commence par les termes du second degré], dans le cas $\neq 0$.

La présente Note a pour objet de donner la représentation d'une partie des caractéristiques de (1) par une suite convergente d'approximations successives, *dans le cas* $a = 0$, sous certaines hypothèses complémentaires.

On considère le cas où l'équation (1) se présente sous la forme

$$(2) \qquad x^n \frac{dy}{dx} = ay^m + yf(x, y),$$

$$[f(x, y) = bx^h[1 + \varphi(x)] + xy\chi(x, y) + cy^p[1 + f(y)],$$

$$\varphi(0) = 0, \qquad f(0) = 0],$$

$$a = 0, \qquad m \geqq 2, \qquad a \geqq 1, \qquad p \geqq m;$$

on suppose de plus

$$h \geqq n - 1, \qquad \frac{n-1}{m-1} > n - 2,$$

ce qui a toujours lieu pour $n = 2$; on peut supposer $a = \varepsilon = \pm 1$; en posant $z = \frac{y^{1-m}}{1-m}$, on met (2) sous la forme

$$(3) \qquad x^n \frac{dz}{dx} = \varepsilon + zf(x, y)$$

et l'on forme la suite d'approximations, définie par

$$(A) \qquad x^n \frac{dz_k}{dx} = \varepsilon + z_k f(x, y_{k-1}) \qquad \text{ou} \qquad z_k = \frac{y_k^{1-m}}{1-m}$$

et des valeurs initiales $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Si x_0 est suffisamment petit et si le point (x_0, y_0) est situé entre la partie positive de l'axe des k et une certaine courbe (C), la caractéristique passant par le point (x_0, y_0) est donnée par la suite convergente (A).

L'équation de la courbe C, mentionnée plus haut est

$$(m-1)y^{m-1} - (n-1)x^{n-1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad h > n - 1,$$

$$(m-1)y^{m-1} - (n-1)x^{n-1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad h = n - 1.$$

Krygowski (*Z.*). — Sur le développement des fonctions hyperelliptiques en séries trigonométriques. (En français, p. 153-187.)

(Suite au Mémoire commencé t. XIX, p. 26-61).

Broniewski (*W.*). — Sur la formule de Helmholtz, relative à la force électromotrice d'une pile. (En polonais, p. 189-192.)

Mémoire de Physique expérimentale.

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes engendrés par deux opérateurs s_1 et s_2, qui satisfont à la condition $s_1 s_2 = s_2^{-1} s_1^n$. (En anglais, p. 193-197.)

Les cas remarquables sont $n = -1$ et $n = -3$; dans le premier cas, le groupe est cyclique; dans le second, il peut être considéré comme engendré par deux opérateurs, qui satisfont à certaines conditions plus simples que celle de l'énoncé de la question (le transformé de l'un est l'inverse de l'autre, ou bien on a une circonstance analogue, plus longue à énoncer).

Gorczynski (*W.*). — Sur l'influence de l'enveloppe de verre dans les indications de thermomètres de radiation et sur la modification de la formule fondamentale pour l'actinomètre du système Angström-Chwolson. (En polonais, p. 199-214.)

Mémoire de Physique expérimentale.

Sierpinski (*W.*). — Sur les développements systématiques des nombres en produits infinis. (En polonais, p. 215-234.)

Parmi tous les développements possibles d'un nombre en produit infini, il y en a toujours un particulièrement remarquable par la simplicité de sa formation et la rapidité de sa convergence.

Si $\chi > 1$, on détermine le plus petit entier k_1 qui vérifie l'inégalité

$$\chi > 1 + \frac{1}{k_1};$$

on pose

$$\chi = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\chi_1$$

et l'on détermine le plus petit entier k_2, qui vérifie l'inégalité $\chi_1 > 1 + \frac{1}{k_2}$, etc. On a

$$\chi = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k_i}\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que χ soit commensurable est $k_{m+1} = k_m^2$ pour toutes les valeurs de m, à partir d'une suffisamment grande.

Tome XXI, 1910.

Sierpinski (*W.*). — Sur une propriété caractéristique des nombres rationnels. (En polonais, p. 1-6.)

On appelle r_k la différence entre $k\lambda$ et le plus grand entier $\leqq kx$; alors la condition nécessaire et suffisante pour que λ soit rationnel est

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{1}{2}.$$

Lichtenstein (*Léon*). — Sur quelques applications de la théorie des équations intégrales linéaires. (En polonais, p. 7-16.)

Le *procédé alterné* par lequel Schwarz résolvait le problème de Dirichlet peut être rattaché à la solution d'une équation de Fredholm dans le cas classique, à un système d'équations intégrales linéaires de seconde espèce dans tous les cas. On peut affirmer l'existence et l'unicité des solutions de ces équations, car les équations sans second membre correspondent aux données identiquement nulles et, dans tous les problèmes auxquels on appliquait *le procédé alterné*, on démontrait d'avance que, pour les données identiquement nulles, il n'y a pas de solution autre que zéro. Cependant, quand on présente la méthode sous la forme indiquée dans cette Communication, il n'est nullement nécessaire de la restreindre aux problèmes de cette nature. Quand on est arrivé au système des équations intégrales, on peut le discuter d'après la théorie générale de Fredholm. L'unicité nécessaire de la solution ne se présente pas dans beaucoup de cas intéressants. Il suffit de modifier quelque peu le problème que Schwarz résolvait dans la lettre à F. Klein (*Mathematische Annalen*, t. XXI) pour avoir un exemple, où l'ancien aspect de la méthode est inapplicable et le nouveau permet la discussion complète.

M. Picard appliquait *le procédé alterné* aux équations elliptiques plus générales que celle de Laplace, mais toujours au type d'équations pour lequel il y a l'unicité du problème de Dirichlet. L'auteur de cette Communication a démontré (dans un travail qui n'avait pas encore paru en 1910) qu'en imposant certaines conditions de régularité aux coefficients d'une équation elliptique, on peut affirmer l'unicite de sa solution déterminée par les valeurs qu'elle prend sur un contour limitant une région simplement connexe, comprise tout entière à l'intérieur d'un cercle dont le rayon ne dépasse pas une certaine quantité. Le nouvel aspect du *procédé alterné* permet d'en déduire le résultat suivant :

C étant un domaine à connexion simple, ou multiple limité par un système de courbes à courbure continue et sans point commun ; une des deux alternatives se présente :

Ou bien l'équation considérée plus haut n'a qu'une intégrale continue, ainsi que ses dérivées, qui prend des valeurs données sur le contour de C.

Ou bien cette équation dépourvue de second membre (de terme tout connu) admet un nombre limité de solutions distinctes nulles sur le contour de C et non nulles identiquement.

Sierpinski (*W.*). — Une remarque sur le théorème de Riemann, relatif aux séries semi-convergentes. (En polonais, p. 17-20.)

On peut altérer arbitrairement la somme d'une série semi-convergente, en changeant l'ordre des termes et sans changer la fréquence relative des termes positifs et négatifs.

Guntz (*A.*) et *Broniewski* (*W.*). — Sur la résistance électrique des métaux alcalins, du gallium et du tellure. (En polonais, p. 21-36.)

Mémoire de Physique expérimentale.

Axer (*A.*). — Sur la fonction $\varphi(r)$ dans la théorie des idéaux. (En polonais, p. 37-41.)

$\varphi(r)$ étant le nombre des éléments non congruents d'un corps algébrique $C(\omega)$ de degré k, qui sont premiers à l'idéal r, il s'agit de trouver les fonctions analytiques $F(x)$ et $f(x)$ telles qu'on ait

$$\limsup_{Nr=\infty} \frac{\varphi(r)}{F(Nr)} = 1,$$

$$\liminf_{Nr=\infty} \frac{\varphi(r)}{f(Nr)} = 1.$$

Ce problème a été résolu par M. Landau pour le corps des nombres rationnels. Cette communication ne fait qu'appliquer au cas général la méthode de M. Landau, en la simplifiant en ce qui concerne la fonction f. On cherche tout d'abord la fonction qui représente asymptotiquement $\varphi(r_\lambda)$ (pour $\lambda = \infty$), r_λ étant le produit des λ premiers idéaux premiers (qui sont rangés par ordre de normes croissantes, en outre arbitrairement) et l'on trouve que c'est

$$\frac{Nr_\lambda}{\alpha e^c \log\log Nr_\lambda} \quad (^1).$$

Pour en déduire $f(x) = \dfrac{x}{\alpha e^c \log\log x}$, la méthode de M. Landau fait intervenir un calcul asymptotique de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$, que M. Axer remplace par un raisonnement direct très simple.

Stamm (*E.*). — Contribution à la théorie des relations et des opérations. (En allemand, p. 42-54.)

Soit B un domaine d'éléments quelconques; étant donnée une opération O, qui, à deux éléments de B, fait correspondre un élément de B et un seul, on peut définir une relation R entre deux éléments en écrivant $a R b$ (a est en relation avec b) toutes les fois où a est le résultat d'opérations O effectuées sur b et un x quelconque de B. L'auteur cherche à déduire les propriétés de R de celles de O. Il fait ensuite des hypothèses particulières sur O, en la supposant commutative, ou associative, etc., et montre qu'à ces propriétés correspondent la transivité, la symétrie, etc. de R. Comme exemple, on prend la multiplication pour O, l'ensemble des nombres entiers pour B, alors R est la divisibilité.

L'auteur donne aussi l'énoncé précis du problème inverse.

---

(1) α-une certaine constante qui ne dépend que du corps considéré, c-constante d'Euler.

Rosenblatt (*A.*). — Règle de Lagrange dans le problème des isopérimètres pour les intégrales simples. (En polonais, p. 55-60.)

L'auteur étudie de près les conditions nécessaires d'extremum lié d'une fonction de plusieurs variables. Il les applique aux problèmes de calcul de variations, au cas des *champs singuliers*. Il donne ensuite un exemple où la règle de Lagrange tombe en défaut.

Les résultats essentiels de cette étude ont paru aussi dans *Mathematische Annalen* (t. LXVIII).

Miller (*A. G.*). — Sur les groupes engendrés par deux groupes conjugués. (En anglais, p. 61-64.)

L'auteur reprend les résultats de M. E. Maillet (Grand Prix de 1896. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, 1902), en les précisant un peu et en donnant des démonstrations plus simples.

Axer (*A.*). — Une contribution à l'étude des fonctions de la théorie des nombres $\mu(n)$ et $\lambda(n)$ [1]. (En allemand, p. 65-95.)

Les théorèmes

$$\text{(I)} \qquad \lim_{x=\infty}\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x}\mu(n)\right]=0.$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0.$$

$$\text{(III)} \qquad \lim_{x=\infty}\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x}\lambda(n)\right]=0.$$

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n}=0$$

sont des conséquences du théorème fondamental sur la distribution des nombres premiers

$$(1) \qquad \lim_{x=\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}}=1$$

[$\pi(x)$-le nombre des nombres premiers $<x$]. La Communication présente établit l'équivalence entre (I) et (II), (III) et (IV); on peut déduire non seulement I de II et III de IV, mais inversement II découle de I et IV de III sans nouvelle intervention de (1).

---

[1] Soit $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers de n, les facteurs multiples étant comptés plusieurs fois; par définition $\lambda(1)=1$, $\lambda(n)=(-1)^{\omega(n)}$, $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$, si n est divisible par un nombre carré; $\mu(n)=(-1)^{\omega(n)}$, si n ne contient que des facteurs premiers différents.

Les deux premières déductions sont bien connues: les deux dernières s'opèrent par le théorème suivant :

Si, quel que soit x, $\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x}|f(n)|$ est borné, et si

$$\lim_{x=\infty}\frac{\sum_{n=1}^{x}f(n)}{x}=0,$$

on a

$$\lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x}\left|\sqrt[r]{\frac{x}{n}}-\left(\sqrt[r]{\frac{x}{n}}\right)\right|f(n)=0$$

$\{[a]$-le plus grand entier $\leqq a\}$.

Le théorème est démontré d'abord pour r entier, ensuite pour r quelconque, pour déduire II de I, il suffit de prendre $r=1$ et tenir compte de

$$\sum_{n=1}^{x}\left(\frac{x}{n}\right)\mu(n)=1.$$

Tout ce qui précède s'étend à un corps algébrique quelconque de degré k.

Landau (*E.*). — Sur la portée de quelques théorèmes nouveaux de MM. Hardy et Axer relatifs aux valeurs limites. (En allemand, p. 97-177.)

Quelques théorèmes généraux sur les valeurs limites permettent de relier par des raisonnements élémentaires certaines propositions importantes de la théorie des nombres. En particulier, ils permettent d'établir l'équivalence de deux théorèmes de MM. Hadamard et de la Vallée-Poussin

$$(1)\qquad \lim_{x=\infty}\left(\frac{1}{x}\sum_{p<x}\log p-1\right)=0.$$

$$(2)\qquad \lim_{x=\infty}\left(\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}-\log x\right)=E.$$

(p-nombre premier, E-une certaine constante numérique).

On sait déduire (1) de (2) par des moyens simples (transformation d'Abel). M. de la Vallée-Poussin a déduit (1) de la proposition

$$(3)\qquad \lim_{x=\infty}\left\{\frac{1}{x}\left[x\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}-\sum_{p\leqq x}\log p-x\log x-(E-1)x\right]\right\}=0$$

et M. Hadamard de la proposition

$$(4)\qquad \lim_{x=\infty}\left(\frac{1}{x}\sum_{p\leqq x}\log p\log\frac{x}{p}\right)=1.$$

ces passages de (3) à (1) et de (4) à (1) sont équivalents en substance à deux théorèmes généraux sur les valeurs limites. Sur les raisonnements de M. de la Vallée-Poussin on peut fonder le théorème de M. Hardy; sur ceux de M. Hadamard, celui de M. Landau. L'énoncé primitif de M. Hardy est le suivant :

Les a_n ($n = 1, 2, \ldots$) étant des quantités réelles, formant une suite sommable d'ordre 1, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, pourvu que $|na_n|$ soit borné.

Dans cette Communication, l'auteur étend notablement l'énoncé précédent, en y remplaçant la condition *sommable d'ordre* 1 par *sommable d'un ordre fini quelconque* (d'après Cesaro), et la condition $|na_n|$ *borné* par $na_n > -c$ (en désignant par c une constante quelconque).

Pour démontrer ce théorème l'auteur se sert du lemme suivant :

Si $R(n)$ croît avec n et si

$$\lim_{m=\infty}\left[\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\frac{R(n)}{n}\right] = g,$$

alors

$$\lim_{m=\infty}\frac{R(m)}{m}$$

existe et égale g.

Ce lemme ressemble beaucoup au théorème de M. Landau (*Handbuch*) : si

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x} = 1,$$

si $f'(x)$ existe partout et si $xf'(x)$ augmente avec x, $\lim_{x=\infty} f'(x)$ existe et est égale à 1.

Dans cet énoncé on peut, en des points isolés, remplacer $f'(x)$ par *la dérivée à droite*

$$\lim_{\substack{h>0\\ h=0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Les deux propositions précedentes peuvent être embrassées dans un seul énoncé :

Si $xF(x)$ croît avec x et si

$$\lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x_r} F(u)\,du = g,$$

alors $\lim_{x=\infty} F(x)$ existe et est égale à g.

On peut généraliser ce théorème en remplaçant $\frac{1}{x}\int_1^x F(u)\,du$ par

$$\frac{1}{x}\int_1^x \frac{dx_1}{x_1}\int_1^{x_2}\frac{dx_2}{x_2}\cdots\int_1^{x_{r-1}} F(x_r)\,dx_r$$

et, si $r = 1$, la condition $xF(x)$ *croît avec* x, par $\varphi(x)\,F(x)$ *croît avec* x, $\varphi(x)$ étant une fonction quelconque parmi celles qui remplissent la condition

$$\lim_{\delta=0}\ \limsup_{x=\infty}\frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)} = 1.$$

Par son origine même, le théorème de M. Hardy donne un passage simple de (3) à (1) : il suffit de prendre $a_n = \frac{\log n - 1}{n}$, si n est un nombre premier et $a_n = -\frac{1}{n}$ dans les autres cas.

Encore plus simplement on passe de (5) à (1) par le théorème de M. Landau : il suffit de tenir compte de la formule

$$\sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} = \int_1^x \left(\frac{1}{u} \sum_{p \leq u} \log p \right) du.$$

Ce passage peut être opéré aussi par le théorème de M. Hardy : on prendra

$$a_n = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$$

ou

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{x} \left(\sum_{p \leq x} \log p - x \right)$$

et l'on transformera en tenant compte de ce que $\varepsilon(x)$ est borné.

Le passage de (1) à (2) est fourni par le théorème de M. Axer (la démonstration de M. Axer paraît dans le même Volume des *Prace matematyczno-fizyczne* que celle de M. Landau) :

$f(r)$ étant une fonction de la théorie des nombres, ou de la théorie des idéaux d'un corps algébrique quelconque de degré K, telle que

$$\lim_{x=\infty} \sum_{Nr \leq x} f(r) = 0$$

et que

$$\frac{1}{x} \sum_{Nr \leq x} |f(r)|$$

soit borné quel que soit x, r étant un nombre réel quelconque > 0, on a

$$\lim_{x=\infty} \sum_{Nr \leq x} f(r) \varphi_r(x, Nr) = 0.$$

[par définition

$$\varphi_r(x, n) = \alpha \sqrt[r]{\frac{x}{n}} - E\left(\sqrt[r]{\frac{x}{n}}\right),$$

où α est une certaine constante qui ne dépend que du corps considéré et égale 1 pour le corps des nombres rationnels $E(x)$ — le nombre des idéaux du corps, dont la norme ne dépasse pas x pour le corps des nombres rationnels $E(x) = [x]$ (le plus grand entier $\leq x$)].

Pour opérer le passage de (1) à (2), il suffit d'appliquer le cas le plus simple du théorème : celui, évidemment, du corps des nombres rationnels et de $r = 1$. On prend $f(n) = \log p - 1$ si n est une puissance exacte d'un nombre premier p, $f(n) = -1$ dans les autres cas.

Le théorème de M. Axer est susceptible de beaucoup d'autres applications

importantes et, en particulier, pour établir l'équivalence de l'assertion que $\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x}\mu(n)$ pour $x=\infty$ converge vers o et de l'affirmation que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}$ converge. Cette proposition et sa correspondante dans la théorie des idéaux ont été démontrées pour la première fois par M. Axer lui-même, dans le Mémoire mentionné plus haut.

Dans ces questions il est utile d'appliquer le corollaire du théorème de M. Axer :

Quand on a deux classes distinctes de nombres : les n_1, et les n_2, et si, $\rho_1(x)$ et $\rho_2(x)$ désignant respectivement les nombres des n_1 et des $n_2 \leqq x$, on a

$$\lim_{x=\infty}\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}=1,$$

alors

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{n_1\leqq x}\frac{1}{n_1}-\sum_{n_2\leqq x}\frac{1}{n_2}\right)$$

existe pourvu qu'il existe

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{1}{x}\left[\sum_{n_1\leqq x}\mathrm{E}\left(\frac{x}{n_1}\right)-\sum_{n_2\leqq x}\mathrm{E}\left(\frac{x}{n_2}\right)\right]\right\},$$

et ces deux limites sont égales.

Pour la preuve de l'équivalence de deux propositions mentionnées sur la fonction μ et surtout pour son extension dans la théorie des idéaux d'un corps algébrique quelconque, on peut se servir d'un théorème de M. Riesz, qui a un caractère moins élémentaire que les propositions de MM. Axer, Hardy et Landau.

Ce théorème se rattache au résultat suivant, dû à M. Fatou : si $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ et si la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est régulière pour $x=1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et n'est que son extension pour les séries de Lejeune-Dirichlet.

Si

$$\lim_{n=0}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=0$$

et si la fonction

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

est régulière pour $s=1$, la série $\sum\frac{a_n}{n}$ converge.

Comme application simple de ce théorème, on peut indiquer encore la preuve de convergence de la série

$$\sum_p\frac{\chi(p)}{p},$$

(χ était un caractère modulo k différent du caractère principal), qui résulte

des identités

$$\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)}{m p^{ms}} = \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s} + F(s)$$

[$F(s)$, série de Lejeune-Dirichlet convergente pour $R(s) > \frac{1}{2}$] et de ce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \neq 0.$$

Pour compléter cette énumération de théorèmes sur les valeurs limites, l'auteur rappelle que les théorèmes (1) et

$$(5) \qquad \lim_{x=\infty} \left[\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \right] = 0,$$

ainsi que leurs généralisations pour les corps algébriques quelconques, ont été déduits, par lui, de son théorème ainsi conçu (*Handbuch*) :

Si la fonction

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad (s = \sigma + ti)$$

définie par une série de Dirichlet convergente pour $\sigma > 1$ et à coefficients $\geqq 0$ est régulière pour $\sigma = 1$, sauf peut-être le point $s = 1$ et, si $f(s) - \frac{g}{s-1}$ est régulier même dans ce point (pour g convenable). Si, de plus, pour λ convenable et $\sigma \geqq 1$, $\frac{f(s)}{t^\lambda}$ est uniformément borné, on a

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} a_n \right) = g.$$

Dans la présente Communication, en profitant d'une remarque de M. Weyl, l'auteur généralise son théorème; il arrive à y remplacer la condition de régularité de $f(s) - \frac{g}{s-1}$ par l'existence de

$$\lim_{\sigma=1} \left[f(\sigma + ti) - \frac{g}{\sigma - 1 + ti} \right]$$

atteinte uniformément dans tout intervalle fini pour t.

Arctowski (*H.*). — La dynamique des anomalies climatiques. (En français, 179-196.)

Mémoire de Météorologie.

Sierpinski (*W.*). — Remarque relative à mon article sur les développements systématiques de nombres en produits infinis. (En polonais, p. 197-198.)

Dans son Mémoire publié dans les *Prace mat.-fiz.* (t. XX, p. 215-234), l'auteur présentait quelques résultats, comme des propositions publiées pour la première fois. Dans la Note présente, il rectifie son assertion en ce que les questions analogues ont été traitées par M. G. Cantor en 1869 et par M. Gegenbauer en 1892, du reste par des méthodes toutes différentes.

A. RAJCHMAN et H. LAUER.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI.

5e série, *Rendiconti.*

Tome VII; année 1898, 1er semestre (1).

Tacchini (*P.*). — [U] Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège Romain pendant le 4e trimestre de 1897 (3-4).

Berzolari (*L.*). — [Q 2 ref. O 5*f*] Encore sur l'extension des théorèmes d'Euler et de Meusnier aux hyperespaces (4-6).

Voir la Note du Tome VI, 2e semestre, p. 283. Ici, l'auteur fait une nouvelle extension qui consiste à considérer la courbure des sections faites dans une variété de S_n par des espaces linéaires quelconques, au lieu de celles faites par des hyperplans comme dans la Note précédente.

Banal (*R.*). — [C 4*d* ref. Q 2] Sur les espaces à courbure constante (7-15).

Suite du travail inséré au Tome VI, 2e semestre, p. 357.

L'espace de Ricci, dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = d\alpha^2 + \frac{1}{c^2}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\chi^2),$$

a la courbure totale nulle, et constantes et égales entre elles les deux courbures principales différentes de zéro. Il est déformable, et le problème de déterminer toutes les variétés applicables sur cet espace équivaut analytiquement au problème de la déformation de la sphère. Toute seconde forme fondamentale d'une sphère de rayon donné est aussi seconde forme fondamentale de l'espace de Ricci de rayon égal, et réciproquement.

Les variétés, plus générales, dont l'élément linéaire a la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + k_1^2\,\beta^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\chi^2),$$

(1) Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XXXVII$_2$, p. 16.

ont aussi la courbure totale nulle et en tous points, égales entre elles les deux courbures différentes de zéro. Elles sont déformables, et le problème de leur déformation coïncide avec le problème de la déformation de la sphère.

Bortolotti (*E.*). — [J 4*g* ref. H 11] Sur le théorème de multiplication des opérations fonctionnelles distributives à détermination unique (16-21).

La règle de multiplication pour l'opération A, exprimée en général par

$$A(\varphi\psi) = \sum_{r=0}^{p} \sum_{s=0}^{r} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=0}^{n} a_{r,s}^{p,n,m} \varphi^{r-s} \psi^{n-m} \overline{A(\varphi)}^{s} \overline{A(\psi)}^{m},$$

en posant $A(1) = \xi$ et en introduisant successivement les hypothèses

$$A(\varphi\psi) = A(\psi\varphi),$$
$$A(m\varphi) = m A(\varphi),$$

se réduit à la forme

$$(1) \quad A(\varphi\psi) = \left[\varphi - \frac{1}{\xi} A(\varphi)\right]\left[\psi - \frac{1}{\xi} A(\psi)\right]$$
$$\times \{\alpha_0 + \alpha_{1,0}(\varphi + \psi) + \alpha_{11}[A(\varphi) + A(\psi)] + \alpha_{2,1}\varphi\psi + \ldots\} + \frac{1}{\xi} A(\varphi) A(\psi),$$

et, dans le cas où

$$A(1) = \xi = 0,$$

à la forme

$$(2) \quad A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + A(\varphi) A(\psi)$$
$$\times \{a_{1,1}^{1,1} + a_{1,1}^{2,1}(\varphi + \psi) + a_{1,1}^{2,2}[A(\varphi) + A(\psi)] + a_{1,1}^{3,2}\varphi\psi + \ldots\}.$$

Dans l'une ou l'autre de ces deux formes rentrent les multiplications des opérations connues; par exemple, dans la forme (2), rentre la règle

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + A(\varphi) A(\psi)$$

appartenant à la différentiation finie

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x).$$

Burgatti (*P.*). — [H 7*e*] Sur la transformation des équations différentielles du deuxième ordre à deux variables indépendantes (21-27).

Supposons qu'une équation donnée

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

soit transformée par une convenable transformation de contact en une autre

$$(1) \qquad \varphi(x, y, p, r, s, t) = 0,$$

où ne figure plus le couple z, q. La dérivation donne

$$(2)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0,$$

et, en éliminant t entre (1) et (2), on a

$$(3)\qquad A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + N = 0.$$

Si l'on connaît l'intégrale z de (1), celle de (3) est

$$p = \frac{\partial z}{\partial x};$$

réciproquement, en connaissant l'intégrale p de (3), on tire t de (1) et l'on a

$$q = \int\left(\frac{\partial p}{\partial y}\,dx + t\,dy\right),$$

et ensuite on trouve z par des quadratures.

Cette méthode est appliquée par l'auteur à des équations particulières remarquables. Par exemple, pour l'équation

$$z + \varphi(r, s) = 0,$$

la dérivation par rapport à x donne, en posant $p = z'$, l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q'}s' + \frac{\partial\varphi}{\partial p'}r' + z' = 0,$$

dont les caractéristiques sont définies par les deux systèmes

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial q'}\,dx - \frac{\partial\varphi}{\partial p'}\,dy &= 0,\\ z'\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p'}\,dp' &= 0,\\ dz' - p'\,dx - q'\,dy &= 0;\end{aligned}\right.$$

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} dy &= 0,\\ z'\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial q'}\,dq' + \frac{\partial\varphi}{\partial p'}\,dp' &= 0,\\ dz' - p'\,dx - q'\,dy &= 0.\end{aligned}\right.$$

Le système (b) admet l'intégrale $y = \text{const}$, quel que soit φ; le système (a) n'en a pas en général. En éliminant dx et dy entre les équations (a), on a

$$z'\,dz' + \left(p'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} - q'\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\right)dp' = 0;$$

on peut intégrer lorsque

$$p'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} - q'\frac{\partial\varphi}{\partial q'} = F(p');$$

cette condition entraîne

$$\varphi = \psi_1(p') + \psi_2(p'q')$$

et, par conséquent, les équations

$$z = \psi_1(r) + \psi_2(rs)$$

peuvent se transformer en d'autres ayant deux intégrales premières avec une constante arbitraire et appartenant à des caractéristiques différentes.

En appliquant la même méthode à l'équation

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

on retrouve les transformations de Laplace et de Lewy.

Pour l'équation

$$ar + 2bs + ct + lp + ma + nz = 0,$$

où $b^2 - ac \gtrless 0$, qui, par une transformation du groupe

$$\xi = x, \qquad \eta = \eta(x, y), \qquad z_1 = \lambda(x, y)z,$$

se réduit à

$$a_1 r_1 + 2b_1 s_1 + l_1 p_1 + n_1 z_1 = 0,$$

la même méthode conduit à la transformation de Laplace, généralisée par Legendre. Si, de la même équation, on connaît deux solutions particulières, une transformation de la fonction et de la variable, suivie de l'application de la même méthode n fois de suite, conduit à une équation de même forme, ayant pour intégrale une expression linéaire par rapport à z et à ses dérivées jusqu'à l'ordre n, qui s'annule pour $2n$ solutions particulières de l'équation primitive. On retrouve ainsi les transformées étudiées par Darboux, Liouville et Nicoletti.

Enfin l'auteur indique une transformée intégrale, qui est une généralisation de celle d'Imtschenesky.

Bordiga (*G.*). — [N_2 1] Sur la classification des congruences (28-31).

Pour les congruences de l'espace ordinaire, cette classification au moyen de l'*ordre*, de la *classe* et du *rang* a été faite par Schumacher (*Math. Ann.*, t. XXXVII, p. 100), par une méthode fondée sur la représentation de l'espace réglé sur un espace linéaire de quatre dimensions. L'auteur obtient les mêmes résultats en se fondant sur les propriétés des courbes algébriques.

Bortolotti (*E.*). — [B 1 *c* ref. H 11] Sur la généralisation de la propriété du déterminant wronskien (49-50).

Si l'on indique par $A^{(r)}(\varphi)$ le résultat de l'application successive r fois répétée de l'opération distributive A, la condition que le déterminant

$$[A^{(r)}(\varphi_s)] \qquad (r, s = 0, 1, \ldots, n-1)$$

soit nul est nécessaire et suffisante pour que, entre les fonctions analytiques

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, ayant un champ commun de convergence, il y ait une relation linéaire homogène

$$\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s \varphi_s = 0,$$

dont les coefficients sont constants par rapport à l'opération A.

Tacchini (*P.*). — [U] Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège Romain pendant le quatrième trimestre de 1897 (59-60).

Bagnera (*G.*). — [J 4*a*] Sur les diviseurs normaux d'indice premier d'un groupe fini (63-67).

Lorsqu'un groupe G a r diviseurs normaux d'indice premier p, $G_1, \ldots, G_r$, le sous-groupe commun à ces r groupes a en G un indice qui est un diviseur de p^r, c'est-à-dire qui est p^λ avec $1 \leqq \lambda \leqq r$. Les diviseurs $G_1, \ldots, G_r$ sont appelés *indépendants* s'il est $\lambda = r$. T étant le sous-groupe commun à $G, \ldots, G_r$, supposés indépendants et d'indice p, le groupe $\frac{G}{T}$, complémentaire de T en G, qui est du degré p^r, a tous les éléments du degré p. Ce groupe $\frac{G}{T}$ est abélien. Tout diviseur normal de G d'indice p contient T, et le groupe complémentaire de T dans ce diviseur est un sous-groupe de $\frac{G}{T}$ du degré $p-1$; la recherche du nombre des diviseurs de G dépend de celle des diviseurs d'un groupe abélien de degré p^r ayant tous ses invariants égaux à p, et l'auteur trouve que le nombre cherché est

$$\frac{p^r - 1}{p - 1}.$$

Enfin, il applique les résultats obtenus à la composition d'un groupe P, dont le degré est p^k, p étant premier. Il est possible de construire une série de composition de P,

$$P, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{k-1},$$

telle que tout groupe de la série soit diviseur normal de tous les précédents (*série canonique* de composition).

Veronese (*G.*). — [J 5] Segments et nombres transfinis (79-87).

Réponse aux observations de M. Schœnfliess (t. VI de ces *Rendiconti*, 2e sem., p. 362).

Levi-Civita (*T.*). — [J 5] Sur les nombres transfinis (91-96, 113-121).

Construction d'un système de nombres finis, infiniment petits et infinis, pour lequel les lois ordinaires de l'arithmétique conservent leur validité. Dans un

travail inséré dans les *Atti dell' Istituto Veneto*, 1893, l'auteur avait construit un tel système, qui toutefois ne contenait pas tout le système de M. Veronese. Ce dernier système peut se faire rentrer dans celui qu'il construit dans ces Notes.

Levi (*B.*). — [M 1 *b* ref. P 4] Sur la transformation d'une courbe algébrique en une autre dépourvue de points multiples (111-113).

Manière d'arriver au résultat par des transformations birationnelles de l'espace.

Medolaghi (*P.*). — [J 4 *f*] Sur la forme des invariants différentiaux (145-149).

Dans les *Annali di Matematica*, 1897, l'auteur a démontré que les équations définissant les transformations finies d'un groupe continu ont la forme

$$\mathrm{I}_k\left[\varpi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varpi_m(y_1, \ldots, y_n), \frac{\partial q_1}{\partial x_1}, \ldots\right] = \varpi_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Les $\varpi_1, \ldots, \varpi_m$ sont les *fonctions* caractéristiques du groupe. Les équations

$$\mathrm{I}_k(z_1, \ldots, z_m; a_{11}, \ldots) = z_k^n \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

obtenues en changeant la signification des quantités qui y sont renfermées sont les équations finies d'un groupe dont la composition γ_{sn} ne dépend que du nombre n des variables et de l'ordre s des équations de définition. Dans cette Note, l'auteur démontre que, dans les invariants différentiaux d'un groupe continu, les variables dépendantes et indépendantes entrent seulement dans les fonctions caractéristiques. En changeant ces fonctions, on passe aux invariants différentiaux de tous les groupes semblables. En considérant comme arguments les dérivées et les fonctions caractéristiques, on obtient les invariants différentiaux (d'ordre zéro) de groupes intransitifs avec la composition γ_{sn}.

Pincherle (*S.*). — [H 11] Sur une extension de la notion de divisibilité par un polynome (185-183).

Soit A une opération définie par les relations

$$\mathrm{A}(x^n) = x^n(1 + a_{n,1}x + \ldots + a_{n,p-1}x^{p-1} + x^p)$$

où

$$\lim_{n=0} a_{n,i} = a_i;$$

si ζ est le plus grand module des racines de

$$1 + a_1 y + \ldots + a_{p-1} y^{p-1} + y^p = 0,$$

et si l'on appelle S l'ensemble des séries de puissances de x convergentes dans un cercle de rayon $> \zeta$, l'opération A^{-1} appliquée aux séries S produit des fonctions ayant en général des singularités dans le cercle. Elle produit des fonctions qui n'ont pas de singularités dans le cercle lorsque, pour la série $\Sigma g_n x^n$ à laquelle l'opération est appliquée, on a

$$\Sigma g_n \mathrm{C}(n) = 0.$$

$C(n)$ étant l'intégrale générale de l'équation linéaire aux différences

$$C(n) + a_{n,1} C(n+1) + \ldots + a_{n,p-1} C(n+p-1) + C(n+p) = 0.$$

Lorsque $a_{n,i}$ est $(= a_i)$ indépendant de n, cette condition coïncide avec la divisibilité par

$$1 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + x^p.$$

En supposant que les $a_{n,i}$ soient des fonctions rationnelles de n, on a des propriétés relatives aux équations différentielles linéaires.

Vivanti (*G.*). — [B 1 *c*] Sur le déterminant wronskien (194-197).

Autre démonstration du théorème démontré par M. Peano dans le Tome VI, 1er semestre, p. 413, faite sans avoir recours aux méthodes de Grassmann.

Straneo (*P.*). — [T 4 *c* ref. T 7 *a*] Sur la détermination simultanée des conductibilités thermique et électrique des métaux à différentes températures (197-202).

Pincherle (*S.*). — [H 12 *b*] Sur la résolution approchée des équations aux différences (230-234).

Pour une équation aux différences

$$F(\varphi) = \varphi(x+n) + \alpha_1(x)\varphi(x+n-1) + \ldots + \alpha_{n-1}(x)\varphi(x+1) + \alpha_n(x)\varphi(x) = 0.$$

soit $\omega_1, \ldots, \omega_n$ un système fondamental d'intégrales. Les intégrales $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de l'équation *adjointe*

$$F_1(\varphi) = \alpha_n(x+n)\varphi(x+n) + \alpha_{n-1}(x+n-1)\varphi(x+n-1) + \ldots$$
$$+ \alpha_1(n+1)\varphi(n+1) + \varphi(n) = 0$$

sont les multiplicateurs pour lesquels on a

$$\mu_i F = \Delta G_i,$$

les G_i étant des formes linéaires aux différences de l'ordre $n-1$. Cela a été démontré dans un travail de M. Bortolotti (ces *Rendiconti*, t. V, 1er semestre, p. 349). On en déduit

$$\begin{aligned} G_i(\omega) &= 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k, \\ &= 1 \quad \text{pour} \quad i = k, \\ &(i, k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

et l'on a la formule d'interpolation

$$P(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i G_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Delta^{-1} \mu_i F(\varphi)$$

pour déterminer la forme $P(\varphi)$ de l'ordre $n-1$ qui, pour $\varphi = \omega_i$, devient $= \beta_i$.

En changeant F en son inverse F^{-1} et en prenant $P = 1$, on obtient

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta^{-1} \mu_i \varphi;$$

d'où, ayant posé $\theta\varphi(x) = \varphi(x+1)$, et en observant que l'on a

$$\Delta^{-1}\varphi = -\varphi - \theta\varphi - \theta^2\varphi - \ldots - \theta^\nu\varphi - \ldots,$$

on obtient

$$F^{-1}\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \theta^\nu \mu_i \theta^\nu \varphi.$$

Le coefficient de $\theta^\nu\varphi$ dans ce développement, c'est-à-dire

$$\lambda_\nu = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \theta^\nu \mu_i,$$

est invariant lorsqu'on remplace les ω par un autre système d'intégrales fondamentales de F, et les μ par le système correspondant des multiplicateurs ; par conséquent, suivant un théorème de M. Appell (*Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 2e série, t. X, 1881), les λ peuvent s'exprimer rationnellement par les coefficients α et par les $\theta\alpha$, $\theta^2\alpha$, ... Or, comme on démontre que

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \frac{\omega_1}{\theta\omega_1},$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots$, étant un système d'intégrales pour lesquelles les multiplicateurs satisfont à certaines conditions, on a, pour ν suffisamment grand, l'expression

$$\frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}},$$

que l'on peut calculer; celle-ci donne le moyen de trouver, par approximation, l'intégrale ω_1 par une équation aux différences du premier ordre.

Enriques (*F.*). — [$M_2$8] Sur les plans doubles de genre linéaire $p^{(1)} = 1$ (234-240).

La courbe de diramation $f(x, y) = 0$ est supposée ne pas contenir de parties multiples. Étant P le bigenre, l'auteur fait la classification des plans doubles pour lesquels

$$p^{(1)} = 1 \qquad \text{et} \qquad P > 1.$$

On en a deux classes :

I. Plans doubles à courbe de diramation d'ordre $2n$ ($n > 3$), ayant un point $(2n-4)$-uple ou $(2n-3)$-uple.

II. Plans doubles dont la courbe de diramation se compose de r courbes d'ordre $3s$ ayant neuf points s-uples en commun (faisceau d'Halphen), et éventuellement (pour r et s impairs et $s > 1$), de la cubique passant par les neuf points.

Chaque classe comprend plusieurs cas subordonnés.

Vivanti (*G.*). — [D 1 *d*] Observations sur les maxima et les minima des fonctions de deux variables (240-241).

On sait qu'une fonction $f(x, y)$ peut avoir en (a, b) un minimum par rapport aux valeurs qu'elle prend sur toute droite passant par ce point, sans y avoir un vrai minimum [par rapport à toutes les valeurs dans les points voisins de (a, b)]. L'auteur démontre que ce fait ne peut se présenter lorsqu'au lieu de toutes les droites, on considère toutes les *lignes* passant par (a, b).

Tacchini (*P.*). — [U] Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège Romain pendant le premier trimestre de 1898 (251-252).

Millosevich (*E.*). — [U] Observations de la nouvelle comète Perrine (1898, mars 19) (252-253).

Bortolotti (*E.*). — [H 12] Les formes linéaires aux différences, équivalentes à leurs adjointes (257-265).

Note faisant suite à celle du Tome V (1896, 1er semestre, p. 349). *Équivalentes* veut dire que ces formes admettent un même système d'intégrales fondamentales. θ étant le symbole d'opération dont les puissances positives et négatives entrent dans les formes considérées, entre les résultats trouvés par l'auteur, citons les suivants :

Si y_1 est une intégrale d'une forme linéaire $A(y)$ d'ordre n, équivalente à son inverse $\overline{A}(y)$, $\theta^n y_1$ en est aussi une intégrale. Les formes $A(y)$ et $\theta^n \overline{A}(y)$ ne peuvent différer que par un facteur constant.

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

étant un système fondamental [commun aux formes $A(y)$ et $\overline{A}(y)$], tous les déterminants de la matrice

$$\begin{matrix} y_1, & \theta y_1, & \ldots, & \theta^n y_1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ y_n, & \theta y_n, & \ldots, & \theta^n y_n \end{matrix}$$

sont invariants pour l'opération θ^n.

Voir aussi une autre Note dans le 2e semestre, p. 46.

Fano (*G.*). — [J 4 *f*] Sur certains groupes continus imprimitifs de transformations ponctuelles de l'espace (302-308).

Pour les groupes primitifs (et aussi pour certains groupes imprimitifs), les types auxquels ils peuvent se réduire par des transformations (quelconques) de l'espace ont été déterminés par Lie (*Theorie d. Transf. Gr.*, t. II, chap. VII, VIII). L'auteur et M. Enriques (*Annali di Mat.*, 2e série, t. XXVI, 1897; *Atti di Torino*, 1898, et *Memorie di Torino*) ont fait la classification des groupes de transformations crémoniennes dans l'espace en déterminant les types auxquels ils

peuvent se réduire *par des transformations* aussi *crémoniennes*. Ceux des types de Lie qui sont crémoniens doivent rentrer aussi dans les types de groupes crémoniens établis par l'auteur, mais ceux-ci peuvent en comprendre d'autres qu'on pourrait réduire à des types de Lie (crémoniens ou non) par des transformations non crémoniennes. Pour les groupes primitifs, l'auteur, dans son Mémoire publié dans les *Memorie di Torino* et ayant pour titre : *I gruppi di Jonquières generalizzati*, a démontré que les types trouvés par Lie se trouvent aussi entre les types crémoniens, et que ces derniers comprennent en outre le groupe ∞^6 des transformations conformes changeant une sphère en elle-même, qui, par une transformation (2, 1), peut se réduire au groupe de transformations projectives laissant fixe une quadrique.

Dans cette Note, l'auteur expose les résultats qu'il a obtenus relativement aux groupes crémoniens imprimitifs, et met ces résultats en relation avec la classification que Lie a faite pour certaines espèces de groupes imprimitifs.

Les cas considérés par Lie sont :

I. Groupes transformant en lui-même un système ∞^1 de surfaces et subordonnant un groupe primitif sur chacune des surfaces du système;

II. Groupes transformant en elle-même une congruence de lignes et opérant sur elle primitivement.

Pour le cas I, tous les types de Lie, au nombre de douze, exception faite pour deux, coïncident avec l'un ou l'autre des deux types suivants de transformations crémoniennes trouvés par l'auteur, ou avec un de leurs sous-groupes :

1. Groupe ∞^{11} des transformations quadratiques transformant en lui-même le système linéaire ∞^5 des quadriques passant par une droite fixe et par un point fixe.

2. Groupe ∞^{2n+9} des transformations de l'ordre $n(\geqq 1)$ changeant en lui-même le système linéaire ∞^{n+2} des cônes d'ordre n ayant une génératrice $(n-1)$-uple et, suivant celle-ci, les mêmes $n-1$ plans tangents.

Pour le cas II, les types de Lie (au nombre de 21) coïncident avec l'un ou l'autre des types crémoniens trouvés par l'auteur, ou avec un de leurs sous-groupes. Ce sont :

1. Le premier de ceux du cas précédent;

2. Groupe ∞^{11} des transformations cubiques changeant en lui-même le système ∞^1 de degré 6 des surfaces du 3e ordre passant par une cubique gauche et ayant un même point double sur cette courbe;

3. Groupe de dimension $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ des transformations d'ordre n, changeant en lui-même le système linéaire $\infty^{\frac{n+1)(n+2}{2}}$ des surfaces d'ordre n ayant un même point $(n-1)$-uple et un même cône tangent d'ordre $n-1$ en ce point.

Fano (*G.*). — [J 4*f*] Les transformations infinitésimales des groupes typiques crémoniens de l'espace (332-340).

Ces groupes typiques, comme l'ont démontré l'auteur et M. Enriques (*Ann. di Mat.*, 1897), sont les suivants :

1. Groupes projectifs;
2. Groupes de transformations conformes;

3. Groupes de Jonquières généralisés, transformant en lui-même un faisceau de plan ou une étoile de droites;

4. Deux certains groupes ∞^3 simples, transitifs, composés de transformations du 3e et du 7e ordre respectivement.

Ici, l'auteur trouve les symboles des transformations infinitésimales correspondantes à tous ces cas; en tout 16 groupes, un pour le premier cas, un pour le deuxième, douze pour le troisième et deux pour le quatrième.

Bagnera (*G.*). — [J 4] Un théorème relatif aux invariants des substitutions d'un groupe kleinien (340-346).

Un invariant d'ordre $r > 2$ est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières des invariants fondamentaux du premier et du deuxième ordre, et qui est résoluble par racines carrées.

Straneo (*P.*). — [T 4*c*] Sur la température d'un conducteur linéaire bimétallique. Note I (346-353).

La Note II est dans le 2e semestre, p. 206.

Del Lungo (*C.*). — [T 4*a*] Sur la densité des liquides et des vapeurs saturés, comme fonction de la température (353-358).

S. Rindi.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Palermo, tip. Amenta, in-8 gr. (1).

Tome IV, 1890.

Maisano (*G.*). — [B 4*d*] Sur la hessienne de la sextique binaire et sur le discriminant de la forme du huitième ordre. Note IIe (1-8).

Faisant suite à la Note du Tome III (1889), page 53.

Relations entre les invariants d'une forme du huitième ordre à un élément triple et discriminant de la forme générale du huitième ordre.

Vivanti (*G.*). — [H 2] Sur les équations algébriques différentielles du premier ordre (9-24), Note IIe (197-216).

Afin qu'une équation

$$f_0(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^m + f_1(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(w, z) = 0$$

(1) Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XIX, p. 140.

ait une intégrale de la forme

$$w = F[I(z)],$$

F étant une fonction algébrique et I une intégrale abélienne transcendante, il est nécessaire et suffisant :

a. Que ses racines soient les quotients des racines d'une équation d'un certain degré α, diviseur de m, et dont les coefficients ne dépendent que de z, par les racines d'une autre équation du degré $\frac{m}{\alpha}$ dont les coefficients ne dépendent que de w.

b. Que les racines de cette dernière équation soient les dérivées de fonctions algébriques de w.

Une équation algébrique différentielle du premier ordre ne peut avoir aucune intégrale de la forme $F(v_1 v_2)$, F étant une fonction algébrique et v_1, v_2 deux intégrales abéliennes linéairement indépendantes, c'est-à-dire telles qu'il n'y ait entre elles aucune relation de la forme $\Phi(v_1, v_2) = 0$, Φ étant une fonction rationnelle entière.

Autres questions relatives à la forme des intégrales.

Dans la Note IIe l'auteur recherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale d'une équation algébrico-différentielle du premier ordre

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z)$$

puisse s'exprimer algébriquement par les intégrales de deux équations algébrico-différentielles linéaires du premier ordre. Cette condition est qu'il existe une transformation algébrique de la variable indépendante

$$w = \Phi(W)$$

transformant l'équation donnée en une équation linéaire

$$\frac{dw}{dz} = M(z)W + N(z).$$

Lorsque $N(z) = 0$ identiquement, il y a un nombre infini d'intégrales de la forme

$$(1) \qquad \Phi\left(\frac{x^m}{y}\right),$$

m étant rationnel. Autrement, il y a un nombre infini d'intégrales des deux formes

$$(2) \qquad \Phi(x^m + ky),$$

$$(3) \qquad \Phi\left(x^m + k\frac{x}{y}\right),$$

où k est une composante. Les équations linéaires auxquelles satisfont x et y sont respectivement pour les trois cas

$$(1) \qquad \frac{dx}{dz} = Px, \qquad \frac{dy}{dz} = (mP + M)y,$$

$$(2) \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{m}Mx, \qquad \frac{dy}{dz} = My + \frac{1}{k}N,$$

$$(3) \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{m}Mx, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{k}Nx + \frac{m+1}{m}My.$$

Alagna (*R.*). — [B 4 *d*] Conditions pour qu'une forme du huitième ordre ait quatre points doubles (25-29).

D'autres cas sont traités dans la Note de la page 187.

Martinetti (*V.*). — Sur le genre des courbes Ω dans les involutions planes de classe quelconque (30-42), Note II^c (126-142).

La courbe Ω, ou *isologique*, d'un point O est le lieu des couples des points correspondants dans l'involution, qui se trouvent en ligne droite avec O. En toute involution d'ordre 2ν et de classe ν, les courbes Ω sont du genre $2\nu - 1$; et ce nombre $2\nu - 1$ est le maximum du genre des Ω dans toute involution de classe quelconque $\nu\,(>0)$. Δ étant le nombre de couples de directions fixes que les Ω ont aux points fondamentaux, le genre est au moins $\nu - \Delta$. L'auteur étudie en particulier le cas de $\Delta = 1$ et de $\Delta = 2$, dans lesquels le genre est au moins $\nu + \Delta$.

Caldarera (*F.*) — [K 12 *b*] Système de cercles tangents à trois cercles donnés, en coordonnées trilinéaires (43-49).

Albeggiani (*M. L.*). — [K 12 *b*] Observations sur la Note précédente (50-53).

Les coordonnées du centre et le rayon d'un cercle tangent aux trois cercles donnés sont trouvés par M. Caldarera en coordonnées trilinéaires et par M. Albeggiani en coordonnées cartésiennes.

Humbert (*G.*). — [M_2 8 *e*] Sur une classe de surfaces algébriques (54-56) [en français].

Ce sont les surfaces dont les coordonnées s'expriment par

$$\rho x_i = \Sigma\, \Theta(u)\, \theta(v),$$

Θ et θ étant des fonctions thétafuchsiennes holomorphes des genres respectifs p et p' de la première famille établie par H. Poincaré. Le genre de ces surfaces est égal à pp' si à tout point de la surface ne correspond qu'un seul système de valeurs de u et de v; dans le cas contraire le genre est inférieur à pp'. *Voir* une Note de M. Castelnuovo (p. 195), une Lettre de M. Nœther (p. 799) et les Extraits des procès-verbaux (p. 69-71).

Burali-Forti (*C.*). — [M_2 2 *j*] Sur les lignes isophotes des surfaces algébriques (57-62).

La source de la lumière étant supposée à l'infini, la ligne isophote correspondant à l'intensité i est la ligne de contact de la surface donnée avec la développable circonscrite dont les plans tangents font l'angle $w = \arcsin i$ avec la direction de ces rayons. Propriétés de ces courbes.

Castelnuovo (*G.*). — [M_2 8 *c*] Sur les surfaces algébriques dont les sections planes sont des courbes hyperelliptiques (73-88).

Ces surfaces sont, avec certaines restrictions, représentables point par point sur un plan. L'auteur après avoir démontré cette propriété, fait une classification de ces surfaces, étudie la représentation d'ordre minimum et démontre le théorème suivant :

Tout système linéaire de courbes planes hyperelliptiques de genre π, tel que le passage d'une courbe par un point arbitraire n'entraîne pas le passage par d'autres points, peut se réduire à l'un des systèmes suivants d'ordre minimum :

1° Courbes d'ordre $\pi + 3$ ayant un point $(\pi + 1)$-uple et un point double ;

2° Courbes d'ordre $2\pi + 2 - \mu$ ayant un point $(2\pi - \mu)$-uple et $\pi - \mu$ points doubles infiniment rapprochés de ce point » (μ pouvant être $= 0, 1, \ldots, \pi$).

Noether (*M.*). — [M_1 1 *a*]. Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier (89-108) [en français].

Soient P un point singulier d'une courbe algébrique f et Z une branche irréductible (cycle) de ce point. On suppose que la branche Z est λ_1-uple et que la tangente en P à Z a avec cette branche λ points communs ($\lambda > \lambda_1$). Si l'on prend P pour origine des coordonnées et la tangente à Z pour axe des x et si

$$\begin{aligned}
\lambda &= l\lambda_1 + \lambda_2,\\
\lambda_1 &= l_1\lambda_2 + \lambda_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_{q-2} &= l_{q-2}\lambda_{q-1} + \lambda_q,\\
\lambda_{q-1} &= l_{q-1}\lambda_q,
\end{aligned}$$

les substitutions successives

$$y = x^l x_1, \qquad x = x_1^{l_1} x_2, \qquad \ldots \qquad x_{q-2} = x_{q-1}^{l_q} x_q$$

transforment la courbe f en

$$\varphi_1(x, x_1), \qquad \varphi_2(x_1, x_2), \qquad \ldots, \qquad \varphi_q(x_{q-1}, x_q)$$

respectivement, Si $\lambda_q = 1$ la branche Z_q de φ_q correspondant à Z est simple ; si $\lambda_q > 1$, on transforme φ_q d'une manière analogue à la précédente, en indiquant par μ_1, μ les nombres analogues à λ_1, λ et relatifs à Z_q et en observant que $\mu_1 = \lambda_q$. En continuant ainsi on arrive à un des nombres

$$\mu_1, \quad \nu_1, \quad \rho_1, \quad \ldots$$

qui est égal à l'unité. La réduction du genre et de la classe de f, dues à Z, sont respectivement

$$(1) \quad \begin{cases} D = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) - \frac{1}{2}\lambda(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}\mu(\mu_1 - 1) + \frac{1}{2}\nu(\nu_1 - 1) \quad \ldots, \\ R = \lambda(\lambda_1 - 1) + \mu(\mu_1 - 1) + \nu(\nu_1 - 1) + \ldots. \end{cases}$$

Comme

μ_1 est le plus grand commun diviseur de λ_1 et λ,
ν_1 » » μ_2 et μ,
ρ_1 » » ν_1 et ν,
. . . . . .

les nombres *caractéristiques* de la singularité Z sont

$$\lambda_1, \lambda; \quad \mu, \nu, \rho, \quad \ldots,$$

par lesquels les autres restent déterminés. Cela en général; mais il peut arriver que quelques nombres successifs parmi λ_1, μ_1, ν_1, ... soient égaux; dans ce cas les nombres correspondants parmi les λ, μ, ν, ..., n'entrent plus dans les formules (1) que par leurs sommes, et ce sont alors ces sommes qu'il faut considérer comme nombres caractéristiques. C'est pourquoi l'auteur considère celles qu'il appelle *combinaisons caractéristiques* de la singularité :

$$\Delta_0, \alpha_0, \quad \Delta_1, \alpha_1, \quad \ldots, \quad \Delta_h, \alpha_h,$$

où il a posé

$$\lambda_1 = \Delta_0, \qquad \lambda = \alpha_0, \qquad \mu_1 = \Delta_1$$

et appelé

Δ_2 le premier des diviseurs ν_1, ρ, σ_1, ..., différent de Δ_1,
Δ_3 « ρ_1 σ_1, ..., » Δ_2,
. . . . . .

α_1 la somme de ceux des nombres μ, ν, ρ, σ ... qui correspondent aux diviseurs égaux à Δ_1,

α_2 la somme de ceux des nombres ν, ρ, σ, ... qui correspondent aux diviseurs égaux à Δ_2,

. . . . . .

Il donne aussi la signification géométrique de ces combinaisons caractéristiques, et puis la comparaison de ces combinaisons avec les nombres caractéristiques de Smith et de Halphen.

Dans le dernier paragraphe, il considère deux branches singulières différentes, partant d'un même point, et appartenant respectivement à une courbe f et à une courbe f', et il recherche le nombre de leurs points d'intersection.

Voir une addition à cette Note, dans ce même Tome, page 299.

Humbert (*G.*). — [M_2 1*f*] Sur un problème de contact de M. de Jonquières (109-114) [en français].

Étant donné un système linéaire $\rho - 1$ fois infini de surfaces algébriques de l'ordre n

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_\rho\varphi_\rho = 0,$$

trouver le nombre de ces surfaces qui ont, en un point, un contact d'ordre $\rho - 1$ avec une courbe plane ou gauche C, d'ordre m et de genre p.

Ce nombre est

$$mn\rho + \rho(\rho - 1)(p - 1).$$

Si les surfaces passent toutes par q points fixes de la courbe C et si l'on exclut les surfaces pour lesquelles le point de contact est un des points fixes,

le nombre trouvé doit être diminué de qp. La courbe est supposée n'avoir d'autres points singuliers que des points multiples à tangentes distinctes.

Modification du nombre trouvé, lorsqu'il y a des surfaces du système passant par la courbe.

Lebon (*E.*). — [O 5*h*] Sur la détermination des ombilics des surfaces tétraédriques (115-117).

Résumé des recherches de l'auteur sur les ombilics des surfaces admettant les six plans de symétrie d'un tétraèdre régulier.

Burali-Forti (*C.*). — [L_2 19*c* ref. Q 2] Sur le système de quadriques ayant en commun la n-uple polaire (118-125).

L'équation d'une des quadriques du système est

$$\sum_1^n g_i x_i^2 = 0,$$

et la condition pour le contact avec un espace S_{n-1} est une équation

$$\Theta_{s-1} = \Sigma \lambda g_1 g_2 \ldots g_s u^2 = 0,$$

les n étant les coordonnées de S_{s-1}. Cette équation, considérée par rapport aux g, est celle d'une variété d'ordre s à $n-2$ dimensions, et la détermination de la caractéristique ($\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}$) du système, c'est-à-dire du nombre de surfaces tangentes contemporanément à ε_s espaces S_s ($s = 0, 1, \ldots, n-2$) se réduit à la recherche des intersections successives des variétés Θ. Il faut pourtant en retrancher des espaces qui se détachent de ces intersections et avoir égard à la multiplicité de ceux qui restent. Après avoir indiqué la méthode générale, l'auteur trouve les caractéristiques pour $n = 3$, 4, 5 et 6.

Pincherle (*S.*). — [D 6*g*] Sur la transformation de Heine (143-145).

Dans la transformation de $\varphi(t)$ en $f(x)$ au moyen de la formule

$$(1) \qquad f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t},$$

appliquée par Heine dans ses recherches sur les fonctions de Lamé, il y a pour $\varphi(t)$ la restriction que cette fonction ne devient infinie d'ordre $\geqq 1$ ni aux limites, ni dans le chemin d'intégration. On peut ôter cette restriction et supposer que $\varphi(t)$ devienne infinie d'ordre fini ($< h+1$) au point a, extrême inférieur de l'intégrale, si l'on substitue à (1) la formule

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^h} \int_a^b \frac{\varphi(t)(t-a)^h\,dt}{x-t}.$$

Hermite (*Ch.*). — [D 6 *f*] Sur les polynomes de Legendre (146-152).

L'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{x^p\,dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

dont le développement en série de puissances de α a pour terme général

$$\alpha^n \int_{-1}^{+1} x^p X_n\,dx,$$

en posant

$$\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2} = 1 - \alpha y,$$

se transforme en

$$J = \int_{-1}^{+1} \left[y + \frac{\alpha}{2}(1 - y^2)\right]^p dx,$$

qui est un polynome en α de degré p, et l'on en déduit, pour $n > p$,

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n = dx = 0;$$

pour $n = p$ on trouve

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1} x^n X_n\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2^n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}+1\right)}.$$

Comme

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = A\int_{-1}^{+1} x^n X_n\,dx,$$

où la constante A représente le premier coefficient de X_n, c'est-à-dire la limite de $\frac{X_n}{x^n}$ pour $x = \infty$, on détermine cette limite en partant de l'équation fondamentale

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \lambda^2}} = \Sigma\alpha^n X_n,$$

et en y remplaçant α par $\frac{\alpha}{x}$, ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha - \frac{\alpha^2}{x^2}}} = \Sigma\alpha^n \frac{X_n}{x^n},$$

et puis en supposant x infini ; on voit alors que A est le coefficient de α^n dans le développement de

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha}};$$

par suite

$$(3) \qquad A = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n} = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Par substitution de (1) et (3) en (2), on a

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1},$$

qui est une des propriétés fondamentales des polynomes de Legendre.

Après cela, l'auteur ajoute une remarque dans le but de se rendre compte de la discontinuité que présente la formule de Laplace

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

où ε est $=1$ ou $=-1$ suivant que la partie réelle de x est positive ou négative. Il montre qu'on peut déduire cette formule de la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{At^2+2Bt+C} = \frac{\varepsilon i\pi}{\sqrt{B^2-AC}},$$

$|\varepsilon|=1$ et le signe de ε est celui du coefficient de i dans $\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}$. Il y ajoute aussi une autre manière d'expliquer le fait mentionné, fondée sur l'observation que l'intégrale de Laplace, écrite sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

représente l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z\left(x+\frac{z^2-1}{2z}\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}$$

prise suivant une circonférence de rayon $=1$.

Maisano (*G.*). — [B 8 *c*] Le combinant N de la forme ternaire cubique (153-185).

Mémoire se rattachant à ceux de :

1. Clebsch et Gordan (*Math. Ann.*, t. I, p. 56).
2. Gordan (*Math. Ann.*, t. I, p. 90).
3. Clebsch et Gordan (*Math. Ann.*, t. VI, p. 436).

Recherche relative à certaines formes des troisième, quatrième et sixième degrés dans les coefficients du combinant N.

Moore (*E.-H.*). — [F 2 *h*] Note sur un théorème fondamental relatif aux fonctions elliptiques, démontré dans le *Traité d'Halphen*, Tome I, pages 39-41 (186-194) [en anglais].

Il existe un argument u et un seul (à des multiples près des périodes) pour

lequel pu et $p'u$ soient respectivement égaux à des quantités imaginaires données, vérifiant la relation

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3.$$

Castelnuovo (*G.*). — [M_2 8*e*] Sur un théorème de M. Humbert (195-196).

Voir aussi NŒTHER (M.), *Extraits d'une lettre à M. Guccia* (ce Tome, p. 299) et les *Extraits des Procès-Verbaux* (p. 69-71).

Gebbia (*M.*). — [R 5 *a*] Sur certaines fonctions potentielles de masses diffuses dans tout l'espace infini (217-252).

La densité est supposée être une fonction potentielle de masse occupant une extension finie, ou une dérivée première ou seconde d'une telle fonction. La fonction potentielle ordinaire représentant la densité, ou dont la dérivée (première ou seconde) représente la densité, peut-être de volume, de surface ou de double couche. Lorsqu'il s'agit d'une fonction potentielle de volume ou de surface, le calcul peut s'effectuer au moyen du théorème de réciprocité de Gauss; dans les cas où la densité est représentée par la dérivée première d'une telle fonction, l'auteur emploie une généralisation du théorème de Gauss, consistant dans l'égalité

$$\int_K \rho_h \frac{\partial V_h}{\partial x_h} dK = -\int_H \rho_h \frac{\partial V_h}{\partial x_h} dH.$$

Pour le cas où la densité est une dérivée seconde d'une fonction potentielle de double couche, la méthode employée ici a été successivement simplifiée par l'auteur. (*Voir* t. VI, p. 196.)

Les fonctions trouvées satisfont toutes à l'équation de Poisson dans tout l'espace.

Voir un *Errata* à la page 384.

Jung (*G.*) — [M_1 1 *f* ref. M_2 8 *a*] Sur les familles associées de systèmes linéaires et sur les surfaces univoquement représentables sur le plan (253-260).

Avantages que les deux théories peuvent se prêter mutuellement dans la question d'assigner tous les systèmes minima de genre p en assignant toutes les surfaces représentables sur le plan et à sections du genre p; principalement en vue de la difficulté qui se présente par le fait que deux systèmes minima birationnellement différents peuvent correspondre à deux surfaces dont l'une soit un cas particulier de l'autre.

Vivanti (*G.*). — [C 5] Quelques formules relatives à l'opération Ω (261-268).

Étant

$$\begin{matrix} x_{11}, & \ldots, & x_{1n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{n1}, & \ldots, & x_{nn} \end{matrix}$$

n séries de n variables, l'opération Ω est

$$\Omega = \Sigma = \frac{\partial}{\partial x_{11} \dots \partial x_{nn}},$$

où Σ est développée comme un déterminant, et l'on peut aussi l'indiquer par

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{11}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{nn}}\right) \quad \text{ou bien par} \quad \Omega^{(n)}_{(x_{11} \dots x_{nn})}.$$

On a

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11} \dots x_{nn})}(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n) = \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} \Sigma = \Omega^{(n_1)} \varphi_1 \dots \Omega^{(n_r)} \varphi_r.$$

Venturi (*A.*). — [J 2 *e*] Sur un cas général de compensation angulaire (269-274).

Alagna (*R.*). — [B 4 *d*] Sur certains cas de multiplicité des racines de l'équation du huitième ordre (287-298).

Note faisant suite à celle de ce Tome, page 25. Cas où la forme a :

1° Un point triple et un point double ;
2° Un point triple et deux points doubles;
3° Deux points triples ;
4° Deux points triples et un point double.

Nœther (*M.*). — [M_2 8 *e* M_1 1 *a*] Extraits d'une lettre adressée à M. Guccia (299-301).

Contient une addition à la Note de l'auteur : *Sur les combinaisons caractéristiques*, etc. (ce Tome, p. 89).

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

Giudice (*F.*). — [D 2 *a*] Deux théorèmes sur les séries à termes positifs (64-65).

Gierbald (*F.*). — [M 1 *b*]. Sur les points sextactiques des courbes algébriques planes (65-66).

Vivanti (*G.*). — [D 1 *a*]. Sur quelques Communications de M. le professeur Giudice (66-67).

Giudice (*F.*). — [D 1 *a*] Réponse au professeur Vivanti (67-68).

Vivanti (*G.*). — [D 1 *a*]. Réponse au professeur Giudice (69).

Castelnuovo (*G.*), *Humbert* (*G.*) et *Guccia* (*G. B.*). — [$M_2 8e$] (69-71).

Castelnuovo (*G.*) et *Humbert* (*G.*). — [$M_2 8e$] (71-72).

Giudice (*F.*). — [D 2*a*] Observations sur les séries (275-276), (276-277).

Giudice (*F.*). — [D 2*a*] Une nouvelle règle de convergence pour les séries à termes positifs (278-279), (279-280), (280-281), (281-287), (283).

Giudice (*F.*). — [D 2*a*] Sur un récent article de M. Fouret (284-285).

Certo (*L.*). — [K 9*a*] Théorème sur les angles d'un polygone convexe (285-286).

Certo (*L.*). — [K 14*a*] Sur une démonstration d'un théorème relatif aux angles polyèdres (286).

S. Rindi.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tome V, 1891.

Schlegel (*V.*). — [Q 2] Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à *n* dimensions (1-8, une planche) [en français].

Un polyèdre est *homogène* si, dans toutes ses figures limitantes ayant même nombre de dimensions, se rencontre un même nombre d'autres figures ayant même nombre de dimensions. Il y a trois séries de polyèdres homogènes, qu'on peut faire commencer dans l'espace ordinaire (et même dans le plan) et les poursuivre jusqu'à *n* dimensions :

Série A (triangle), tétraèdre, pentaédroïde, ...
Série B (quadrilatère), hexaèdre, octaédroïde, ...
Série C (quadrilatère), octaèdre, hexadodécaédroïde, ...

Tous ces polyèdres sont réguliers lorsque leurs figures limitantes à $n-1$ dimensions sont régulières.

Pour représenter sur le plan un A_n on construit un polygone à $n+1$ sommets, dont les angles sont tous concaves, avec toutes ses diagonales. Les $\left(\frac{n+1}{r+1}\right)$

figures limitantes à r dimensions sont représentées, avec leur connexion, par l'ensemble des combinaisons de la classe $r+1$ des sommets $1, 2, \ldots, n$.

Un B_n est représenté de deux manières, dont nous citerons la suivante : comme le mouvement d'un point décrit un segment, le déplacement parallèle d'un segment engendre un parallélogramme, celui d'un parallélogramme (dans son plan) donne la représentation d'un parallélépipède ; en continuant à déplacer, toujours dans le plan, la figure obtenue chaque fois, on obtient la représentation de B_n.

Un C_n est représenté par un polygone à $2n$ sommets avec toutes ses diagonales à l'exception de celles qui joignent les sommets opposés.

Berzolari (*L.*). — [B 7 *a*, *b*, M_3 5] Sur la représentation des formes binaires cubiques et biquadratiques sur la cubique gauche (9-50).

L'auteur démontre quelques propositions du jacobien d'une forme quadratique et d'une cubique. Puis, en prenant une cubique gauche

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1,$$

il représente par n points de cette courbe les n valeurs de $-\frac{x_2}{x_1}$ qui annulent une forme donnée. (Si la forme donnée est une cubique, le plan des trois points est indiqué par le symbole même de la forme. On a alors, pour le jacobien $\mathfrak{I}$, le théorème suivant :

« La droite commune aux deux plans Δr et Q et la droite commune aux plans χ et qf appartiennent au complexe linéaire N des droites conjuguées à elles-mêmes dans le *Nullsystem;* les quatre plans (et les deux droites) se rencontrent en un même point qui est le foyer du plan $\mathfrak{I}$ dans le *Nullsystem*, et le plan $\mathfrak{I}$ est celui des deux droites. »

Après, il trouve l'équation de la surface gauche du quatrième degré, engendrée par les cordes de la cubique s'appuyant sur une droite fixe et, ayant posé

$$(\Delta\Theta)\ \Delta_x\Theta_x = \varrho_x^2,$$

$$(\nabla\Theta)\ \nabla_x\Theta_x = \sigma_x^2,$$

$$(\Delta\nabla)\ \Delta_x\nabla_x = \tau_x^2,$$

il déduit de l'équation trouvée la propriété suivante :

La surface contient la cubique comme courbe double, et touche les deux hyperboloïdes harmoniques des couples de points ϱ et σ suivant les droites qu'ils ont respectivement en commun (en dehors de la cubique) avec l'hyperboloïde harmonique des deux points τ, c'est-à-dire suivant les droites joignant respectivement les couples Δ et ∇.

L'équation de la surface est obtenue comme covariant simultané de deux formes cubiques, et l'auteur examine la dégénération de cette surface dans le cas où l'invariant Ω de ces formes est $= 0$.

Puis il étudie la forme biquadratique, et le système d'une cubique et d'une biquadratique. Relativement à ce système il trouve, par exemple, que l'annulement de l'invariant

$$(T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2$$

représente l'ensemble des trois hyperboloïdes harmoniques des trois couples de points, correspondant aux facteurs quadratiques de T, c'est-à-dire des hyperboloïdes passant par la cubique gauche et par chacun des couples d'arêtes opposées du tétraèdre dont les sommets sont les points déterminés sur la cubique par l'annulement de la forme biquadratique.

Enfin il étudie les formes cubiques apolaires d'une biquadratique donnée.

Porro (*F.*). — [U] Sur l'extension de la loi de Newton aux systèmes d'étoiles doubles (51-58).

La loi d'attraction est représentée par l'expression

$$R = -\frac{\mu a^2}{1-e^2}\frac{r}{(a^2-xX)^2},$$

où X est la distance du centre d'attraction (situé sur l'axe des x) au centre de l'ellipse et x l'abscisse du point attiré. Si a^2-xX se réduit à une constante, on a la forme

$$R = -\frac{\mu}{a^2b^2}r;$$

si a^2-xX est fonction de r seulement, la forme

$$R = -\frac{\mu}{p}\frac{1}{r^2}.$$

L'auteur arrive à ces résultats par une simplification de la méthode suivie par Glaisher (*Monthly Notices of the R. Astr. Soc.*, XXXIX).

Pennacchietti (*G.*). — [R 7 *d*] Sur le mouvement brachistochrone (59-74).

En supposant l'existence d'une fonction potentielle et en posant la condition que le mouvement soit brachistochrone, l'auteur obtient des équations canoniques analogues à celles de Hamilton. Ces équations sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial U}{\partial q_s} + \frac{\frac{dT}{dt}}{T}\frac{\partial T}{\partial q'_s},$$

où $s = 1, 2, 3$ pour le mouvement sur une courbe, et $s = 1, 2$ pour le mouvement sur une surface. Dans ce second cas les équations conservent cette forme lorsqu'il n'y a pas de fonction potentielle, pourvu que l'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit la différentielle exacte d'une fonction de q_1, q_2.

Une transformation des équations les amène à la forme

$$T\frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_s},$$

$$T\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_s}.$$

Dans le cas du mouvement sur une courbe, on a les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} T\frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_1}, & T\frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x},\\ T\frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_2}, & T\frac{dp_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y},\\ T\frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_3}, & T\frac{dp_3}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Étant

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} = p_1, \qquad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial y} = p_2, \qquad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} = p_3,$$

l'intégrale des forces vives est

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{2}{U+h}.$$

Si S est une solution complète de l'équation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \frac{2}{U+h},$$

contenant les constantes arbitraires a_1, a_2, les intégrales du système (1), ne renfermant pas t explicitement, sont

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial a_2} = b_2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = p_2, \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = p_3,$$

b_1, b_2 étant deux autres constantes arbitraires. L'autre intégrale de (1) s'obtient par une quadrature.

Observation semblable pour le cas du mouvement sur une surface.

Application au cas d'un corps pesant dans le vide.

Fouret (*G.*). — [M$_1$ 3 *e*] Sur quelques propriétés relatives aux points d'incidence des droites issues d'un même point et rencontrant une courbe plane sous un même angle (75-79) [en français].

Étant donnée une courbe plane algébrique, dépourvue de branches paraboliques, de branches isotropiques et de singularités ponctuelles, le centre de moyenne distance des points d'incidence des droites issues d'un point fixe p du plan et coupant cette courbe sous un même angle d'incidence θ, ne varie pas lorsque la courbe se déforme, en conservant les mêmes asymptotes.

Ce théorème est obtenu par l'auteur comme conséquence d'un théorème de Liouville (*J. de Math. pures et appliquées*, 1re série, t. VI, p. 359), suivant lequel le centre de moyenne distance des points communs à deux courbes algébriques, satisfaisant aux conditions mentionnées, reste fixe lorsque ces courbes se déforment en conservant les mêmes asymptotes.

Suivent deux autres théorèmes sur le même sujet; le second prouve qu'en

faisant varier l'angle θ, tandis que le point p reste fixe, le centre de moyenne distance des points d'incidence décrit une droite.

Picard (*E.*). — [V 9] Revue annuelle d'analyse (80-90) [en français].

Coup d'œil d'ensemble sur l'état de la théorie des fonctions analytiques, de celle des équations différentielles, des groupes, des fondements de la Géométrie et de la Géométrie infinitésimale.

Burali-Forti (*C.*). — [P 6 *f*] Sur les transformations (2, 2) que l'on peut obtenir au moyen de deux transformations doubles (91-99).

Soient σ, σ′, σ″ trois plans, et supposons qu'il y ait une transformation double de l'ordre n et du genre p entre σ et σ″, une autre de l'ordre n' et du genre p' entre σ′ et σ″. Si, dans ces deux transformations, les plans σ et σ′ sont doubles tous les deux ou simples tous les deux, il résulte entre σ et σ′ une transformation (2, 2); si l'un est double et l'autre est simple, on a entre eux une transformation (1, 4). L'auteur étudie les deux cas où l'on a une transformation (2, 2), et les propriétés de cette transformation.

Morera (*G.*). — [R 6] Sur les systèmes de forces admettant la fonction des forces (100-105).

Étant U (fonction des forces) une fonction des coordonnées

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots \quad \xi_N,$$

telle qu'on ait

$$\sum_{k=1}^{N} \Xi_k \, d\xi_k = dU,$$

où les Ξ_k sont les composantes des forces, on n'a

$$\Xi_k = \frac{\partial U}{\partial \xi_k}$$

que dans le cas où les Ξ_k sont des fonctions des ξ seulement. Lorsque les Ξ_k sont des fonctions des ξ et de leurs dérivées, on a

$$\Xi_k = \frac{\partial U}{\partial \xi_k} + \begin{vmatrix} \frac{d\xi_1}{dt} & \frac{d\xi_2}{dt} & \ldots & \frac{d\xi_{k-1}}{dt} & 0 & \frac{d\xi_{k+1}}{dt} & \ldots & \frac{d\xi_N}{dt} \\ \Xi_1^{(2)} & \Xi_2^{(2)} & \ldots & \Xi_{k-1}^{(2)} & \Xi^{(2)} & \Xi_{k+1}^{(2)} & \ldots & \Xi_N^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Xi_1^{(N)} & \Xi_2^{(N)} & \ldots & \Xi_{k-1}^{(N)} & \Xi^{(N)} & \Xi_{k+1}^{(N)} & \ldots & \Xi_N^{(N)} \end{vmatrix},$$

où les $\Xi_k^{(l)}$ sont des fonctions potentielles quelconques (même des constantes) et les $\Xi^{(l)}$ des fonctions arbitraires des ξ_k et de leurs dérivées.

L'auteur observe enfin qu'en admettant le principe de la réaction, il ne s'ensuit pas du principe de l'énergie que les forces intérieures soient des fonctions des distances mutuelles, mais seulement que ces forces admettent une fonction des forces dépendant des distances mutuelles.

Rindi (*S.*). — [$M_{22}h$] Sur les normales communes à deux surfaces algébriques (106-108).

Application d'une formule de Zeuthen. Nombre des normales communes.

Martinetti (*V.*). — [$M_1 5a$] Théorèmes sur les polygones de Steiner inscrits à une courbe du troisième ordre (109-120).

Étant P et P′ deux points d'une cubique plane, A_1 un autre point de la courbe, A_2 l'intersection de la courbe avec PA_1, A_3 celle avec $P'A_2$, et ainsi de suite, on ne peut avoir que deux cas (STEINER, *Geometrische Lehrsätze; Ges. Werke*, Bd. II, p. 369) :

1° Ou la ligne brisée ne se ferme jamais;

2° Ou elle se ferme toujours, quel que soit A_1, en donnant un polygone d'un nombre pair $2n$ de sommets.

Dans ce dernier cas, on dit que P, P′ est un couple de Steiner d'ordre n.

Entre les théorèmes démontrés par l'auteur, il y en a un au moyen duquel on peut trouver des couples de Steiner d'ordre n en connaissant des couples dont les ordres n_1, n_2, ..., ont n pour leur plus petit multiple commun.

Kerbedz (*E. de*). — [V_9] Sophie de Kowalevski (121-128). Biographie et liste des travaux.

Bortolotti (*E.*). — [$H_{12}f$] Sur les systèmes récurrents du troisième ordre, et en particulier sur les systèmes périodiques (129-151).

Soit la matrice

$$M = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & b_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & b_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 & b_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 & b_3 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} & -1 \end{vmatrix};$$

par suppression de trois colonnes on obtient $\binom{n+3}{n}$ déterminants. En dehors de ceux qu'on obtient en supprimant des colonnes consécutives, qui sont égaux à l'unité en valeur absolue, et en se bornant aux cas où l'on supprime toujours

les colonnes extrêmes (comme l'auteur prouve qu'on peut faire), on a trois types de déterminants :

Type α : En supprimant la première colonne et les deux dernières;
Type β : En supprimant les deux premières et la dernière ;
Type γ : En supprimant les deux extrêmes et une intermédiaire.

Les α sont des intégrales de l'une ou de l'autre des deux équations aux différences finies (*inverses*, suivant une définition de M. Pincherle) :

$$f(x) - a_{n-1} f(n-1) + b_{n-2} f(n-2) + f(n-3) = 0,$$
$$f(r) - a_r f(r+1) + b_r f(r+2) - f(r-3) = 0.$$

Les β le sont pour les équations

$$f(n) - b_{n-1} f(n-1) - a_{n-1} f(n-2) - f(n-3) = 0,$$
$$f(r) - b_r f(r-1) - a_{r+1} f(r+2) - f(r+3) = 0.$$

Les γ, en supposant que la colonne intermédiaire supprimée soit la $(p+2)^{-\text{ième}}$, ont la même propriété par rapport aux équations

$$f(n) - b_{n-1} f(n-1) - a_{n-1} f(n-2) - f(n-3) = 0,$$
$$f(p-r) - a_r f(p-r-1) + b_r f(p-r-2) - f(p-r-3) = 0.$$

Les γ peuvent s'exprimer en fonction des α et des β.

Les propriétés de ces déterminants sont appliquées par l'auteur à l'étude des systèmes récurrents. Il trouve que, dans un système récurrent du troisième ordre,

$$\begin{aligned} \sigma_0 + a_0\sigma_1 + b_0\sigma_2 &= \sigma_3, \\ \sigma_1 + a_1\sigma_2 + b_1\sigma_3 &= \sigma_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_p + a_0\sigma_{p+1} + b_0\sigma_{p+2} &= \sigma_{p+3}, \end{aligned}$$

où les coefficients

$$\begin{aligned} &a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{p-1}; \quad a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \\ &b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{p-1}; \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots \end{aligned}$$

se reproduisent périodiquement avec la période p, les fonctions σ dont les indices appartiennent à une même classe par rapport au module p, forment un système récurrent du troisième ordre à coefficients constants.

Les fonctions σ dépendent rationnellement des racines d'une équation cubique contenant $3p$ constantes arbitraires.

Voir le Tome VI, 1892, p. 6, pour une correction des formules (21) et (23).

Maisan (*G.*). — [B 7 *d*, *e*] Le hessien de la sextique binaire et le déterminant de la forme duhuitième ordre (152-154).

Hermite (*Ch.*). — [F. 5] Sur la transformation des fonctions elliptiques (155-157) [en français].

Soit

$$x = \frac{U}{V}$$

la formule de Jacobi pour la transformation d'ordre n, qui donne l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

En posant

$$\varphi(x) = A_0 x^{n+1} + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-3} + \ldots + A_{\frac{n+1}{2}},$$
$$\psi(x) = B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-4} + \ldots + B_{\frac{n-1}{2}} x,$$

on peut disposer des $n+1$ coefficients A, B de manière que le polynome

$$\varphi^2(x) - \psi^2(x)(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

admette le facteur $U - Vy$. Alors la relation

$$\varphi^2(x) - \psi^2(x)(1-x^2)(1-k^2x^2) = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$A(U^2 - V^2y^2)[x^2 - \theta^2(y)] = 0,$$

où $\theta(y)$ est une fonction rationnelle de y, ce que l'auteur prouve au moyen du théorème d'Abel, en montrant que, pour

$$y = sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

on a

$$\theta(y) = sn(nu).$$

Enfin il remarque qu'en faisant

$$\theta(x) = \frac{U_1(x)}{V_1(x)}, \qquad \lambda(x) = \frac{U(x)}{V(x)},$$

on a

$$[U^2(x) - y^2V^2(x)][U_1(x) - x^2V_1(x)]$$
$$= \varphi^2(x, y)(1-y^2)(1-\lambda^2y^2) - \psi^2(x, y)(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

φ et ψ étant rationnelles et entières en x, y, et qu'en posant les équations

$$F(z, x) = \varphi^2(z, x)(1-x^2)(1-\lambda^2x^2) - \psi^2(z, x)(1-z^2)(1-k^2z^2) = 0,$$
$$F(z, y) = \varphi^2(z, y)(1-y^2)(1-\lambda^2y^2) - \psi^2(z, y)(1-z^2)(1-k^2z^2) = 0,$$

l'élimination de z conduit à la formule de multiplication.

Poincaré (*H.*). — [H2, *c* β] Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré (161-191) [en français].

Ce travail se rattache à ceux de M. Darboux (ce *Bulletin*), de M. Painlevé (*Ann. de l'Ec. Nom. sup.*) et de M. Autonne (*J. de l'Ec. Polytechn.*). — La difficulté principale qui restait pour trouver une limite supérieure du degré de l'intégrale générale, et, par conséquent, pour décider si l'équation différentielle donnée est intégrable algébriquement, consistait dans le défaut d'un moyen pour

exprimer, dans les inégalités relatives, l'irréductibilité de l'intégrale. C'est ce moyen que M. Poincaré se propose de trouver, au moins dans des cas particuliers, et aussi de donner la solution complète du problème étudié par M. Painlevé : reconnaître si l'équation admet une intégrale algébrique de genre donné.

L'équation, sous la forme homogène, considérée par M. Darboux, est

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant des polynomes entiers, homogènes en x, y, z et de degré m (*dimension* de l'équation).

Soit

$$f + \mathrm{C}\varphi = 0$$

l'intégrale générale, qui, pour certaines valeurs (*valeurs remarquables*) de C, peut se décomposer en

$$f + \mathrm{C}\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k}.$$

Les points singuliers de l'équation sont donnés par

$$\frac{\mathrm{L}}{x} = \frac{\mathrm{M}}{y} = \frac{\mathrm{N}}{z},$$

et, comme l'a démontré M. Darboux, ils sont au nombre de $m^2 + m + 1$. On les suppose tous différents.

Si S_1, S_2 sont les racines de l'équation en S

$$(2) \qquad \left(z\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} - x\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \mathrm{N} - \mathrm{S}\right)\left(z\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} - \mathrm{N} - \mathrm{S}\right) - \left(z\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} - x\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - y\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right) = 0,$$

où les x, y, z ont les valeurs correspondant à un point singulier, l'intégrale générale de l'équation donnée peut, dans le voisinage d'un point singulier, se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \mathrm{X}_1^{\mathrm{S}_1}\mathrm{X}_2^{-\mathrm{S}_2} = \text{const.},$$

X_1 et X_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$ et $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$, où x_0, y_0, z_0 est le point singulier considéré. En dehors des cas où l'équation (2) se réduit à une identité et où elle a une racine nulle, qui ne peuvent se présenter lorsque les points singuliers sont distincts, il y a un seul cas d'exception, c'est celui où $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2$; alors l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{X}_2}{\mathrm{X}_1} + \mathrm{A}\log \mathrm{X}_1 = \text{const.};$$

et, lorsque $\mathrm{A} = 0$, le point singulier est ce que M. Autonne appelle un point *dicritique*.

Si le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ est réel négatif, le point singulier s'appelle un *col* (col *irrégulier* lorsque, comme il arrive en général, l'intégrale ne peut se mettre sous la forme (3), col *régulier* dans le cas contraire).

Pour que l'équation soit intégrable algébriquement, il est nécessaire que, pour tous les points singuliers, le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ soit réel et commensurable, que les points où $\frac{S_1}{S_2} = 1$ soient dicritiques et que tous les cols soient réguliers. Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ s'appelle l'*exposant* du point singulier. Les points singuliers ayant un exposant réel et positif sont des *nœuds* (les points dicritiques sont compris dans ce nombre). Étant $\frac{\mu}{\nu}$ ou $-\frac{\mu}{\nu}$ l'exposant d'un nœud ou d'un col respectivement, les nombres entiers μ et ν, premiers entre eux, sont les *caractéristiques* du point singulier.

Dans le cas où les nœuds sont dicritiques, le genre de la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

est

$$q = \frac{m-4}{4}\, p + 1.$$

Dans le cas où il y a des nœuds *monocritiques* (dont l'exposant n'est pas $= 1$), considérons une valeur *remarquable* de C, soit C_1, pour laquelle on ait

$$f + C_1\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k}.$$

L'examen des points singuliers de la courbe indécomposable $f + C\varphi = 0$ et des courbes $u_i = 0$, et le dénombrement de leurs intersections, conduit à l'expression du genre et au résultat suivant :

La condition pour qu'on puisse reconnaître si l'équation différentielle admet une intégrale générale algébrique de genre donné est que

$$(\mu + \nu)\left(1 - \frac{3}{m+2}\right) > 1,$$

ce qui a toujours lieu pour $m > 4$.

Les cols sont distingués en trois genres :

1° Points doubles d'une courbe indécomposable

$$f + C_1\varphi = 0$$

ou d'une courbe $u_i = 0$, u_i étant un des facteurs de

$$f + C_1\varphi = u_1^{\alpha_1} \ldots u_k^{\alpha_k}$$

pour une valeur remarquable C_1. On a pour ces points $\mu = \nu = 1$.

2° Points d'intersection de deux courbes

$$u_i = 0, \qquad u_j = 0$$

correspondant à une même valeur remarquable de C, étant $\alpha_i = \alpha_j$ et, par conséquent, $\mu = \nu = 1$.

3° Même cas, mais avec $\alpha_i \gtrless \alpha_j$ et par conséquent $\mu \gtrless \nu$, $\nu > 1$.

La connaissance de μ, ν, qui suit de l'équation différentielle donnée, permet de distinguer les cols des deux premiers genres de ceux du troisième.

Après d'autres propriétés et une classification des valeurs remarquables de C en cinq espèces suivant l'égalité de tous ou de quelques-uns des exposants des facteurs u_i, l'auteur démontre, en appliquant un théorème d'Halphen, que, si $f + C_\varphi$ n'est pas réductible quel que soit C, le nombre total des valeurs remarquables est limité.

Enfin, pour ce qui se rapporte au sujet principal, c'est-à-dire à la limitation du degré, il arrive à un résultat qui, lorsque tous les cols sont du premier ou du deuxième genre, permet de trouver une limite supérieure du degré p de l'intégrale générale.

Segre (*C.*). — [M_2 8 ref. Q 2] Sur les variétés représentant les couples de points de deux plans ou espaces (192-204).

Etant x_l les $p-1$ coordonnées d'un point dans un espace S_p, y_m les $q-1$ coordonnées dans un espace S_q, ..., le groupe des points x_l, y_m, ..., est *représenté* par la variété M_σ constituée par les points

$$X_{lm\ldots} = x_l y_m \ldots$$

qui est de la dimension

$$\sigma = p + q + \ldots,$$

contenue dans un espace de $(p-1)$, $(q-1)$, ... -1 dimensions, et de l'ordre

$$\frac{\sigma!}{p!\,q!\ldots}.$$

L'auteur traite le cas où les espaces considérés sont deux plans π, π'. On a alors une variété Σ du sixième ordre à quatre dimensions, appartenant à l'espace S_8 et renfermant ∞^4 quadriques ordinaires, chacune desquelles représente les couples de points pris sur deux droites de π, π' respectivement; les génératrices rectilignes représentent entre ces couples ceux où l'un des deux points est fixe. On a aussi sur Σ deux systèmes ∞^2 de variétés cubiques à trois dimensions, appartenant à des S_5. Ces S_5 forment une variété cubique Γ pour laquelle la variété Σ est double, et il y a entre Σ et Γ une dualité que l'auteur met aussi en évidence par la représentation analytique. Une collinéation entre π et π' est représentée sur Σ par une surface du quatrième ordre qui appartient à un S_5 et qui est une surface de Veronese.

La variété Σ, lorsqu'elle est réelle, peut présenter deux cas : le cas hyperbolique et le cas elliptique, et la variété elliptique sert pour représenter, avec ses points réels, tous les éléments (complexes) d'une forme fondamentale de deuxième espèce.

Vivanti (*G.*). — [P 6*e*] Sur les transformations de contact, transformant toute développable en une développable (205-220).

Toute transformation de cette classe peut s'obtenir par une transformation ponctuelle précédée et suivie par la transformation de Legendre.

Étant

$$\zeta = px - qy - z,$$

et φ, ψ, χ trois fonctions arbitraires de ζ, p, q les formules donnant la transformation plus générale de cette classe sont

$$X = -\frac{(\varphi\chi)_2 x + (\psi\chi)_3 y - (\psi\chi)_1}{(\varphi\psi)_2 x + (\varphi\psi)_3 p - (\varphi\psi)_1}, \qquad Y = \frac{(\varphi\chi)_2 x + (\varphi\chi)_3 y - (\varphi\chi)_1}{(\varphi\psi)_2 x + (\varphi\psi)_3 y - (\varphi\psi)_1},$$

$$Z = \varphi X + \psi Y - \chi, \qquad P = \varphi, \qquad Q = \psi,$$

où les symboles sont définis ainsi :

$$(\rho\sigma)_1 = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial\sigma}{\partial q} - \frac{\partial\rho}{\partial q}\frac{\partial\sigma}{\partial p},$$

$$(\rho\sigma)_2 = \frac{\partial\rho}{\partial q}\frac{\partial\sigma}{\partial\zeta} - \frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma}{\partial q},$$

$$(\rho\sigma)_3 = \frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma}{\partial p} - \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial\sigma}{\partial\zeta}.$$

De Vries (*J.*). — [Q 4*a*] Sur les configurations planes dont chaque point supporte deux droites. Extrait d'une lettre adressée à M. V. Martinetti (221-226) [en français].

Les configurations aux indices 2 et i se rangent en deux groupes :

Premier type : $[(2k-1)n_2, 2n_{2k+1}]$

Deuxième type : (kn_2, n_{2k}).

Si à une configuration d'un de ces groupes on ajoute les intersections qui n'appartiennent pas à la configuration originale, on obtient un $2n$-latère ou bien un n-latère complet. Les droites de la configuration avec les points nouveaux forment une configuration d'un des types mentionnés, qui s'appelle *complémentaire*. Par trois espèces de transformations, consistant à enlever ou à ajouter des droites et des points, l'auteur indique le moyen d'obtenir toutes les $(3n_2, 2n_3)$ lorsque l'on connaît les $[3(n-1)_2, 2(n-1)_3]$ et les $[3(n-2)_2, 2(n-2)_3]$.

Autres propositions concernant les $(2n_2, n_4)$.

Beltrami (*E.*). — [T 2] Sur la théorie générale des ondes planes (227-235).

L'auteur reprend la théorie relative aux ondes planes pour l'exposer sans la restriction posée par Kirchhoff, qui suppose *a priori* que les vibrations soient rectilignes.

Les équations du mouvement se réduisent à la forme

$$\frac{\partial X_1}{\partial s} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial t} = 0,$$

où

$$(1)\quad \begin{cases} X_s = lX_x + mX_y + nX_z, \\ Y_s = lY_x + mY_y + nY_z, \\ Z_s = lZ_x + mZ_y + nZ_z; \end{cases}$$

u, v, w sont les composantes du déplacement et s le paramètre des plans d'onde

$$lx + my + nz = s,$$

dont l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale.

En indiquant par Π' ce que devient le potentiel d'élasticité Π en y substituant aux composantes de déformation x_x, x_y, ..., les valeurs correspondantes

$$\begin{aligned} x'_x &= la, & y'_z &= mc + nb, \\ y'_y &= mb, & z'_x &= na + lc, \\ z'_z &= nc, & x'_y &= lb + ma, \end{aligned}$$

les trois équations (1) peuvent se remplacer par l'unique équation

$$\frac{\partial^2(au + bv + cw)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial \pi'}{\partial a}u + \frac{\partial \pi'}{\partial b}v + \frac{\partial \pi'}{\partial c}w\right),$$

en assignant aux constantes a, b, c trois systèmes de valeurs indépendantes, ce qui peut se faire en introduisant une nouvelle inconnue V, par les équations

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial a} = V^2 a, \qquad \frac{\partial \Pi'}{\partial b} = V^2 b, \qquad \frac{\partial \Pi'}{\partial c} = V^2 c,$$

auxquelles conduit aussi (en supposant a, b, c coordonnées d'un point), la détermination des axes de l'ellipsoïde

$$2\Pi' = 1.$$

On a pour V^2 trois valeurs, inverses des carrés des semi-axes de l'ellipsoïde, et l'équation devient

$$\frac{\partial^2(au + bv + cw)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2(au + bu + cw)}{\partial s^2},$$

ayant l'intégrale générale

$$au + bv + cw = \varphi(s - Vt) + \psi(s + Vt),$$

qui donne pour chacune des valeurs de V la composante de déplacement suivant le semi-axe correspondant. Quel que soit donc le plan d'onde, est possible la propagation de trois ondes à vibration rectiligne avec trois vitesses distinctes; les directions forment un système orthogonal.

Pour établir la notion de *rayon*, l'auteur s'appuie sur la proposition suivante de la théorie des pressions, qu'il démontre :

Étant O un point d'un milieu élastique et Q une droite quelconque par O, il existe toujours une droite R et une seule, par O, telle que les pressions qui agissent sur *tous* les éléments plans ω' passant par R en O, soient *normales* à Q.

Alors en attribuant à Q la direction du mouvement qui a lieu en O, on reconnaît l'existence d'une droite R telle que, dans le voisinage de O, il n'y a aucun échange d'énergie à travers tout élément plan passant par R. En prenant comme direction Q en un point O celle du mouvement local, la direction R de la pression sur l'élément normal à Q est celle du *rayon*.

Enfin l'auteur démontre que le point de contact de l'enveloppe des plans de l'onde avec chacun de ces plans, est toujours sur le rayon correspondant à ce plan.

Loria (*G.*). — [V 9] Notice sur la vie et les ouvrages de J. Casorati (236-251).

Avec la liste des 51 travaux de Casorati.

Pieri (*M.*). — [P 4 *f* ref. Q 2] Formules de coïncidence pour les séries algébriques ∞^n de couples de points de l'espace de n dimensions (252-268).

L'ensemble des *points doubles* et des *droites principales* (joignant des couples de points correspondants infiniment rapprochés) est une variété à $n-1$ dimensions (variété de *coïncidences*) dont l'élément générateur est le système d'un point double et de sa droite principale. L'auteur trouve des relations entre les caractères fondamentaux des séries, c'est-à-dire les nombres indiquant combien des couples de points correspondants satisfont à des conditions fondamentales données, et les caractères fondamentaux de la variété de coïncidence. Il applique le principe de Chasles et le principe de continuité. Les résultats sont presque totalement nouveaux.

Vivanti (*G.*). — [P 6 *e*] Un problème sur les transformations de contact (269-278).

Généralisation du problème traité dans la Note précédente de l'auteur (ce même tome, p. 205). On détermine ici les transformations de contact, transformant une surface σ en une autre Σ de manière que la courbure aux points correspondants soit égale.

Ces transformations se réduisent ou à un simple déplacement ou à un déplacement joint à une inversion par symétrie par rapport à un plan. Les formules générales sont

$$X = a_2 x + a_3 y + a z + a_1,$$
$$Y = b_2 x + b_3 y + b z + b_1,$$
$$Z = c_2 x + c_3 y + c z + c_1,$$
$$P = -\frac{a_2 p + a_3 q + a}{c_2 p + c_3 q + c},$$
$$Q = -\frac{b_2 p + b_3 q + b}{c_2 p + c_3 q + c},$$

étant

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a a_2 + b b_2 + c c_2 = a a_3 + b b_3 + c c_3 = 0.$$

Vries (*J. de*). — [P 6 *c*] Involutions cubiques dans le plan complexe (289-300) [en français].

Une équation

$$f(z) = \lambda \varphi(z) \tag{1}$$

représente l'involution formée par les groupes de n points que l'on obtient pour les diverses valeurs du paramètre λ. L'équation

$$f'(z) = \lambda \varphi'(z)$$

représente une involution qui s'appelle l'involution *focale* de (1). Dans le cas de $n = 3$, les points doubles de l'involution focale sont les centres de deux triangles équilatéraux dont les sommets sont deux groupes de l'involution cubique Ces deux points sont appelés *métacentres*. Propriétés relatives à ces involutions. Transformation des involutions cubiques par inversion : par exemple, par une inversion dont le pôle soit l'un des points doubles, on obtient une involution *isobarique*, c'est-à-dire dont les groupes ont même barycentre. Pour les involutions cubiques à point triple t, l'auteur donne la construction suivante des points doubles, lorsqu'on donne le point t et un groupe de l'involution : du point t comme centre, on transforme par inversion le groupe donné. On construit les foyers du groupe nouveau (les racines de l'équation dérivée); la transformation inverse de ces points donne les points doubles.

Alagna (*R.*). — [B 7 *b*] Conditions pour que deux formes biquadratiques soient en involution (301-307).

Ces conditions sont

$$nC - \frac{ri^2}{9} - mj - pD = 0,$$

$$(6n^2 - p^2 i_1 + 2pri)B - r^2 ji - 6m^2 j - 9p^2 A j_1 - 2mri^2 + 12mpD = 0.$$

On peut trouver les points doubles de l'involution sans avoir recours à des résolvantes cubiques, en déterminant les éléments du covariant quadratique

$$(f, f_1)^4.$$

Picard (*E.*). — [H 9 *e*] Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre (308-318).

On peut étendre la méthode de Laplace aux équations

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0, \tag{1}$$

où A, B, ..., F sont des polynomes du premier degré en x, y. (*Voir* la Note de l'auteur dans les *Comptes rendus*, septembre 1888). Ici l'auteur applique sa méthode à la recherche d'une intégrale de (1) ayant la forme

$$u = \int\int e^{zx} e^{z'y} f(z, z')\, dz\, dz'$$

en choisissant convenablement le domaine d'intégration, qu'on suppose ne dépendre pas de x et y, ainsi que la fonction $f(z, z')$. On trouve que si la fonction f satisfait à une certaine équation

$$P\frac{\partial f}{\partial z} + Q\frac{\partial f}{\partial z'} + Rf = 0,$$

P, Q, R étant des polynomes du deuxième degré en z', elle fournit une intégrale (2), pourvu que le domaine d'intégration soit tel qu'on ait sur le contour

$$z^{\alpha} z'^{\beta} e^{zx} e^{z'y} f(z, z') = 0$$

pour $\alpha, \beta = 1, 2$.

Cette méthode est appliquée par l'auteur à l'équation d'Euler et de Poisson

$$(x - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \beta'\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

pour laquelle il trouve

$$f = z^{\beta'-1} z^{\beta-1} \varphi(z + z'),$$

φ étant une fonction arbitraire. On a alors

$$u = \int\int e^{zx} e^{z'y} z'^{\beta'-1} z^{\beta-1} \varphi(z + z')\, dz\, dz'.$$

et l'on peut choisir comme chemin d'intégration dans le plan z une courbe partant de l'infini et y revenant en tournant autour de l'origine, et de même, dans le plan z'; et en ajoutant la condition que e^{zx} et $e^{z'y}$ s'annulent à l'infini pour les chemins suivis.

Puis il traite le cas de l'équation

$$x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \beta\frac{\partial u}{\partial x} + \beta'\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

mais aussi pour cette équation il laisse de côté la question de trouver l'intégrale générale et renvoie pour cela à l'analyse de l'équation d'Euler et de Poisson, faite par M. Darboux dans ses *Leçons* (t. II, Chap. III et IV).

Enfin il considère l'équation plus générale

$$(ax + by)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(a'x + b'y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (a''x + b''y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

et celle où A, B, C sont constants et D, E, F des expressions linéaires en x, y.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

Giudice (*F.*). — [D 2 *a*] Sur les successions (280-283).

Giuliani (*G.*). — [I 11 *a* α] Sur la fonction $E(x)$ (285-287).

Giudice (*F.*). — [D 2 *c*] Sur les produits infinis à facteur général développable en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{n}$ (287-288).

Gebbia (*M*). — [T 2 *a*] Propriétés fondamentales de la statique des corps élastiques (320-323).

Pieri (*M*.). — [M_2 2 *h*] A propos de la Note de M. Rindi : *Sur les normales communes à deux surfaces* (323).

S. Rindi.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tome VI, 1892.

E. Bortolotti. — Sur la généralisation des fractions continues algébriques périodiques (p. 1-13).

Dans un précédent travail (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. V, 1891) l'auteur a étudié une propriété des *systèmes récurrents du troisième ordre et en particulier des systèmes périodiques:* il l'applique ici à la généralisation des fractions continues algébriques de Pincherle. Grâce à la méthode des déterminants, il généralise facilement les propriétés des fractions continues, et en particulier celle-ci, qu'*une fraction continue périodique représente une irrationnelle du second degré :* étant données deux fonctions z_1, z_2, développées en séries de puissances décroissantes de x, de degré respectivement -1, -2, on leur fait correspondre deux suites infinies $a_0, a_1, \ldots$; $b_0, b_1, \ldots$ (les a étant des binomes du premier degré et les b des constantes), et réciproquement. (*Voir* Pincherle, *R. Acc. Sc. Bologna*, 1890). *Quand les suites* (a), (b) *sont périodiques, et de même période, les fonctions* z_1, z_2 *sont déterminées par une équation algébrique du troisième degré.*

G. Pennacchietti. — Sur les courbes funiculaires (deux Mémoires) (p. 14-39).

L'auteur établit sous diverses formes les équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible; il montre comment on peut en faire dépendre l'intégration d'un système canonique, et met en évidence des propriétés qui ont leurs analogues dans le mouvement d'un point matériel. Citons l'étude du cas où les lignes d'action des forces agissantes appartiennent à un complexe linéaire ; et l'indication de classes de problèmes pour lesquels la courbe funiculaire reste la même lorsque les forces varient en satisfaisant toujours à certaines conditions.

G. Peano. — Lettre ouverte au professeur G. Veronese (p. 40-41).

A propos d'une interprétation erronée de Veronese (*Fondamenti di Geometria...*) d'une phrase de G. Peano (*Arithmetices pr.*).

G. Veronese. — A propos d'une lettre du professeur Peano (p. 42-47).

Réponse à la précédente.

G. Torelli. — Achille Sannia (Notice nécrologique) (p. 48-51).

G. Pennacchietti. — Sur le mouvement brachistochrone d'un système quelconque de points matériels (p. 52-62).

Les équations générales du mouvement brachistochrone d'un système de n points matériels, soumis à des forces dérivant d'un potentiel, sont formées d'après les règles classiques du calcul des variations, et mises sous forme canonique. On étudie ensuite le cas du corps solide, en particulier lorsque le moment des forces agissantes est nul par rapport à un point; enfin, lorsque les forces se réduisent à une seule passant par le centre de gravité, on obtient des conséquences intéressantes relatives au mouvement du solide.

G. Fouret. — Sur la génération des congruences de droites du premier ordre et de classe quelconque (p. 63-67).

Par des considérations élémentaires, l'auteur démontre le résultat suivant de Kummer : « *Excepté la congruence composée des cordes d'une cubique gauche, toute congrueuce du premier ordre et de $n^{ème}$ classe est formée des droites qui s'appuient à la fois sur une même droite et sur une même courbe d'ordre n, rencontrant cette droite en $n-1$ points.* »

D. Padelletti. — (Liste des publications de) (p. 68-72).

G. Veronese. — Observations sur une démonstration contre le segment infinitésimal actuel (p. 73-76).

Il s'agit d'une démonstration de Peano. (*Rivista di Matematica*, mars 1892.)

R. Alagna. — Les relations entre les invariants d'une forme quelconque du huitième ordre (p. 77-99).

Le système complet d'une forme f du huitième ordre possède neuf invariants fondamentaux, entre lesquels doivent exister trois relations. Le présent travail a pour but de trouver ces dernières. La méthode repose sur les considérations suivantes :

On sait qu'entre les invariants simultanés de deux formes biquadratiques existe une relation : si l'on considère deux covariants quelconques du quatrième ordre de la forme f, on obtient ainsi une relation pour chaque couple de covariants choisis. Substituons alors aux invariants simultanés du couple leurs expressions en fonction des invariants fondamentaux de f. Si, en opérant ainsi, on ne tombe pas sur une identité, on a une des relations cherchées. L'auteur

opère sur trois couples convenablement choisis, et montre que les relations obtenues ne sont pas des identités, et sont distinctes; il en résulte que ce sont celles que l'on voulait obtenir.

G. Vivanti. — Sur la détermination de quatre fonctions à l'aide d'une équation unique (p. 100-108).

L'équation dont il s'agit, déjà considérée par Bertrand à propos d'un problème de Mécanique (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 113-140), est la suivante

$$(f-\varphi)^2+(F-yf')(\Phi-x\varphi')=0$$

[f, F sont fonctions d'une variable x; Φ, φ sont fonctions d'une autre variable y].

La méthode employée repose sur un lemme important, concernant la détermination de fonctions $P_0, P_1, \ldots, P_n$ d'une variable x, $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ d'une variable y, lorsque ces fonctions sont liées par une relation de la forme

$$P_0+Q_0+\sum_{i=1}^{i=n} P_iQ_i=0.$$

L'équation de Bertrand est, en effet, de cette nature. Le lemme précédent, joint à la considération des équations différentielles simples qui s'introduisent, permet de résoudre complètement la question; la détermination des quatre fonctions cherchées dépend d'un certain nombre de *constantes* arbitraires; ce sont des fonctions rationnelles très simples.

G. Pennacchietti. — Sur des intégrales qui comprennent comme cas particulier l'intégrale des forces vives (p. 109-114).

P. del Pezzo. — Sur les surfaces de Riemann relatives aux courbes algébriques (p. 115-126).

Klein a indiqué une méthode très simple pour construire intuitivement la surface de Riemann correspondant à une courbe algébrique (*Math. Ann.*, t. V, p. 8).

Étant donnée une courbe plane algébrique, il suffit de considérer l'ensemble des points réels d'où l'on peut mener des tangentes imaginaires à la courbe, chacun de ces points étant regardé comme répété autant de fois qu'il y passe de tangentes imaginaires.

Cette Note a pour but d'étendre le procédé de Klein aux courbes de genre supérieur à zéro dans un espace à plus de deux dimensions : une première partie traite d'une courbe du quatrième degré dans l'espace à trois dimensions et, par suite, d'une courbe quelconque de genre un; une seconde est relative aux courbes de genre p.

G. Vivanti. — Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point qui dépendent linéairement des composantes de la vitesse (p. 127-138).

La recherche de ces intégrales conduit à l'équation, traitée par l'auteur dans un article précédent

$$(f - \varphi)^2 + (F - y f')(\Phi - x\varphi') = 0.$$

P. del Pezzo. — Sur les points singuliers des surfaces algébriques (p. 139-154).

Une courbe plane ayant un nombre fini de points singuliers peut, par une transformation de Cremona, se réduire à une autre dont tous les points singuliers sont ordinaires : c'est sur ce théorème que repose toute la théorie des singularités des courbes. Le présent travail a pour but de montrer qu'il existe un théorème analogue pour les surfaces algébriques et d'en tirer des conséquences : il donne la définition des *cycles* de nappes au voisinage d'une ligne singulière.

Extraits des procès-verbaux des séances (p. 155-164).

E. Bertini. — Observations sur les leçons de C. Neumann sur *la théorie de Riemann des intégrales abéliennes.* (Lettre au professeur A. Capelli) (p. 165-172).

R. Bettazzi. — Sur les points de discontinuité des fonctions de variable réelle (p. 173-195).

Si l'on considère une fonction y de variable réelle x définie sur un ensemble quelconque de points, dont a est un point limite, à droite ou à gauche, l'ensemble des valeurs de y au voisinage de a se rapproche quand x tend vers a d'un certain ensemble de valeurs qui est dit *ensemble frontière* de y pour $x = a$.

Un tel ensemble est fermé et compris entre deux valeurs précises appelées limites supérieures et inférieures d'indétermination pour $x = a$.

L'auteur expose d'abord quelques propriétés fondamentales des ensembles linéaires; puis il en tire diverses conclusions relatives aux ensembles frontières et à la manière dont une fonction peut tendre vers ses valeurs limites pour $x = a$. Signalons les théorèmes suivants : Si une fonction définie dans un intervalle (a, b) est continue pour tous les points intérieurs de l'intervalle, l'ensemble frontière pour une des extrémités se compose soit d'une valeur soit de toutes les valeurs d'un intervalle. Si pour chaque valeur d'un intervalle l'ensemble frontière n'a qu'une valeur, la fonction est continue sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de la variable.

M. Gebbia. — Sur certaines fonctions potentielles de masses répandues dans tout l'espace (p. 196-207).

L'auteur simplifie et améliore certains calculs d'intégrales définies faits dans un article paru précédemment sous le même titre (*Rendic.*, t. IV, p. 217 et suiv.).

Il étudie ensuite les fonctions potentielles d'une masse répandue dans l'espace dont la densité est une fonction potentielle de ligne, ou une dérivée première ou seconde d'une telle fonction. Il montre enfin que celles dont la densité est une dérivée seconde de fonction potentielle ont la propriété de se comporter à l'infini comme les fonctions potentielles ordinaires, ce qui leur donne les principales propriétés de ces dernières.

C. Segre. — Riccardo de Paolis (p. 208-224).

Notice biographique.

E. d'Ovidio. — Théorème sur les formes algébriques; application aux formes binaires du sixième ordre (p. 225-233).

Soient deux fonctions algébriques à plusieurs variables

$$f = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x + \ldots, \qquad \varphi = \alpha_0 x_1^n + n \alpha_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots.$$

Considérons l'opération d'Aronhold

$$d_{f\varphi}^i = \frac{1}{i!} \sum \frac{\partial_i}{\partial a_\eta \ldots \partial a_r \partial a_s} \alpha_\eta \ldots \alpha_r \alpha_s \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

et supposons que les coefficients de φ soient des fonctions entières et homogènes de ceux de f, telles que le résultat $d_{f\varphi}\varphi$ soit de forme $Mf + N\varphi + P\psi + \ldots$, où M, N, P, ... sont des fonctions entières et homogènes des coefficients de φ. Considérons, en outre, une forme invariante de f, ω_f telle que

$$d_{f\varphi}\omega_f = A\omega_f; \qquad d_{f\psi}\omega_f = T\omega_f; \qquad \ldots.$$

où A, T, ... sont des fonctions entières et homogènes des coefficients de f. On a alors

$$\omega_{f+\lambda\varphi+\mu\psi+\ldots} = \Sigma \lambda^q \mu^r \ldots d_{f\varphi}^q d_{f\psi}^r \ldots \omega_f.$$

Tel est le théorème que démontre l'auteur, théorème dont des cas particuliers étaient connus et dont il fait l'application aux formes binaires du sixième ordre.

M. Pieri. — Sur les transformations birationnelles attachées à un complexe linéaire spécial (p. 234-244).

La présente Note donne les correspondances de Cremona les plus générales établies entre deux espaces superposés, pour lesquelles les couples de points homologues sont distribués biunivoquement sur les droites s'appuyant sur une droite fixe.

De telles transformations peuvent être d'ordre aussi grand qu'on le veut, à l'inverse de ce qui se passe pour les transformations birationnelles attachées à un complexe linéaire général, lesquelles sont au plus d'ordre 11 ; mais, comme ces dernières, elles ont la propriété d'être complètement déterminées au moyen d'une ou de deux courbes. Elles fournissent immédiatement les représentations

perspectives (1, 1) ou (2, 1) les plus générales du complexe linéaire spécial sur l'espace ponctuel ordinaire.

Notice nécrologique de E. Betti (p. 245-246).

M. Janet.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO (1).

Serie 2ª; tome L, 1901.

Daniele (*E.*). — [O6*k*] Sur les déformations infinitésimales des surfaces flexibles et inextensibles (25-62).

1. Étant λ, μ, ν les composantes du déplacement du point M (u, v) par rapport aux axes u, v, w (où w est la normale) et en posant

$$(1)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\nu}{\partial v} - \dfrac{D'}{\sqrt{EG}}\lambda - \dfrac{D''}{G}\mu, \\ -q = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\nu}{\partial u} - \dfrac{D}{E}\lambda - \dfrac{D'}{\sqrt{EG}}\mu, \\ 2r = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\mu}{\partial u} - \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} - \dfrac{1}{\sqrt{EG}}\left(\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mu - \dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda\right), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} + \dfrac{1}{\sqrt{EG}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mu - \dfrac{D}{E}\nu, \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\mu}{\partial v} - \dfrac{1}{\sqrt{EG}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\lambda - \dfrac{D''}{G}\nu, \\ 2h = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\mu}{\partial u} - \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} - \dfrac{1}{\sqrt{EG}}\left(\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda + \dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mu + 2D\nu\right), \end{cases}$$

pour un point P infiniment rapproché de M, dont les coordonnées (l, m, n) suivant les axes u, v, w sont

$$l = \sqrt{E}\,du, \qquad m = \sqrt{G}\,dv, \qquad n = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} \lambda' - \delta\lambda &= \lambda - rm + al + hm, \\ \mu' - \delta\mu &= \mu - rl + hl + bm, \\ \nu' - \delta\nu &= \nu + pm - ql, \end{aligned}$$

et le déplacement de ce point P peut se décomposer en deux dont l'un (A) a pour composantes

$$\Lambda_u = \lambda - rm, \qquad \Lambda_v = \mu - rl, \qquad \Lambda_w = \nu + pm - ql.$$

(1) Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XXXI, p. 176.

et l'autre (B)

$$B_u = al + hm, \qquad B_v = hl + bm, \qquad B_w = 0.$$

Le premier est celui qui appartient à l'élément considéré comme rigide (translation λ, μ, ν et rotation p, q, r autour de M), le second est une *déformation pure* dans le plan de l'élément, déformation à fonction potentielle,

$$f(l, m) = \frac{1}{2}(al^2 + 2hlm - bm^2),$$

composée de deux dilatations perpendiculaires dans les directions des axes de la conique

$$al^2 + 2hlm + bm^2 = \varepsilon \qquad \text{(constante infinitésimale)}.$$

Si l'on prend des nouvelles lignes coordonnées u_1, v_1, tangentes en M aux axes de cette conique, la fonction potentielle du déplacement devient

$$f_1(l_1, m_1) = \frac{1}{2}(a_1 l_1^2 + b_1 m_1^2);$$

a_1, b_1 sont les allongements unitaires dans les directions u_1, v_1, et

$$2a_1 = a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2},$$
$$2b_1 = a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2};$$

les quantités a, b, h sont appelées les *coefficients* de la déformation pure pour l'élément considéré.

2. Les axes de la conique mentionnée plus haut sont appelés *les axes* de la dilatation de l'élément et ils sont aussi les rayons unis d'une projectivité qui a lieu entre les directions joignant respectivement le point M à un point P de l'élément et au point P′ qui en est le transformé par le déplacement.

Les axes de la dilatation, considérées en tout point de la surface, enveloppent un double système de courbes orthogonales, les *lignes de déformation*, dont dont l'équation différentielle est

$$h(E\,du^2 - G\,dv^2) + (b - a)\sqrt{EG}\,du\,dv = 0.$$

Suit la détermination de la *dilatation linéaire* dans une direction quelconque, et le théorème suivant :

Les dilatations linéaires a, b pour deux directions orthogonales quelconques ont une somme constante et égale à $a_1 + b_1$. Cette somme représente aussi la dilatation superficielle (pour l'élément considéré) rapportée à l'aire unité.

Autres propriétés relatives aux directions qui conservent leurs inclinaisons mutuelles, à celles de déviation maxima, etc.

En calculant les variations de E, F, G en fonction de ξ, η, ζ, l'auteur obtient

$$\delta E = 2aE, \qquad \delta F = 2h\sqrt{EG}, \qquad \delta G = 2bG.$$

et en conclut que les conditions $a = h = b = 0$, qui coïncident avec

$$\delta E = \delta F = \delta G = 0,$$

sont celles de l'inextensibilité de la surface. En calculant la variation de EG, on obtient

$$\delta(EG) = 2EG(a + b),$$

et la condition $a + b = 0$ est celle de l'inextensibilité dans le sens de Lagrange (invariabilité de l'aire).

3. Les composantes p, q, r de la rotation et les coefficients a, h, b de la déformation pure sont liées par trois équations que l'auteur obtient en résolvant les (1), (2) par rapport aux dérivées de λ, μ, ν et en déterminant les conditions d'intégrabilité pour les trois équations aux différentielles totales qui doivent être satisfaites par λ, μ, ν. Les six quantités étant données de manière que ces relations soient satisfaites, la déformation est déterminée lorsque l'on connaît le déplacement d'*un* point.

Si l'on donne a, h, b, la détermination de p, q, r se réduit à l'intégration d'une seule équation du deuxième ordre par rapport à r, qui est une généralisation de l'*équation caractéristique* de Weingarten.

Suit le cas d'une surface plane, et en particulier de la déformation uniforme, pour laquelle

$$\lambda + i\mu = f(u + iv),$$

ce qui entraîne $a = b, h = 0$. Si la déformation de la surface plane est *homogène*, c'est-à-dire si a, b, h sont constantes sur toute la surface, on trouve que λ, μ sont des fonctions linéaires de u, v.

En revenant au cas d'une surface quelconque, l'auteur trouve que, si dans la déformation il n'y a pas de rotation ($p = q = r = 0$), les lignes de courbure sont des lignes de déformation.

4. Recherche de l'équation caractéristique par la méthode de Weingarten.

5. Décomposition d'une déformation infinitésimale d'une surface extensible; étude d'une *extension pure* particulière.

Cette dernière déformation est celle où le déplacement de tout point a lieu sur la normale.

Tome LI; 1902.

Fano (*G.*). — [$N_2 1 g \alpha$] Nouvelles recherches sur les congruences de droites du troisième ordre dépourvues de ligne singulière (1-79).

Pour une congruence de l'ordre m, de la classe n et du rang r, on appelle *genre sectionnel* le nombre

$$p = (m - 1)(n - 1) - r,$$

qui est le genre des courbes sections hyperplanes de la surface de l'espace S_r

(contenue dans la quadrique P_4^2 des droites) sur laquelle on peut représenter la congruence donnée. Voici les résultats principaux que l'auteur résume à la fin du Mémoire.

Les congruences du troisième ordre dépourvues de ligne singulière sont toutes de classe $n \leqq 13$ et de genre sectionnel $\leqq 6$.

Du genre $p = 0$, il n'y a que la congruence crémonienne (3,1) engendrée par deux plans collinéaires en position générale.

Celles de genre $p = 1$ ($n \leqq 6$) peuvent s'obtenir toutes comme projections de systèmes de droites renfermées en des variétés cubiques de S_4 avec un nombre fini et $\leqq 6$ de points doubles.

Celles du genre $p = 2$ ($n \leqq 9$) contiennent toutes un unique système ∞^1 rationnel d'indice 3 de quadriques réglées enveloppant la surface focale (du huitième ordre).

Celles de genre $p = 3$ ($n \leqq 13$) contiennent un cône elliptique d'ordre $n - 1$ (extension des congruences du deuxième ordre et de première espèce qui contiennent un cône rationnel d'ordre $n - 1$).

Celles de genre $p = 4$ ($n \leqq 9$) sont toutes contenues dans un complexe tétraédral (et forment l'extension de celles du deuxième ordre et de deuxième espèce) à l'exception :

1° De la congruence (3,3), intersection d'un complexe linéaire non spécial avec un complexe cubique;

2° De la congruence (3,9) formée par un système ∞^1 d'indice 3 de quadriques réglées n'ayant pas de génératrices en commun.

Celles de genre $p = 5$ sont toutes de la classe $n = 6$ et contiennent 10 cônes cubiques elliptiques.

Celles de genre $p = 6$ sont de classe $n = 7$ et contiennent 20 cônes cubiques elliptiques.

Toutes ces congruences sont représentables sur le plan, à l'exception de celle de genre $p = 6$ et de quelques-unes de genre $p = 4$.

Severi (*F.*). — [O3*h* ref. Q2] Sur certaines singularités des courbes d'un hyperespace (81-114).

Première Partie. — Soit une courbe C de S_r, pour laquelle soient :

n, l'ordre,
n_i, le rang $i^{\text{ième}}$,
m, la classe,
d, le nombre des points doubles,
ρ, le nombre des rebroussements,
ρ_1, le nombre des S_i stationnaires,
h, le nombre des points doubles apparents,
p, le genre.

Alors la surface réglée, lieu des cordes, chacune desquelles se trouve dans l'hyperplan osculateur en l'un des points d'appui, est de l'ordre

$$x = 2h + m(n-1) - (r-1)n_1 - (r-2)\rho.$$

Si chaque corde doit être dans un hyperplan osculateur en un point qui ne

soit pas l'un des points d'appui, on trouve l'ordre du lieu de ces cordes

$$y = \frac{1}{2}[m(n-1)(n-2r) + 2h(m-2r) + r(r-1)n_1 + (r-1)(r-2)\rho].$$

Le nombre des cordes *principales*, chacune desquelles est dans les plans osculateurs en tous les deux points d'appui, est

$$x = \binom{m-r}{2} + \binom{n-r}{2} - 2p\binom{r+1}{2} - d.$$

Après ces résultats, l'auteur trouve le nombre des groupes cycliques d'indice donné, dans une correspondance T d'indices α, β et de valence γ sur une courbe de genre p. En posant

$$(\nu) = \alpha^\nu + \beta^\nu + (-1)^{\nu+1} 2\gamma^\nu p,$$

il trouve que le nombre cherché est

$$\frac{1}{\nu}\left[(\nu) - \sum\left(\frac{\nu}{\nu_{i_1}}\right) + \sum\left(\frac{\nu}{\nu_{i_1}\nu_{i_2}}\right) - \ldots + (-1)^q\left(\frac{\nu}{\nu_1\ldots\nu_q}\right)\right],$$

avec les Σ étendues à toutes les combinaisons simples des $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ qui sont les facteurs premiers de ν.

Si la correspondance T est celle où à tout point on fait correspondre les autres points d'intersection du plan osculateur, les groupes cycliques donnent ce que l'auteur appelle les *polygones principaux*.

Deuxième Partie. — Ici la courbe est supposée sans points multiples et l'auteur étudie les espaces ayant des contacts donnés avec la courbe, ou qui touchent la courbe et la rencontrent en d'autres points.

Suivent des recherches particulières aux courbes de l'espace S_4. Puis d'autres relatives aux courbes de l'espace S_5, par la méthode fonctionnelle de Cayley. Dans ce but, il donne d'abord l'intégration de l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)\\ &\quad = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \varphi(x'_1, \ldots, x'_n) + f(x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n),\end{aligned}$$

où f est une fonction donnée, et les x, x' sont des entiers positifs, le zéro compris, et trouve pour la forme de φ :

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1, \ldots, x_n)\\ &= \sum_1^n{}_k C_k x_k + \sum_1^n{}_k \sum_1^{x_k-1}{}_i f(0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, x_k - i, 0, \ldots, 0)\\ &\quad + \sum_2^n{}_i f(0, \ldots, 0, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n; 0, \ldots, 0, x_{i-1}, 0, \ldots, 0),\end{aligned}$$

les C étant des constantes arbitraires ; par 1_k on indique qu'on a fait $x_k = 1$.

Veneroni (E.). — [$N_3 f$] Sur les connexes bilinéaires entre points et droites dans l'espace ordinaire (115-158).

I. Correspondance entre les points d'un espace S et les droites d'un autre espace Σ. Aux points de S correspondent des complexes en Σ et à une droite de Σ correspondent les points d'un plan de S. L'équation de cette correspondance est

$$(1) \qquad \Sigma_{ik,s}\, c_{ik,s}\, x_{ik}\, x_s = 0,$$

étant

$$i, k, s = 1, 2, 3, 4 \qquad \text{et} \qquad c_{ik,s} = -c_{ki,s},$$

et les x_{ik} étant les six coordonnées d'une droite, et les x_s les quatre coordonnées d'un point. Ainsi au point x_s correspond le complexe

$$(2) \qquad \rho\xi_{ik} = \Sigma_s\, c_{ik,s}\, x_s,$$

et à la droite x_{ik} correspond le plan

$$(3) \qquad \mu\xi_s = \Sigma_{ik}\, c_{ik,s}\, x_{ik}.$$

Le connexe est appelé de première, deuxième ou troisième catégorie suivant que les complexes du système linéaire (2) ont en commun deux droites distinctes, ou deux droites coïncidantes, ou un faisceau de droites.

Par un choix convenable des éléments fondamentaux, on peut réduire l'équation d'un connexe de la première catégorie à la forme plus simple

$$x_1 x_{12} + x_2 x_{23} + x_3 x_{14} + x_4 x_{31} = 0,$$

et aux complexes spéciaux correspondent les points de la quadrique

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0.$$

Une semblable réduction a lieu pour la deuxième et la troisième catégorie.

Le connexe est *spécialisé* lorsque la matrice

$$\| c_{ik,s} - c_{ki,s} \|$$

a la caractéristique 3. Dans ce cas les complexes (3) appartiennent à un réseau et la correspondance se réduit à une homographie entre les droites d'une étoile et les complexes d'un réseau.

Lorsque la caractéristique de la matrice est 2, le connexe est *deux fois spécialisé*, et se réduit à une homographie entre un faisceau de complexes et un faisceau de plans.

Dans le cas où la caractéristique est 1 (connexe *trois fois spécialisé*), tous les points de l'espace correspondent à un même complexe.

II. Cas des espaces S et Σ superposés. On obtient une espèce de Nullsystem en faisant correspondre à un point M le plan polaire μ′ de M par rapport au complexe correspondant. Alors à un plan μ′ correspondent trois points de ce même plan.

Les points qui correspondent aux plans μ′ passant par un point P forment une quadrique Q. Toutes ces quadriques forment un système linéaire à cinq points de base, qui sont appelés les cinq *points unis* du connexe.

Un connexe a huit, sept ou cinq invariants absolus suivant qu'il est de la première, deuxième ou troisième catégorie; et pour chacun de ces cas l'auteur trouve la forme réduite de l'équation.

Les types de connexes pour lesquels les points unis sont en nombre infini, sont pour la première et la deuxième catégorie, les suivants :

a. Connexes avec une droite de points unis et deux points unis extérieurs à la droite.

b. Connexes avec une conique de points unis et un point uni qui n'est pas sur la conique.

c. Connexes avec une cubique gauche de points unis.

Il y a aussi des cas semblables pour la troisième catégorie.

Le paragraphe II se termine par l'examen de deux types de connexes une fois spécialisés. Un connexe une fois spécialisé est déterminé par une correspondance projective entre les droites d'une étoile (A_1) et les complexes d'un réseau (R). En supposant que (R') soit le réseau des complexes spéciaux dont les axes forment (A_1), et qu'il soit rapporté projectivement aux rayons de (A_1) même, de manière qu'un rayon de (A_1) corresponde au complexe spécial ayant ce rayon pour axe, on a un connexe une fois spécialisé, pour lequel tous les points de l'espace sont unis, et que l'auteur appelle connexe à *sections identiques*. Si y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coordonnées du point A_1 (centre du connexe) et si l'on pose

$$\begin{aligned} X_1 &= -(x_2x_{34} + x_3x_{42} + x_4x_{23}), \\ X_2 &= \quad x_2x_{14} - x_1x_{14} - x_1x_{34}, \\ X_3 &= \quad (x_4x_{12} - x_1x_{24} + x_2x_{41}), \\ X_4 &= \quad x_1x_{23} - x_2x_{31} - x_3x_{12}, \end{aligned}$$

l'équation de ce connexe est

$$\sum_1^4 y_r X_r = 0.$$

Le paragraphe IV est relatif à l'intersection de deux connexes bilinéaires et aux faisceaux de connexes; le paragraphe V à l'intersection de trois ou quatre connexes; le paragraphe VI et dernier à un système linéaire ∞^1 de connexes homofocaux.

Panetti (*M.*). — [T2*a*] Contribution à la tractation graphique de l'arc continu sur des appuis élastiques (307-333, trois planches).

Tome LII: 1903.

Severi (*F.*). — [M_2 I *a*, *b* ref. Q2] Sur les intersections des variétés algébriques et sur leurs caractères et singularités projectives (61-118).

L'auteur traite trois espèces de questions (questions d'*équivalence*) :

1° Étant définies plusieurs variétés $V_{k_1}^1, \ldots, V_{k_p}^p$ en S_r par certains caractères, déterminer les caractères de la variété de $\Sigma k_i - (p-1)r$ dimensions qui leur est commune, les variétés étant supposées en position générale.

2° En supposant que l'intersection se décompose et ayant assigné les caractères de l'une de ses parties, déterminer ceux de l'autre et de la variété commune aux deux parties.

3° En supposant que les V aient en commun une partie de dimension $h > \Sigma k_i - (p-1)r$, dont les caractères soient donnés, déterminer ceux de l'autre partie commune à $\Sigma k_i - (p-1)r$ dimensions et ceux de la variété commune aux deux parties.

L'auteur introduit un caractère qu'il appelle *coetus* $i^{\text{ième}}$ de la variété V, qui est l'ordre de la M_{k-i}, lieu des points de contact des S_k qui sont tangents à V et s'appuient à un S_{r-k-i} donné. En indiquant ce caractère par ω_i on a, par exemple :

Les deux variétés V_k et $V'_{k'}$ ayant des singularités quelconques, dont les *coetus* soient respectivement $\omega_0, \omega_1, \ldots; \omega'_0, \omega'_1, \ldots$ et qui soient en position générale, ont en commun une variété de $k+k'-r$ dimensions dont le coetus ν_i est donné par

$$\nu_i = \Sigma_l \omega_l \omega'_{s-l}$$

(où ω_0 et ω'_0 coïncident respectivement avec les ordres des deux variétés).

La *classe* $i^{\text{ième}}$ ρ_i d'une variété V est l'ordre de la M_{k-i} des points de contact des S_k tangents à V et s'appuyant à un $S_{r-k+i-2}$ donné suivant un S_{i-1}. Étant Φ_h une variété contenue avec une certaine multiplicité dans une V_k, et celle-ci dans S_r, et en posant

$$d = \sum_0^k a_i + \frac{1}{2}k(k+3) - (k+1)r,$$

l'ordre de la M_{d+h-k} des points de contact des S_k tangents à V en des points de Φ et appartenant à la figure $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ (suivant la notation de Schubert), est appelé *caractère d'immersion* $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ de Φ en V.

La *classe* z_i *d'immersion* de Φ en V est l'ordre de la M_{h-i} des points de contact des S_k tangents à V en des points de Φ qui s'appuient sur un $S_{r-k+i-2}$ suivant un S_{i-1}; le *coetus* y_i *d'immersion* est l'ordre de la M_{h-i} des points de contact des S_k tangents à V en des points de Φ, s'appuyant en un point sur un S_{r-k-} donné.

Quant aux relations liant entre eux les caractères des deux courbes qui, prises ensemble, constituent l'intersection complète de deux variétés, l'auteur obtient le résultat suivant :

Une variété V_k d'ordre ρ_0 et de classe première ρ_1 et une variété $V'_{k'+1}$ d'ordre ρ'_0 et de classe première ρ'_1, contenues dans S_r $(r = k+k')$, ayant en commun une courbe qui soit s-uple ordinaire pour V et s'-uple ordinaire pour V', et supposées en position générale, se coupent ultérieurement en une courbe d'ordre μ_0 et de classe μ'_1, et dont les classes d'immersion en V et en V' sont respectivement z'_1 et ζ'_1, ayant avec la première courbe d points communs; et les caractères de la seconde courbe s'expriment en fonction de ceux de la première $\mu_0, \mu_1, z_1, \zeta_1$ au moyen des formules

$$\mu'_0 = \rho_0\rho'_0 - \rho_0 ss',$$
$$\mu'_1 = \rho_1\rho'_0 + \rho_0\rho'_1 + \rho_1 ss' - \rho_0 z_1 s' - 2\zeta_1 s,$$
$$z'_1 = \rho_1\rho'_0 - z_1 s',$$
$$\zeta'_1 = \rho'_1\rho_0 - \zeta_1 s,$$
$$d = z_1 s' - \zeta_1 s - \rho_1 ss'.$$

La méthode suivie consiste généralement à trouver les coïncidences dans une certaine correspondance. Par exemple, dans le cas de la proposition citée, l'auteur prend en S_r un π_{r-2} général, et appelle un S_{k-2} de π *associé* à un $S_{k'-1}$ de π lorsque par S_{k-2} passe un S_k tangent à V et par $S_{k'-1}$ un S_k tangent à V' au même point, et cherche combien de fois deux espaces associés ont un point commun : il établit de cette manière la formule

$$\mu_1 ss' + d = z_1 s' + \zeta_1 s.$$

Au sujet des relations entre les caractères de deux surfaces constituant ensemble l'intersection complète de deux formes de S_4, il montre comme, en connaissant les caractères de l'une de ces deux surfaces, on peut calculer ceux de l'autre.

Ensuite, il trouve les relations entre les caractères de deux surfaces constituant ensemble l'intersection complète de $r-2$ formes dans S_r (étant $r > 4$).

Il est à remarquer que dans toutes les formules qui donnent la résolution de ces questions, n'entrent que des nombres dont la définition dépend de chacune des variétés, considérée en elle-même et ne dépendent nullement de nombres dont la définition suppose la considération simultanée des variétés en question.

La question complètement générale sur les caractères de deux surfaces constituant ensemble l'intersection complète d'une V_k et d'une $V'_{k'+2}$ en S_r (étant $r = k + k'$) n'est pas traitée, et l'auteur indique ce qu'il faudrait faire pour résoudre ce problème général. Soit Γ la courbe lieu des points de contact des S_k tangents à V en des points de F et s'appuyant sur un S_{r-k-1} donné, et Γ' le lieu des points de contact des $S_{k'-2}$ tangents à V' en des points de F et s'appuyant sur un S_{k-3} donné. L'ordre de Γ est le caractère d'immersion de F en V, et l'ordre de Γ' celui de F en V'. Le nombre des points communs à Γ et Γ' donne celui des points de F tels qu'un S_k tangent à V en chacun de ces points s'appuie sur un S_{r-k-1} donné, et un $S_{k'-2}$ tangent à V' au même point s'appuie sur un S_{k-3} donné. Pour résoudre la question générale mentionnée ci-dessus, il faudrait exprimer ce nombre en fonction de caractères intrinsèques des deux courbes Γ et Γ', et dont la définition n'impliquât pas la considération simultanée de ces courbes, ou, ce qui revient au même, des deux variétés V et V'.

Le dernier Chapitre (Chap. IV) contient les recherches suivantes :

1° Nombre des points où se coupent ultérieurement deux variétés V_k, $V'_{k'}$ (étant $k + k' = r$) ayant en commun une courbe s-uple pour V et s'-uple pour V'. On trouve

$$N = \zeta_0 \zeta'_0 - \mu_0 ss' - z_1 s' - z'_1 s + \mu_1 ss'.$$

2° Caractères de la courbe où se coupent $r-1$ formes de S_r en dehors d'une M_h pour laquelle elles passent toutes ($r > 2h$). Nombre des points où se coupent r formes en dehors d'une M_h commune.

3° Nombre des points communs à r formes de S_r en dehors d'une M_h ($2h < r$) double pour quelques-unes des formes et simple pour les autres.

Garbasso (*A.*). — [T7*a*] Sur les courants de décharge des condensateurs suivant deux circuits dérivés (145-169).

Giambelli (*G.-Z.*). — [Q2] Résolution du problème des espaces sécants (171-211).

Le problème est résolu complètement par l'auteur en donnant le moyen d'ex-

primer le produit de plusieurs conditions caractéristiques imposées à un espace [s] au moyen d'une somme de conditions caractéristiques. Des cas plus ou moins particuliers avaient été étudiés et résolus par Schubert même, par Castelnuovo et par Pieri. Ici l'auteur, en employant deux formules données par M. Pieri, qu'il démontre de nouveau sans appliquer le principe de la conservation du nombre, mais seulement le calcul symbolique de Schubert, exprime une condition caractéristique arbitraire au moyen d'un déterminant formé avec les conditions particulières qui imposent à l'espace [s] de couper en un point un espace donné. De là il déduit la résolution numérique du problème. Puis, par l'application des résultats trouvés, et au moyen d'un nouveau calcul symbolique, donne le moyen de construire les formules relatives à un produit quelconque de conditions caractéristiques, et enfin une formule explicite relative à un tel produit. Le procédé suivi par l'auteur met aussi en lumière une relation entre le problème des espaces sécants et la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation.

Guidi (*C.*). — [T2*a*] L'arc élastique sans charnières (293-332, 6 planches).

Morera (*G.*). — [H6*b*] Sur l'intégration des équations aux différentielles totales du deuxième ordre (333-349).

Une équation aux différentielles totales de l'ordre r, illimitément intégrable, c'est-à-dire satisfaite par une relation entre les variables, renfermant des constantes arbitraires (une au moins), peut être *complètement* ou *incomplètement* intégrable. Le premier cas a lieu lorsqu'on peut prendre arbitrairement la valeur initiale de l'une des variables et celles de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $r-1$; le second, lorsqu'on ne peut prendre arbitrairement que les valeurs de s dérivées partielles, étant $s < r-1$.

Pour les équations de deuxième ordre, l'auteur démontre que, aussi bien dans le cas de l'intégrabilité complète que dans celui de l'intégrabilité incomplète, l'intégration peut être obtenue en intégrant une équation différentielle du premier ordre.

La méthode suivie par l'auteur consiste à appliquer une observation faite par lui-même dans les *Math. Ann.*, t. XXVII, 1886 (*Ueber die Integration der vollständigen Differentiale*), c'est-à-dire que l'application du théorème de Mayer (par lequel l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales à intégrabilité illimitée peut se réduire a celle d'un système d'équations différentielles ordinaires) équivaut, dans le champ des variables indépendantes, à choisir la ligne d'intégration en partant des valeurs initiales assignées.

S. Rindi.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO [1].

Tome XLVI, 1910-11.

Sannia (*G.*). — [B 1 *e*] Le réciproque d'un déterminant infini normal (31-48).

Sannia (*G.*). — [B 1 *e*] Extension des théorèmes de Sylvester et de Hadamard aux déterminants infinis normaux (67-77).

Rainaldi (*B.*). — [U] Sur la durée du Soleil sur l'horizon de Turin en 1906-1909 (103-142, une planche).

Colonnetti (*G.*) — [T 2 *b*] Sur les lignes d'influence de la poutre continue invariablement liée à ses appuis (229-242, une planche).

Pizzetti (*P.*). — [U 10 *a*] Sur le calcul théorique des déviations du géoïde de l'ellipsoïde (331-350).

Jadanza (*N.*). — [T 3 *a*] Sur certains systèmes composés de deux lentilles et sur le niveau de H. Wild construit par la maison Zeiss, à Iéna (350-370).

Pagliero (*G.*). — [H 12] Sur le reste dans la formule de Lubbock (389-408).

Jacoangeli (*O.*). — [U 10] Démonstration géométrique de la règle de Bessel (441-446).

Réduction des angles à l'horizon.

Colonnetti (*G.*). — [T 2 *b*] Sur l'équilibre élastique des systèmes réticulaires plans (450-460, une planche).

Burali-Forti (*C.*). — [O 5 ref. B 12] Quelques applications de l'opérateur homographique C à la géométrie différentielle sur une surface (461-481).

L'opérateur C est celui qui produit l'homographie

$$Cx = I_1 x \quad x$$

---

[1] Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XXXVI$_2$, p. 10[illegible].

Il est à remarquer la simplicité des calculs par lesquels l'auteur, au moyen de cet opérateur et du calcul vectoriel, obtient des résultats qui, en introduisant les coordonnées, exigeraient des procédés plus ou moins longs et pénibles. En particulier, il obtient la *fonction caractéristique* d'une déformation infinitésimale et ses propriétés.

Sisam (*C.-H.*). — [N_3 ref. Q 2] Sur les connexes algébriques hyperconiques dans les espaces de r dimensions (481-487) [en anglais].

Ces connexes sont constitués par les couples de points de S_r satisfaisant à l'équation

$$F(\overset{m}{x_0, \ldots, x_r}; \overset{n}{y_0, \ldots, y_r}) = 0,$$

de degré m par rapport aux x et de degré n par rapport aux y, et telle qu'en fixant les x, l'équation obtenue

$$\Phi(y_0, \ldots, y_r) = 0$$

représente un hypercône dont $x_0, \ldots, x_r$ est le sommet. Cette équation renferme

$$\frac{(m-r-1)!\,(n-r-1)!\,(m-n-1)!}{(m-1)!\,(r-1)!\,n!\,r!},$$

paramètres essentiels.

Laura (*E.*). — [T 2 *a*] Sur une classe générale de vibrations des milieux isotropes (517-538).

Vibrations dont les composantes sont du type

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\, u_i(x, y, z),$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\, v_i(x, y, z),$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\, w_i(x, y, z),$$

qui constituent une généralisation des vibrations *affaiblies*, étudiées par l'auteur, et dont les composantes sont

$$u = e^{-k^2 t}(u_1 \cos kt + \mathbf{u}_1 \sin kt),$$
$$v = e^{-k^2 t}(v_1 \cos kt + \mathbf{v}_1 \sin kt),$$
$$w = e^{-k^2 t}(w_1 \cos kt + \mathbf{w}_1 \sin kt),$$

les u_1, v_1, w_1, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_1$ étant des fonctions de position. Il trouve ainsi des

vibrations

$$\begin{aligned} u = \quad & e^{-k^2 t}\cos kt\,(u_0 + u_1 t + \ldots + u_n t^n) \\ & + e^{-k^2 t}\sin kt\,(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 t + \ldots + \mathbf{u}_n t^n), \\ v = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

qu'il appelle vibrations *affaiblies* d'ordre n. Elles sont engendrées dans un milieu isotrope par des forces de masse et des tensions superficielles dépendant du temps, mais les vibrations simples dont elles se composent ne peuvent exister séparément. L'étude de ces vibrations dépend de l'intégration du système

$$\alpha_i'' = h_{1i}\alpha_1 + h_{2i}\alpha_2 + \ldots + h_{ni}\alpha_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans le cas où l'équation

$$\begin{vmatrix} h_{11} - h & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - h & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} - h \end{vmatrix} = 0$$

a des racines imaginaires multiples. Cette étude est simplifiée par la considération des *complexes d'ordre n* (de n éléments) et de leurs substitutions. Suit le cas des vibrations longitudinales.

Fontana (V.). — [U] Le micromètre de l'équatorial de l'Observatoire Peratoner, à Florence (634-649).

Burali-Forti (C.). — [C2 ref. B12] Sur une formule générale pour la transformation d'intégrales d'homographies vectorielles (745-765).

Formule pour transformer une intégrale de volume en une intégrale étendue à la surface.

Étant U un système linéaire de fonctions d'un point variable P ; V la classe des opérateurs linéaires, fonctions de P, transformant des vecteurs en des éléments de U ; μ un opérateur linéaire, fonction de P, transformant des vecteurs en des éléments de V ; N le vecteur unité normal à la surface σ du volume τ, on a : les conditions

$$(1) \qquad \int_\tau [\Phi(\mu)\,\mathbf{u} + \Psi(\mu, \mathbf{u})]\,d\tau = -\int_\sigma (\mu N)\,\mathbf{u}\,d\sigma,$$

$$(2) \qquad \text{pour } \mathbf{u} = \text{const.}, \qquad \Psi(\mu, \mathbf{u}) = 0,$$

déterminent univoquement les fonctions Φ et Ψ, éléments des classes V et U respectivement. L'existence de Φ et Ψ a lieu lorsqu'il existe les dérivées de μ et de $\mathbf{u}$ par rapport à P.

Pour des valeurs particulières de μ, par exemple

$$\mu x = (\alpha x)\Lambda,$$
$$\mu x = (x \wedge c)\Lambda,$$

on tire de (1) des formules générales remarquables.

Pagliero (*G.*). — [I 2 *b*] Les nombres premiers depuis 100000000 à 100005000 (766-770).

Ricci (*C.-L.*). — [T 2 *a*] Relations entre les forces et les déplacements pour un système rigide soumis à des liens élastiques (789-823).

Aimonetti (*C.*). — [U 10] Une modification de l'appareil pendulaire de Sterneck et nouvelle détermination de la gravité relative à Turin et à Gênes (893-910).

Jorio (*C.*). — [U 10] Conjonction du Bureau de Géodésie agrégé à l'Université de Turin au réseau géodésique italien (911-933).

Panetti (*M.*). — [T 26] Sur l'ellipse d'élasticité des tiges courbées en arc de cercle et sur ses applications au calcul des régulateurs Lentz (988-1003).

Boggio (*T.*). — [S 36] Sur le mouvement d'un courant libre, détourné par une paroi rigide (1024-1047).

S. Rindi.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO [1].

Tome VII, année 1893.

Enrico d'Ovidio. — Application aux quintiques d'un théorème sur les formes algébriques (1-4).

Ce théorème a été démontré par l'auteur dans le Tome VI des *Rendiconti* et déjà appliqué aux sextiques.

Berzolari (*L.*). — Sur les combinantes d'un système linéaire de quintiques (5-18).

La détermination effective des relations identiquement vérifiées par les combinantes élémentaires d'un système linéaire de formes binaires n'avait été faite auparavant que pour les formes cubiques et biquadratiques. L'auteur traite le problème dans le cas des quintiques au moyen d'un calcul symbolique, en utilisant certains résultats de M. Stephanos. Les formules trouvées lui servent à déterminer la biquadratique apolaire commune à deux quintiques.

---

[1] Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XXXVII$_2$, p. 85.

Gerbaldi (*F.*). — Sur les courbes planes du troisième ordre (19-25).

En s'appuyant sur des résultats dus à Clebsch et Gordan, l'auteur détermine l'enveloppe de la droite polaire d'un point par rapport à une cubique plane, quand le pôle parcourt une courbe du faisceau syzygétique : celui-ci comprend deux courbes pour lesquelles l'enveloppe est la cayleyenne.

Marcolongo (*R.*). — Sur un point de la théorie de la rotation d'un corps (26-28).

Marcolongo (*R.*). — Sur la recherche des centres de courbure des trajectoires des points d'une figure mobile (29-36).

Construction de Bobilier et Savary, établie par l'étude de l'accélération des points d'une figure mobile dans un plan.

Gebbia. — Notice sur Giuseppe Albeggiani, président du Cercle mathématique de Palerme (39-47).

Guccia (*G.-B.*). — Deux propositions relatives aux involutions d'espèce quelconque admettant des singularités ordinaires (49-60).

Quand on considère sur une droite une série K fois infinie de groupes de n points ($n \geqq K$), tels que K points arbitraires déterminent un seul groupe de la série, celle-ci est dite involution de degré n et d'espèce (ou rang) K. Elle possède en général $(K+1)(n-K)$ points $(K+1)$-uples. L'auteur définit les *singularités ordinaires* d'une involution et montre comment leur introduction dans une involution modifie le nombre des points multiples en question.

Vivanti (*G.*). — Sur l'application de la fonction elliptique pu à la théorie des polygones de Poncelet (61-74).

Démonstration simple, à l'aide de pu, des résultats de Jacobi; cas où les fonctions elliptiques dégénèrent.

Torelli (*G.*) — Sur les déterminants de fonctions (75-84).

Propriétés relatives à quatre types de déterminants fonctionnels dans lesquels les fonctions se mettent sous la forme d'un produit de facteurs.

Castelnuovo (*G.*). — Sur les multiples d'une série linéaire de groupes de points appartenant à une courbe algébrique (89-110).

Sur une courbe algébrique C_n d'ordre n, dans un espace E_r à r dimensions,

les variétés V à $r-1$ dimensions et d'ordre k déterminent une infinité de groupes de kn points, constituant une série linéaire. La *dimension* de celle-ci et le nombre ainsi défini : toute variété V passant par r_k+1 points de C_n contient cette courbe tout entière. Si C_n est de genre p et n'a pas de points multiples, on a $r_k = kn - p$, à la condition que $k \geq n-2$. Si $k < n-2$ la différence $kn - p - r_k$ est ≤ 0, et sa valeur est $\leq \pi - p$, π étant le genre maximum d'une courbe d'ordre n dans E_r. L'auteur traite également le cas des courbes à points multiples. Dans ce Mémoire, il emploie deux méthodes différentes dont l'une, d'une nature élémentaire, conduit à la détermination du nombre π, et permet de montrer que le nombre maximum des points doubles de C_n dans E_r est $\pi - p$.

Lauricella (*G.*). — Sur les fonctions hypergéométriques à plusieurs variables (111-158).

M. Appell a généralisé la fonction hypergéométrique à une variable de Gauss, en introduisant quatre fonctions hypergéométriques à deux variables. L'auteur élargit encore cette conception, en envisageant des fonctions à un nombre quelconque n de variables : leur nombre croît très vite avec n (4 pour $n=2$, 14 pour $n=3$), aussi l'auteur n'étudie que les plus importantes. Il a surtout pour objet de montrer comment on peut les construire par des séries, d'étudier le champ de convergence de celles-ci, de définir les fonctions par un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, de les représenter par des intégrales définies et d'établir les relations qui les lient.

Montesano (*D.*). — Représentation, sur un plan, des congruences de droites du second ordre pourvues de lignes singulières (159-177).

L'auteur démontre que toute congruence telle est représentable d'une manière univoque sur un cône de rayons; puis il en déduit la représentation univoque sur un plan des cinq types de congruences suivants : 1° génératrices des quadriques d'un faisceau dont la base admet un point double ou se décompose en deux coniques; 2° droite s'appuyant sur une courbe unicursale d'ordre n et sur une droite, ayant en commun $n-2$ points; 3° droites tangentes à une surface d'ordre n, qui a une droite $(n-2)$-uple, et coupant cette droite; 4° système simplement infini, rationnel et d'indice 2, de faisceaux de droites ayant un rayon commun; 5° faisceaux plans de rayons tangents à un cône de deuxième classe et ayant leurs sommets sur une courbe rationnelle, correspondant point par plan au cône.

Pour chacune de ces congruences, l'auteur étudie, sur le plan de représentation, l'involution constituée par les couples de points qui correspondent aux couples de rayons de la congruence issus des points singuliers d'un plan arbitraire.

Gerbaldi (*F.*). — L'équation du vingt-quatrième degré dont dépend la recherche des points d'inflexion d'une courbe générale du quatrième ordre (178-190).

A tout point d'une quartique on peut faire correspondre une tangente à une

conique, et réciproquement à chaque tangente à une conique C_2 on peut faire correspondre ses quatre pôles par rapport à une cubique C_3 : C_2 et C_3 étant arbitraires, le lieu des pôles sera une courbe générale du quatrième ordre C_4. La hessienne de la cubique est une fonction dont le carré, en un point M de C_3, coïncide avec la valeur qu'elle prend au point correspondant de C_2, quand M est un point d'inflexion, et dans ce cas seul. Ceci permet de former l'équation cherchée. Cas où C_3 est équianharmonique.

Guccia (*G.-B.*). — Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes admettant des singularités ordinaires (193-255).

Ce Mémoire est la première Partie d'une étude plus étendue. Un système linéaire d'ordre n et de dimension K est constitué par une série K fois infinie de courbes d'ordre n, satisfaisant à $\frac{n(n+3)}{2} - K$ conditions, de telle sorte que par K points arbitraires il ne passe qu'une courbe du système. Dès lors, O étant un point du plan, supposons que : 1° la courbe générale C du système admette O comme point d'ordre r à tangentes distinctes; 2° si l'on appelle U_m ($m = 1, \ldots s < r$) les branches issues de O d'une courbe fixe arbitraire du système, C ait avec U_m un contact d'ordre $\sigma_m > 0$; 3° les r tangentes en O à C forment une involution de degré $\varkappa$ ($\leqq K$ ou $\leqq r - s$, suivant que $K \leqq$ ou $> r - s$). On dit alors que le système admet en O une *singularité ordinaire*

$$[r, s(\sigma_1, \ldots \sigma_s), \varkappa].$$

C'est un tel système que l'auteur étudie : il démontre notamment que celui-ci contient en général au moins une courbe admettant $r + \rho$ branches en O et ayant en ce point un contact d'ordre σ_m avec U_m. Puis il généralise un théorème de Cremona, donne de nombreuses applications et termine par l'étude de la jacobienne de trois courbes, d'une courbe et d'un faisceau, d'un réseau.

Pennachietti (*G.*). — Sur le frottement (256-262).

Guccia (*G.-B.*). — Une définition synthétique des courbes polaires (263-272).

Soient R une droite arbitraire du plan et φ_{n-l} un faisceau de $n - l$ droites issues de P ($l = 0, 1, \ldots n - 1$) : la deuxième polaire de P par rapport à une courbe C d'ordre n est la courbe d'ordre $n - r$, qui, avec les faisceaux $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \ldots \varphi_{n-r+1}$, constitue le lieu des points où les droites issues de P ont un contact d'ordre r avec les courbes du système linéaire, d'ordre n et de dimension x, $\varphi_n, \varphi_{n-1} R, \ldots \varphi_{n-r+1} R^{r-1}, C$.

Pennachietti (*G.*). — Sur les solutions communes à plusieurs équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre à plus de deux variables indépendantes (273-279).

Pennachietti (*G.*). — Sur les solutions communes à trois équa-

tions aux dérivées partielles du troisième ordre à deux variables (280-287).

Généralisations d'une méthode de Bianchi (*Lincei*, 1886) dans le cas de deux variables.

Morra (*G.*). — Quelques considérations relatives à l'équation $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (288-295).

Étude de cette équation sans recourir à la théorie du dernier multiplicateur.

Pieri (*M.*). — Les transformations rationnelles de l'espace inhérentes à une conique (297-306).

Génération et caractères projectifs des transformations crémoniennes de l'espace les plus générales, dans lesquelles la droite joignant deux points homologues touche une conique donnée et ne contient pas en général d'autres points homologues.

Kohn (*G.*). — Une définition des polaires (307-308).

Extrait d'une lettre à M. G.-B. Guccia. Étant donné le système linéaire déterminé par une courbe C_n et les courbes d'ordre n ayant en P un point $(n-r+1)$-uple, envisageons les courbes de ce système n'admettant pas P comme point multiple d'ordre $\geqq n-r+1$. Le lieu de leurs points multiples d'ordre $r-1$ est la r^e polaire de P par rapport à C_n.

M. Gevrey.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXL, 1911 [1].

Schur (*J.*). — Remarques sur la théorie des formes bilinéaires bornées à une infinité de variables (1-28).

Cet article se rattache à la théorie des formes bilinéaires bornées de Hilbert. Une forme bilinéaire

$$A = A(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q,$$

à coefficients a_{pq} complexes, est dite *bornée* si l'on peut trouver un nombre

[1] *Bull. des Sciences mathém.*, t. XXXVI, p. 111-145.

positif M tel qu'on ait l'inégalité

$$\left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p y_q \right| \leqq M,$$

pour toutes les valeurs de l'entier n et pour toutes les valeurs complexes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui satisfont aux inégalités

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \leqq 1, \qquad |y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2 \leqq 1.$$

1. L'auteur rappelle quelques résultats connus. Pour que la forme bilinéaire A soit bornée, il faut que les séries

$$|a_{p1}|^2 + |a_{p2}|^2 + \ldots, \qquad |a_{1q}|^2 + |a_{2q}|^2 + \ldots \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

soient convergentes et que leurs sommes soient inférieures à un nombre fixe.

Si les séries $\sum_r |a_{rq}|^2$ sont toutes convergentes, la forme bilinéaire A admet une *norme* N(A); c'est, par définition, la forme d'Hermite

$$C = \sum_{p,q=1}^{\infty} c_{pq} x_p \bar{x}_q,$$

où l'on a

$$c_{pq} = \bar{c}_{qp} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} \bar{a}_{rq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

cette forme d'Hermite résulte de la composition des deux formes

$$A' = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{qp} x_p y_q, \qquad \bar{A} = \sum_{p,q=1}^{\infty} \bar{a}_{pq} x_p y_q.$$

Pour qu'une forme bilinéaire soit bornée, il faut et il suffit qu'elle admette une norme bornée; la borne supérieure de N(A) est alors le carré de la borne supérieure de A.

Si A, B, ... sont des formes bilinéaires en nombre fini qui admettent des normes et si la somme H de leurs normes est bornée, chacune des formes est bornée; de plus, la borne supérieure de chacune des formes est au plus égale à la racine carrée de la borne supérieure de H.

2. La forme bilinéaire A est dite *absolument* bornée si la forme bilinéaire $\Sigma |a_{pq}| x_p y_q$ est bornée.

Si les séries

$$z_p = \sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|, \qquad k_q = \sum_{r=1}^{\infty} |a_{rq}| \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

sont toutes convergentes et inférieures à un nombre fixe, la forme A est absolument bornée. De plus, si $z_p \leqq \zeta$, $k_q \leqq \gamma$, la borne supérieure de A est au plus égale à $\sqrt{\zeta\gamma}$. Ce théorème ne serait plus vrai si l'on supposait seulement que

les séries $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|^{1+\rho}$, $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{rq}|^{1+\rho}$ sont, pour chaque valeur positive de ρ, convergentes et inférieures à un nombre fixe (dépendant de ρ).

Si

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q, \qquad B = \sum_{p,q=1}^{\infty} b_{pq} x_p y_q$$

sont deux formes bilinéaires bornées, la forme

$$P = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} b_{pq} x_p y_q$$

est *absolument* bornée; sa borne supérieure est au plus égale au produit des bornes supérieures de A et de B.

Si les coefficients a_{pq} d'une forme bilinéaire bornée sont tous inférieurs en module à un nombre positif a et si $f(x)$ est une série de puissances absolument convergente pour $x = a$, la forme

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} f(a_{pq}) x_p y_q$$

est aussi bornée.

3. L'auteur dit qu'un système de coefficients

$$u_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

constitue *un système de multiplicateurs pour les formes bilinéaires bornées*, si la forme bilinéaire $\Sigma a_{pq} u_{pq} x_p y_q$ est bornée en même temps que la forme bilinéaire $\Sigma a_{pq} x_p y_q$. Si u_{pq} et v_{pq} sont deux systèmes de multiplicateurs, il en est de même des systèmes $au_{pq} + bv_{pq}$ et $u_{pq} v_{pq}$.

Il existe deux classes particulièrement importantes de systèmes de multiplicateurs.

Les systèmes de la première classe sont fournis par les coefficients h_{pq} des formes d'Hermite *définies* pour lesquelles les coefficients (réels) $h_{11}, h_{22}, \ldots$ admettent une borne supérieure finie h. Si la borne supérieure de la forme bilinéaire bornée $\Sigma a_{pq} x_p y_q$ est égale à α, la borne supérieure de la forme bilinéaire $\Sigma a_{pq} h_{pq} x_p y_q$ est au plus égale à αh.

On obtient d'autres systèmes de multiplicateurs en considérant deux suites

$$f_p(t), \quad g_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

de fonctions complexes de la variable réelle t, telles que les modules des produits de deux quelconques de ces fonctions soient intégrables dans l'intervalle $a \leqq t \leqq b$. Si alors il existe deux nombres μ et ν tels qu'on ait les inégalités

$$\int_a^b |f_p|^2 dt \leqq \mu, \qquad \int_a^b |g_p|^2 dt \leqq \nu \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

les nombres

$$c_{pq} = \int_a^b f_p g_q \, dt$$

forment un système de multiplicateurs pour les formes bilinéaires bornées. Si la forme bilinéaire $\Sigma a_{pq} x_p y_q$ admet la forme supérieure α, la borne supérieure de la forme $\Sigma a_{pq} v_{pq} x_p y_q$ est au plus égale à $\frac{1}{2}\alpha(\mu+\nu)$.

4. L'auteur démontre un théorème élémentaire sur les formes d'Hermite définies. Si

$$A = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q, \qquad B = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq} x_q \bar{x}_q \qquad (a_{pq} = \bar{a}_{qp}, b_{pq} = \bar{b}_{qp})$$

sont deux formes d'Hermite définies (non négatives), il en est de même de la forme

$$C = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} b_{pq} x_p \bar{x}_q.$$

Si, de plus, α et α' sont la plus grande et la plus petite des racines caractéristiques de la forme A, b et b' le plus grand et le plus petit des coefficients b_{11}, $b_{22}, \ldots, b_{nn}$, toutes les racines caractéristiques de C sont comprises entre $\alpha' b'$ et αb.

Il existe un théorème analogue sur les noyaux d'Hermite définis (non négatifs); on désigne sous ce nom une fonction complexe *continue* $K(s, t)$ des variables réelles s et t, telle que $K(s, t)$ et $K(t, s)$ soient complexes conjuguées et que l'intégrale double

$$I(x) = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, \bar{x}(t)\, ds\, dt$$

ait une valeur non négative, quelle que soit la fonction continue $x(s)$. D'après cela, si $K(s, t)$ et $L(s, t)$ sont deux noyaux d'Hermite définis non négatifs, il en est de même de leur produit $K(s, t) L(s, t)$.

5. Hilbert a démontré, à l'aide de la formule

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p-q}\right) x_p y_q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t\,[\Sigma' x_p \sin pt - y_p \cos pt)]^2\, dt,$$

que les deux formes bilinéaires

$$A = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p-q}, \qquad S = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q}$$

sont bornées. L'auteur donne de ce théorème une autre démonstration fondée sur la considération de la somme des normes de A et de

$$S = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p + y_p}{p+q+1}.$$

Cette démonstration lui permet de montrer que les bornes supérieures de A et de S sont au plus égales à π, alors que Hilbert les montrait seulement inférieures à 4π et 2π.

Plus généralement les formes

$$A_\lambda = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p-q+\lambda}, \qquad S_\lambda = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p-q+\lambda}$$

sont bornées pour chaque valeur de λ; leurs bornes supérieures sont, si λ est entier, au plus égales à π; si λ n'est pas entier, elles sont au plus égales à $\frac{\pi}{|\sin \lambda\pi|}$.

Une autre généralisation est fournie par la forme bilinéaire

$$A^{(\mu)} = \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} \frac{(pq)^{\frac{\mu-1}{2}}}{p^\mu - q^\mu} x_p y_q,$$

qui est bornée pour $\mu > 1$, sa borne supérieure étant au plus égale à $\frac{\pi}{\mu}$.

6. A la forme A du paragraphe précédent on peut rattacher, d'une manière simple, la forme quadratique

$$F(t) = \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} \frac{\sin(p-q)t}{p-q} x_p x_q,$$

qui est bornée et dont la borne supérieure est au plus égale à π. D'une manière plus précise, cette borne supérieure (pour $0 \leq t \leq \pi$) est au plus égale au plus grand des deux nombres t et $\pi - t$.

La forme $F(t)$ fournit l'exemple le plus simple d'une forme quadratique bornée *sans être absolument bornée* (du moins si t n'est pas un multiple de π).

La considération de la forme $F(t)$ permet aussi à l'auteur de démontrer, d'une manière simple, le théorème souvent utilisé dans les recherches récentes sur les séries de Fourier, d'après lequel l'expression

$$\left| \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \ldots + \frac{\sin nt}{n} \right|$$

ne dépasse pas une limite fixe, quels que soient n et t. Il démontre que cette limite est au plus égale à

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} = 1,389\ldots.$$

On a de même l'inégalité

$$\left| \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{\mu} \right| < \frac{\pi}{2} - 1,$$

valable quels que soient m et t.

7. Soit $K(s, t)$ une fonction réelle des arguments positifs s, t satisfaisant aux conditions suivantes :

α. $K(s, t)$ n'est jamais négatif et est homogène de degré -1.

β. Dans chaque domaine fini

$$0 < a \leqq s \leqq b, \qquad 0 < a \leqq t \leqq b,$$

$K(s, t)$ est intégrable (au sens de Riemann).

γ. L'intégrale

$$k = \int_0^\infty \frac{K(s, 1)}{\sqrt{s}}\, ds = \int_0^\infty \frac{K(1, t)}{\sqrt{t}}\, dt = \int_1^\infty \frac{K(s, 1) + K(1, s)}{\sqrt{s}}\, ds$$

a une valeur finie.

S'il en est ainsi, si l'on désigne par

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots; \qquad b_1, \quad b_2, \quad \ldots$$

des nombres positifs quelconques : si l'on pose

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

la forme bilinéaire

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{\sqrt{a_p b_q}} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \int_{t_{q-1}}^{t_q} K(s, t)\, ds\, dt$$

est bornée et sa borne supérieure est au plus égale à k.

On a un résultat plus simple si l'on astreint la fonction $K(s, t)$ à la condition supplémentaire.

δ. $K(s, t)$, pour s fixe, ne croît pas avec t et, pour t fixe, ne croît pas avec s.

Dans ce cas, la forme bilinéaire

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} K(s_p, t_q) \sqrt{a_p b_q}\, x_p y_q$$

est bornée et sa borne supérieure est au plus égale à k.

Plus particulièrement encore, si l'on prend $a_n = b_n = 1$, on obtient la forme bilinéaire $\Sigma K(p, q) x_p y_q$, qui est bornée, *et sa borne supérieure est exactement égale à k.*

Ces résultats se généralisent pour des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Furtwängler (*Ph.*). — Sur les nombres de classes des corps de la division du cercle (29-32).

H. Weber a démontré que le nombre des classes du corps des racines $(2^\alpha)^{\text{ièmes}}$ de l'unité est impair. Ce théorème est un cas particulier du théorème plus général suivant, que l'auteur démontre par une méthode de récurrence :

Si l est un nombre premier quelconque, pour que le nombre des classes du corps des racines $(l^\alpha)^{\text{ièmes}}$ de l'unité soit divisible par l, il faut et il suffit que le nombre des classes du corps des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité soit divisible par l.

Sturm (*Rudolf*). — Sur la génération due à Jacobi des surfaces du second degré (33-47).

Jacobi (même Journal, t. XII, p. 137) a indiqué la génération suivante des surfaces du second degré :

Étant donnés, dans un espace Σ, trois points A, A_1, A_2; dans un autre espace Σ', trois points B' B'_1, B'_2, on considère dans Σ' un point X' et les trois sphères de centres B', B'_1, B'_2 passant par X'; les trois sphères de centres A, A_1, A_2, qui leur sont respectivement égales, se coupent en deux points X, $\overline{X}$. Ces deux points engendrent une quadrique, quand X' décrit un plan.

Le cas le plus intéressant, qui a été étudié par plusieurs géomètres, est celui où le plan décrit par le point X' coïncide avec le plan $B'B'_1B'_2$.

On peut plus généralement se proposer l'étude de la transformation qui fait correspondre au couple des points d'intersection de trois sphères de centres B', B'_1, B'_2, le couple des points d'intersection des trois sphères égales de centres A, A_1, A_2. Les plans Ω, Φ' des triangles AA_1A_2, $B'B'_1B'_2$ sont des plans de symétrie pour deux figures correspondantes. L'auteur a précédemment démontré qu'à une droite d'un espace correspond dans l'autre une conique dont le plan est perpendiculaire au plan de symétrie, d'où résulte facilement le théorème de Jacobi.

A un plan E' de Σ' qui passe par le point B' correspond une quadrique de Σ telle que le point A appartienne à la focale de cette quadrique située dans le plan principal Ω. Au plan Φ' lui-même correspond une quadrique Φ^2 dont l'une des focales passe par les trois points A, A_1, A_2.

A chaque sphère de Σ', ayant son centre dans le plan Φ', correspond une sphère de Σ ayant son centre dans le plan Ω; les centres des deux sphères se correspondent par une *affinité* (A, B') qui, en particulier, fait correspondre aux points B', B'_1, B'_2 les points A, A_1, A_2. Il existe une double infinité de sphères de Σ' auxquelles correspondent des sphères égales de Σ; plus particulièrement, il existe une simple infinité de faisceaux de sphères concentriques de Σ' auxquels correspondent des faisceaux de sphères concentriques égales de Σ; les centres de ces sphères engendrent, dans Φ', une conique (B') qui passe par les points B', B'_1, B'_2; dans Ω, une conique (A) qui passe par A, A_1, A_2 et qui est affine de (B') dans l'affinité (A, B'). La conique (A) est, par suite, celle des focales de la quadrique Φ^2 (transformée du plan Φ') qui se trouve dans le plan Ω.

La transformation considérée donne naissance à une autre affinité des plans Ω et Φ'. Un couple de points symétriques par rapport à Φ' et situés sur la perpendiculaire élevée au plan Φ' en un de ses points F' est transformé en un couple de points symétriques par rapport à Ω et situés sur la perpendiculaire élevée au plan Ω en un de ses points F. Le point F ne dépend que du point F' et il existe entre ces deux points une correspondance affine; c'est ce que l'auteur appelle l'*affinité* (F, F'). Dans cette affinité, les points A et B' ne se correspondent pas.

Grâce à l'affinité (F, F'), on peut donner de la transformation étudiée une nouvelle définition. A deux points X', $\overline{X}'$, intersection d'une sphère de centre B' avec la perpendiculaire élevée en F' au plan Φ', correspondent les deux points X, $\overline{X}$ d'intersection de la sphère égale de centre A avec la perpendiculaire élevée au plan au point F, transformé de F' dans l'affinité (F, F').

Cette nouvelle définition permet de montrer très simplement que la section de la quadrique Φ^2, par son plan principal Ω, est toujours réelle. De plus, c'est

une hyperbole ou une ellipse suivant que, dans l'affinité $(F, F')_r$ il existe ou non des droites réelles correspondantes sur lesquelles les segments correspondants sont égaux. On voit enfin que, si la section de Φ^2 par Ω est une ellipse, la quadrique Φ^2 est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe; si cette section est une hyperbole, la quadrique Φ^2 est un hyperboloïde à deux nappes ou à une nappe. Le plan Ω est celui des plans principaux de Φ^2 qui contient celle des focales réelles qui est de la même espèce que Φ^2 dans la famille des surfaces homofocales à Φ^2.

A une génératrice rectiligne de Φ^2 et à sa symétrique par rapport à Ω correspond une droite double de Φ' et cette droite enveloppe une conique.

L'auteur passe ensuite à l'étude des surfaces E^2 qui correspondent aux plans E' de Σ'. Tout d'abord, si E' touche la quadrique Ω'^2 (transformée du plan Ω), la quadrique E^2 se réduit à un cône.

A deux génératrices de E^2 symétriques par rapport à Ω correspondent deux droites symétriques par rapport à Φ'. On obtient ainsi, dans Σ et Σ', deux complexes de droites du second degré T^2, T'^2, respectivement symétriques par rapport à Ω, Φ' et tels qu'à deux droites symétriques de l'un correspondent deux droites symétriques de l'autre. Les droites de ces complexes sont les génératrices des quadriques de chaque espace qui correspondent aux plans de l'autre. *Ils sont aussi formés des tangentes aux surfaces* Φ^2 *et* Ω'^2.

Toute droite g du complexe T^2 appartient à une simple infinité de surfaces E^2 qui correspondent à un faisceau de plans de Σ'. Un cas particulièrement intéressant est celui où ce faisceau de plans a pour axe une droite e' de Φ'. Dans ce cas, les surfaces E^2 constituent un faisceau (e^2) de quadriques tangentes à Φ^2 le long de la section de Φ^2 par un plan perpendiculaire à Ω. Un tel faisceau (e^2) contient un paraboloïde, qui est sûrement elliptique si Φ^2 est un ellipsoïde. Les surfaces réelles de ce faisceau proviennent non seulement des plans réels du faisceau d'axe e', mais encore de certains plans imaginaires. L'auteur étudie l'ordre de succession des quadriques du faisceau (e^2) en partant de la quadrique Φ^2 et y revenant, en discutant la nature de ces quadriques (ellipsoïdes, hyperboloïdes à une nappe, etc.).

Fischer (*Ernst*). — Sur les systèmes de modules algébriques et les équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes à coefficients constants (48-81).

Introduction. — Étant donné un polynome $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, l'auteur désigne par la notation

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)u$$

la combinaison linéaire des dérivées partielles de la fonction u obtenue en remplaçant chaque monome $A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ par $A \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Si u satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

il en est de même de toutes ses *dérivations* $v = h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$, où $h(x)$ est un poly-

nome quelconque. De plus, u satisfait à toutes les équations

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

où $g(x)$ est un polynome quelconque divisible par $f(x)$.

Si $f(x)$ est une *forme* (polynome homogène) de dimension m et si l'on ne considère que les fonctions u qui sont elles-mêmes des formes de dimension $m + \mu \geqq m$, l'équation $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ est équivalente au système des équations

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

où $F(x)$ désigne toutes les formes de dimensions $m + \mu$ divisibles par $f(x)$.

L'ensemble des formes de dimension p d'un domaine quelconque de formes S est désigné par $S(p)$. Enfin la notation $\overline{f}(x)$ désigne la forme qu'on obtient en remplaçant, dans la forme $f(x)$, tous les coefficients par leurs complexes conjugués.

1. *Faisceaux linéaires de formes.* — Après avoir défini un faisceau linéaire de formes et son ordre, l'auteur convient de dire que deux faisceaux linéaires de formes, toutes de même dimension p, sont *complémentaires* quand toute forme de dimension p peut être regardée d'une manière et d'une seule comme la somme d'une forme du premier faisceau et d'une forme du second faisceau.

Deux formes de même dimension $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont dites *orthogonales* lorsque leurs coefficients satisfont aux deux relations (d'ailleurs équivalentes entre elles)

$$\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \qquad \overline{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = 0.$$

Une forme ne peut être orthogonale à elle-même sans être identiquement nulle.

Si $\mathcal{A}$ est un faisceau linéaire de formes de dimension p, l'ensemble $\mathcal{B}$ des formes de même dimension, orthogonales à toutes les formes de $\mathcal{A}$, constitue un faisceau linéaire complémentaire de $\mathcal{A}$, et réciproquement. Toute forme $f(x)$ peut ainsi être représentée comme une somme $\varphi(x) + F(x)$ d'une forme $F(x)$ de $\mathcal{A}$ et d'une forme $\varphi(x)$, orthogonale à toutes les formes de $\mathcal{A}$: la forme $\varphi(x)$ s'appelle le *résidu clebschien* de $f(x)$ par rapport à $\mathcal{A}$.

Ces considérations peuvent se généraliser en ne considérant que les formes d'un faisceau linéaire $\mathcal{C}$; on définit alors deux faisceaux linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ complémentaires en $\mathcal{C}$, etc.

2. *Le résidu clebschien d'après un système de modules.* — Étant donné un système de formes $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$, on dit que deux formes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont congrues par rapport au système de modules $[f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)]$ lorsque la différence $f(x) - \varphi(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) - \varphi(x) \equiv Q_1(x)f_1(x) + \ldots + Q_\varkappa(x)f_\varkappa(x).$$

Un *système de résidus* par rapport à $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ est un ensemble $\mathcal{R}$ de formes tel que toute forme soit congrue à une forme et une seule de cet ensemble, par rapport au système de modules considéré. Le système de résidus est dit un *faisceau de résidus* s'il forme un faisceau linéaire.

Il est facile de construire un faisceau de résidus particulier: c'est celui qui est formé par l'ensemble M des formes qui satisfont aux équations

$$\overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \qquad \ldots \qquad \overline{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0.$$

La forme de M, qui est congrue à une forme donnée $f(x)$, s'appelle le *résidu clebschien* de $f(x)$ par rapport à $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$.

3. *Théorèmes sur les équations aux dérivées partielles.* — L'auteur démontre, dans ce paragraphe, quelques théorèmes utiles pour la suite.

Pour que l'équation

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

soit une conséquence du système d'équations

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \qquad \ldots, \qquad f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

il faut et il suffit que $g(x)$ soit congrue à zéro par rapport au système de modules $[f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)]$.

Pour que le système

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \qquad \ldots \qquad f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

n'admette comme intégrales que des polynomes, et pour que ces polynomes soient, en outre, tous de degré inférieur à μ, il faut et il suffit que les n formes $x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_n^\mu$ soient toutes congrues à zéro $[\bmod f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)]$.

Pour que le même système d'équations n'admette comme intégrales que des polynomes dont les degrés soient inférieurs à un nombre fixe, il faut et il suffit que le système d'équations algébriques

$$f_1(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_\varkappa(x) = 0$$

n'admette pas d'autre solution que

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

4. *Le problème algébrique du système fondamental.* — Étant données $\varkappa$ formes $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ *dont aucune n'est de dimension zéro*, ces formes définissent un *domaine d'intégrité* $\mathfrak{J}$ formé de toutes les fonctions rationnelles entières à coefficients constants de $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$.

Cela posé, on dit qu'un faisceau linéaire $\mathfrak{L}$ de forme $\varphi(x)$ constitue un *système fondamental* par rapport à $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$, s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

I. Toute forme $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) = g_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + g_\nu(x)\varphi_\nu(x),$$

où $g_1(x), \ldots, g_\nu(x)$ appartiennent à $\mathfrak{J}$ et où $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$ appartiennent à $\mathfrak{L}$.

II. Il n'existe aucun faisceau linéaire $\mathcal{L}_1$ contenu dans $\mathcal{L}$ et jouissant de la propriété précédente.

La notion de système fondamental par rapport aux formes $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ est identique à la notion de faisceau de résidus par rapport aux mêmes formes. On obtient, par suite, un système fondamental en prenant l'ensemble M des formes qui satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \qquad \ldots \qquad \bar{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0.$$

Si, en particulier, $\varkappa = 1$, on voit que, étant donnée une forme $f_1(x)$ de dimension différente de zéro, toute forme $f(x)$ peut être écrite

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) f_1(x) + \ldots + \varphi_\mu(x) [f_1(x)]^\mu,$$

où les $\varphi(x)$ satisfont à l'équation

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0.$$

et l'auteur démontre que cela n'est possible que d'une manière.

Ce dernier théorème est bien connu dans certains cas particuliers, par exemple celui où $f_1 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

5. *Le produit* P *des différences de n variables.* — On est conduit à des résultats intéressants en prenant pour $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)$ de n variables : ces formes sont définies par l'identité en λ

$$(1 - \lambda x_1) \ldots (1 - \lambda x_n) = 1 - \sigma_1(x)\lambda + \ldots + \sigma_n(x)\lambda^n.$$

Le domaine d'intégrité $\mathfrak{I}$ se compose ici de toutes les fonctions symétriques entières des n variables. Le faisceau de résidus M a été très simple : il est engendré par le produit

$$P = \prod_{\alpha, \beta} (x_\alpha - x_\beta)$$

des différences des n variables et de ses différentes dérivées partielles de tous les ordres.

L'auteur donne, de ce théorème intéressant, deux démonstrations différentes : l'une s'appuyant sur les résultats généraux obtenus précédemment; l'autre, plus élémentaire, fondée sur une méthode de récurrence.

6. *Notion et théorie de l'état de formes.* — Un ensemble de formes $\mathcal{H}$ est dit former un *état :* 1° s'il contient toutes les constantes; 2° s'il contient, en même temps que deux formes de même dimension, la somme de ces deux formes; 3° s'il contient, en même temps que $h(x)$ et $k(x)$, les formes

$$k(x)\, h(x) \quad \text{et} \quad \bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x).$$

Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\mu(x)$ sont des formes données, il existe toujours un plus petit état contenant ces formes.

On peut étendre à un état donné $\mathcal{H}$ les considérations du numéro 2. On en déduit que, si la forme $f(x)$ est congrue à zéro $[\operatorname{mod} f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)]$, elle peut toujours s'écrire

$$f(x) = Q_1(x) f_1(x) + \ldots + Q_\varkappa(x) f_\varkappa(x),$$

où les $Q(x)$ appartiennent au plus petit état contenant les formes $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ et $f(x)$. Le résidu clebschien d'une forme $f(x)$ par rapport aux formes $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ appartient également à ce plus petit état.

On peut aussi définir un système fondamental pour $\mathcal{H}$ par rapport à des formes données $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ appartenant à $\mathcal{H}$. Si aucune de ces formes n'est de dimension zéro, on obtient un système fondamental en prenant l'ensemble Λ des formes $\varphi(x)$ qui appartiennent à $\mathcal{H}$ et qui satisfont aux équations

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \quad \ldots, \quad \bar{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0.$$

7. *Suite des théorèmes relatifs au produit des différences.* — On obtient un état de formes $\mathcal{H}$, particulièrement intéressant, en considérant toutes les formes de n variables qui admettent un groupe donné G de permutations de ces n variables. L'ensemble Λ des dérivations homogènes du produit des différences P, qui admettent le groupe G, constitue un système fondamental pour $\mathcal{H}$ par rapport aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)$.

Si, en particulier, G est le groupe alterné, Λ est formé de c et cP, où c désigne une constante arbitraire, et l'on obtient le théorème bien connu d'après lequel toute forme $f(x)$, qui n'admet que deux valeurs distinctes, est égale à

$$S_1(x) + S_2(x) P,$$

où $S_1(x)$ et $S_2(x)$ sont deux formes symétriques.

8. *Modules et antimodules.* — L'auteur appelle *module dans un état* $\mathcal{H}$ un ensemble de formes appartenant à $\mathcal{H}$ et jouissant des propriétés suivantes : 1° en même temps qu'une forme $f(x)$, il contient toutes les formes $h(x) f(x)$, $h(x)$ étant une forme quelconque de $\mathcal{H}$; 2° en même temps que deux formes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de même dimension, il contient leur somme $f_1(x) + f_2(x)$.

L'auteur appelle *antimodule dans l'état* $\mathcal{H}$ un ensemble de formes appartenant à $\mathcal{H}$ et jouissant des propriétés suivantes : 1° en même temps qu'une forme $\varphi(x)$, il contient toutes les formes $\bar{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)$, $h(x)$ étant une forme quelconque de $\mathcal{H}$; 2° en même temps que deux formes $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ de même dimension, il contient leur somme $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.

On appelle *antimodule résolvant dans* $\mathcal{H}$ d'un système de formes $\mathcal{S}$ appartenant à $\mathcal{H}$, l'ensemble des formes $\varphi(x)$ de $\mathcal{H}$ qui satisfont aux équations

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0,$$

où l'on remplace $f(x)$ par toutes les formes de $\mathcal{S}$. De même, on appelle *module résolvant dans* $\mathcal{H}$ d'un système de formes Σ appartenant à $\mathcal{H}$, l'ensemble des formes $f(x)$ de $\mathcal{H}$ qui satisfont aux équations

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0,$$

où l'on remplace $\varphi(x)$ par toutes les formes de Σ.

Les modules et les antimodules dans un état $\mathcal{H}$ peuvent être associés par couples ($\mathfrak{M}$, M) tels que dans chaque couple le module $\mathfrak{M}$ soit le module résolvant de M, l'antimodule M étant l'antimodule résolvant de $\mathfrak{M}$. Étant donné un de ces couples, toute forme $h(x)$ de $\mathcal{H}$ peut, d'une manière et d'une seule, être regardée comme la somme d'une forme de $\mathfrak{M}$ et d'une forme de M.

Si l'état $\mathcal{H}$ est formé de toutes les formes possibles, les modules et antimodules sont dits *absolus* (schlechthin). Tout module (ou antimodule) dans un état $\mathcal{H}$ est formé de l'ensemble des formes communes à $\mathcal{H}$ et à un certain module (ou antimodule) absolu. Étant donné un couple ($\mathfrak{M}'$, M') d'un module et d'un antimodule absolu réciproques, si l'on décompose une forme $h(x)$ appartenant à l'état $\mathcal{H}$ en une somme d'une forme de $\mathfrak{M}'$ et d'une forme de M', chaque terme de cette somme appartient à $\mathcal{H}$.

L'auteur indique une génération des modules et antimodules au moyen d'un nombre *fini* d'éléments. Si $\mathfrak{M}$ est un module dans l'état $\mathcal{H}$, on peut, en effet, trouver dans $\mathfrak{M}$ un nombre fini de formes $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ telles que $\mathfrak{M}$ soit dans $\mathcal{H}$ le plus petit module contenant $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$. Il existe un théorème analogue, quoique un peu plus compliqué, pour les antimodules.

L'auteur introduit maintenant dans toute sa généralité la notion du *domaine d'intégrité*. Un ensemble de formes $\mathfrak{J}$ est dit un *domaine d'intégrité* : 1° s'il contient toutes les constantes; 2° s'il contient, en même temps que deux formes de même dimension, la somme de ces deux formes; 3° s'il contient, en même temps que deux formes, le produit de ces deux formes.

Soit $\mathfrak{J}$ un domaine d'intégrité dont toutes les formes appartiennent à l'état $\mathcal{H}$. Un faisceau linéaire $\mathcal{L}$ de formes de $\mathcal{H}$ est dit un *système fondamental* pour $\mathcal{H}$ par rapport à $\mathfrak{J}$ si :

I. Chaque forme $h(x)$ de $\mathcal{H}$ peut s'écrire

$$h(x) = g_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + g_\nu(x)\varphi_\nu(x),$$

où les formes $g(x)$ appartiennent à $\mathfrak{J}$ et les formes $\varphi(x)$ à $\mathcal{H}$.

II. Il n'existe aucun autre faisceau linéaire contenu dans $\mathcal{L}$ et jouissant de la propriété précédente.

Les systèmes fondamentaux pour $\mathcal{H}$ par rapport à $\mathfrak{J}$ ne dépendent pas, au fond, de $\mathfrak{J}$, mais du plus petit module $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{H}$ comprenant l'ensemble de formes $\mathfrak{J}^*$ qu'on obtient en enlevant de $\mathfrak{J}$ toutes les constantes différentes de zéro. Or on peut choisir dans $\mathfrak{J}^*$ un nombre fini de formes $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$ telles que le plus petit module de $\mathcal{H}$ qui contient ces formes soit identique à $\mathfrak{M}$. On pourra donc, sans changer les systèmes fondamentaux cherchés, substituer au domaine d'intégrité $\mathfrak{J}$ le domaine d'intégrité *fini* $\mathfrak{J}_1$ engendré par $f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)$.

9. Si, en particulier, on prend pour $\mathfrak{J}$ l'état $\mathcal{H}$ lui-même, on conclut de ce qui précède que $\mathcal{H}$ est identique à $\mathfrak{J}_1$, autrement dit que *tout état de formes est un domaine d'intégrité fini*. Plus généralement, il en est ainsi de tout ensemble de formes qui est réductible à un état de formes par une substitution linéaire convenablement choisie effectuée sur les variables.

Une application intéressante des résultats précédents est la suivante : Appelons *invariant* d'un groupe G de substitutions linéaires toute forme $f(x)$ qui se reproduit par les substitutions du groupe. Si le groupe G laisse invariante une forme d'Hermite définie positive, les invariants de ce groupe forment un domaine d'intégrité fini. (*A suivre.*)

Gundelfinger (*S.*). — Sur un théorème d'Algèbre (83-88).

On sait que, dans la théorie d'une forme biquadratique binaire (f), il se présente trois covariants irrationnels du second degré dont le produit est le covariant rationnel du sixième degré T. Comme T, formé pour le faisceau $\varkappa f + \lambda H$ (où H est le hessien de f), se reproduit à un facteur constant, on pouvait présumer qu'il en est de même de chacun des invariants irrationnels du second degré. Cette propriété est facile à démontrer directement; mais sa vraie raison repose dans un théorème général que l'auteur énonce et démontre.

I. Soit

$$f = ax_1^p + pbx_1^{p-1}x_2 + \binom{p}{2} cx_1^{p-2}x_2^2 + \ldots$$

une forme quelconque et

$$\Delta = \alpha x_1^p + p\beta x_1^{p-1}x_2 + \binom{p}{2} \gamma x_1^{p-2}x_2^2 + \ldots$$

un covariant de cette forme de même degré p et dont les coefficients sont d'ordre m par rapport aux coefficients de f. Supposons, de plus, qu'on ait la relation

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \Delta}{\partial b}\beta + \frac{\partial \Delta}{\partial c}\gamma + \ldots = m S f,$$

où S désigne un certain invariant de f. Cela posé, si l'on forme le covariant Δ relatif à la forme $\varkappa f - \lambda\Delta$, on a

$$\Delta_{\varkappa f - \lambda\Delta} - \Delta_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} f - \frac{\partial G}{\partial \varkappa}\Delta\right),$$

où G désigne une fonction entière de degré $m+1$ des paramètres $\varkappa$, λ.

II. Posons

$$G(\mu, \nu) = \mu^{m+1} + g_2\mu^{m-1}\nu^2 + g_4\mu^{m-2}\nu^4 + \ldots + g_{m+1}\nu^{m+1}.$$

Si l'on effectue sur les paramètres μ, ν la substitution

$$\mu = \rho\varkappa - G_2\sigma,$$
$$\nu = \rho\lambda + G_1\sigma,$$

où

$$G_1 = \frac{1}{m+1}\frac{\partial G(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa}, \qquad G_2 = \frac{1}{m+1}\frac{\partial G(\varkappa, \lambda)}{\partial \lambda},$$

on obtient

$$G(\mu, \nu) = G(\varkappa, \lambda)[\rho^{m+1} + (g_2)_{\varkappa f - \lambda\Delta}\rho^{m-1}\sigma + \ldots + (g_{m+1})_{\varkappa f - \lambda\Delta}\sigma^{m+1}].$$

III. Si l'on désigne par λ', λ'', ..., $\lambda^{(m-1)}$ les racines de l'équation

$$G\left(\frac{\varkappa}{\lambda}, 1\right) = 0,$$

on a

$$(\lambda')_{\varkappa f - \lambda\Delta} = \frac{\lambda' G_1 - G_2}{\varkappa - \lambda'\lambda}, \qquad (\lambda'')_{\varkappa f - \lambda\Delta} = \frac{\lambda'' G_1 - G_2}{\varkappa - \lambda''\lambda}, \qquad \ldots.$$

IV. Si l'on forme $\lambda' f - \Delta$ en partant de la forme $\varkappa f - \lambda\Delta$ au lieu de partir de la forme f, on a

$$(\lambda' f - \Delta)_{\varkappa f - \lambda\Delta} = (\lambda' f - \Delta)\frac{G(\varkappa, \lambda)}{\varkappa - \lambda'\lambda},$$

$$(\lambda'' f - \Delta)_{\varkappa f - \lambda\Delta} = (\lambda'' f - \Delta)\frac{G(\varkappa, \lambda)}{\varkappa - \lambda''\lambda},$$

.....

Riesz (Marcel). — Sur un théorème de M. Fatou (89-99).

M. Fatou (*Acta math.*, t. XXX, p. 389) a démontré un théorème extrêmement remarquable sur les séries de puissances. Sa démonstration s'appuie sur un théorème de Riemann, profond et difficile, relatif à la représentation d'une fonction par une série trigonométrique convergente. L'auteur indique une démonstration simple, ne s'appuyant que sur les théorèmes élémentaires de la théorie des fonctions, et qui lui a permis de compléter l'énoncé de M. Fatou.

Le théorème de M. Fatou, ainsi complété, est le suivant :

Si les coefficients d'une série de puissances

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

satisfont à la condition

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

la série converge en chaque point du cercle de rayon 1 *qui est un point régulier pour la fonction; de plus, elle converge uniformément sur tout arc de régularité de ce cercle.*

L'auteur déduit facilement la seconde partie du théorème de la première. Pour démontrer celle-ci, il suppose que le point 1 soit un point régulier pour la fonction, prend sur le cercle de rayon 1 un arc $z_2 z_1$ contenant le point 1 et joint les deux points z_2 et z_1 par deux arcs de courbe C_1 et C_2, le premier extérieur au cercle, le second intérieur au cercle, de manière que le contour fermé $C_1 + C_2$ contienne l'origine à son intérieur.

Il part alors de la formule

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \quad a_n = f(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1 + C_2} \frac{f(z)}{1 - z}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz,$$

donnée par le théorème de Cauchy. Il démontre facilement que l'intégrale

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{1 - z}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz$$

tend vers zéro pour $n = \infty$. Pour démontrer la même propriété de l'intégrale étendue à l'arc de courbe C_2, il introduit une fonction linéaire $c_0 + c_1 z$ telle que la fonction

$$H(z) = \frac{1}{1 - z} - c_0 - c_1 z$$

s'annule aux points z_1 et z_2. On voit facilement que l'intégrale

$$\int_{C_2} \frac{f(z)(c_0 + c_1 z)}{z^{n+1}} dz$$

tend vers zéro pour $n = \infty$. Quant à l'intégrale

$$\int_{C_2} \frac{f(z) H(z)}{z^{n+1}} dz,$$

l'auteur l'intègre par partie en introduisant une fonction $F(z)$ dont la dérivée seconde soit égale à $f(z)$.

L'auteur généralise ensuite le théorème de la manière suivante :

Si les coefficients d'une série de puissances

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

satisfont à la condition

$$\lim_{n = \infty} \frac{a_n}{n^\gamma} = 0 \qquad (\gamma \geq 0),$$

la série est, en chaque point du cercle de rayon 1 *pour lequel la fonction $f(x)$ est régulière, sommable par le procédé de la moyenne arithmétique d'ordre γ et elle est sommable uniformément sur tout arc de régularité.*

La démonstration est analogue à celle du premier théorème, quoique un peu plus compliquée lorsque γ n'est pas entier.

Lichtenstein (Léon). — Sur la représentation conforme des domaines analytiques plans limités par des contours à points anguleux (100-119).

Étant donné un domaine plan simplement connexe, sans pointes, limité par un nombre fini d'arcs de courbe analytiques, on effectue ordinairement la représentation conforme de ce domaine sur le cercle de rayon 1 en démontrant l'existence de la fonction de Green G, relative à ce domaine et en déterminant la fonction potentielle complementaire H ; la fonction $F(z) = e^{G+iH}$ est continue aux points anguleux du contour et réalise la représentation cherchée. Sa dérivée $F'(z)$ est continue et différente de zéro à l'intérieur et sur le contour du domaine, les points anguleux exceptés ; au voisinage de ces derniers points, les méthodes ordinaires n'apprennent rien sur la manière dont cette dérivée se comporte ; il serait cependant nécessaire d'avoir des renseignements à cet égard pour résoudre le deuxième et surtout le troisième problème aux limites de la théorie du potentiel.

L'auteur se propose d'étendre aux domaines dont le contour admet des points anguleux la théorie, maintenant classique dans le cas des contours à courbure continue, qui ramène la détermination des fonctions potentielles régulières dans le domaine et admettant des valeurs données sur le contour, à la résolution d'équations intégrales de Fredholm. Cette extension est possible grâce à un procédé simple de représentation conforme du domaine sur un cercle, procédé qui met

en évidence la nature des singularités qui se présentent pour $F'(z)$ aux points anguleux du contour.

CHAPITRE Ier. — *La représentation conforme des domaines plans à points anguleux.* — 1. L'auteur admet les résultats connus relatifs au cas où le contour du domaine a partout une tangente continue, une courbure continue, la courbure moyenne d'un arc quelconque de ce contour restant inférieure à un nombre fixe. La fonction $\Theta(z)$ qui réalise la représentation conforme sur un cercle a sa dérivée continue et différente de zéro à l'intérieur du domaine et sur son contour.

Si l'on a dans le plan (x, y) deux arcs de courbe réguliers se coupant à l'origine sous un angle $\alpha\pi$, on peut toujours, par un changement de variables,

$$Z = z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m \qquad (z = x + iy),$$

remplacer les deux arcs de courbe par deux autres ayant chacun avec leur tangente un contact d'ordre m. L'entier m est quelconque, si α est irrationnel; si α est égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, l'entier m ne peut pas dépasser q.

La nouvelle transformation

$$Z_1 = Z^{\frac{1}{\alpha}}$$

remplace alors les deux arcs de courbe par un arc de courbe à tangente partout continue et admettant une courbure partout continue, sauf au plus à l'origine.

2. Soit, d'après cela, T un domaine fini simplement connexe, limité par un nombre fini d'arcs de courbe analytiques réguliers sans pointes. Supposons que l'origine soit un point anguleux du contour, d'angle $\alpha\pi$. L'auteur remplace les deux transformations du paragraphe précédent, qui font disparaître ce point anguleux, par deux autres qui produisent le même effet, mais sans introduire ailleurs de point de ramification et sans que le domaine transformé recouvre plusieurs fois une même partie du plan. Il y arrive d'abord en posant

$$Z = z - \sum_{k=2}^{m} A_k z^k - \sum_{i=m+1}^{\infty} A_i z^i,$$

le second membre étant une fonction entière qui ne s'annule que pour $z = 0$ et dont la dérivée ne s'annule jamais. Il choisit ensuite dans le plan de la variable complexe Z un certain point Z^* et effectue la transformation

$$Z = \left(Z^{\frac{1}{\alpha}} - Z^*\right)^{\alpha}.$$

Il arrive ainsi de proche en proche à effectuer une représentation conforme du domaine T sur un domaine T′ dont le contour S′ satisfait aux conditions énoncées au début du Chapitre.

La dérivée $F'(z)$ de la fonction $F(z)$, qui réalise la représentation conforme sur un cercle, satisfait à une équation de la forme

$$F'(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{\frac{1}{\alpha_i} - 1} \Theta(z),$$

où $\Theta(z)$ désigne une fonction différente de zéro continue dans T et sur S, et où les $z^{(i)}$ sont les points anguleux du contour, les angles correspondants étant $\alpha_i\pi$.

Si tous les $\alpha^{(i)}$ sont irrationnels, on peut ajouter qu'au voisinage d'un des points anguleux, par exemple $z=0$, on a

$$\frac{d^k F(z)}{dz^k} = \frac{d^k}{dz^k}\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) F_k(z) \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

la fonction $F_k(z)$ étant régulière dans T et à l'intérieur et sur le contour d'une portion quelconque τ' de T contenant le sommet $z=0$, mais aucun autre sommet.

Chapitre II. — *Les problèmes aux limites de la théorie du potentiel pour des domaines analytiques plans à points anguleux.* — 1. La recherche d'une fonction potentielle $u(x,y)$ régulière dans le domaine T et telle que, sur le contour S, cette fonction prenne des valeurs données $h(s)$, ou sa dérivée normale des valeurs données $g(s)$, se ramène à un problème analogue pour un domaine T′, limité par un contour S′, formé d'arcs de courbe analytiques réguliers sans points anguleux. Si les fonctions $h(s)$ et $g(s)$ sont bornées et sommables au sens de Lebesgue, les fonctions analogues $l(s')$ et $k(s')$ pourront cesser d'être bornées [du moins $k(s')$] aux points A′ du contour S′ qui correspondent aux points anguleux A du contour S; mais, si $\alpha<1$, elles seront encore sommables au sens de Lebesgue. On pourra alors appliquer la méthode de Fredholm sans aucune difficulté.

Le cas, plus difficile, du troisième problème aux limites peut également être abordé par les méthodes de l'auteur. Il s'agit de déterminer une fonction potentielle u satisfaisant, sur le contour S, à la condition

$$\frac{\partial u(s)}{\partial n} + f(s)\, u(s) = g(s),$$

où $f(s)$ et $g(s)$ sont des fonctions bornées, sommables au sens de Lebesgue. La résolution de ce problème se ramène à celle du même problème, dans le cas où le contour S n'offre aucun point anguleux, les fonctions $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ d'un point variable ζ du contour pouvant cesser d'être bornées au voisinage d'un nombre fini de points $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(k)}$, mais de manière à satisfaire aux inégalités

$$|f(\zeta)| < C^{(i)} r_{\zeta\zeta^{(i)}}^{\beta_i - 1}, \qquad |g(\zeta)| < C^{(i)} r_{\zeta\zeta^{(i)}}^{\beta_i - 1} \qquad (1 > \beta_i > 0),$$

dans lesquelles les $C^{(i)}$ sont des constantes et $r_{\zeta\zeta'}$ désigne la distance des deux points ζ et ζ'.

La solution du problème est fournie par le potentiel

$$u(z) = \int \log \frac{1}{r_{z\zeta}}\, \theta(\zeta)\, ds_\zeta,$$

où $\theta(\zeta)$ est donnée par l'équation intégrale

$$-\theta(\zeta_0) + \int \frac{\partial}{\partial n_{\zeta_0}}\left(\log \frac{1}{r_{\zeta_0\zeta}}\right)\theta(\zeta)\, ds_\zeta + f(\zeta_0)\int \log \frac{1}{r_{\zeta_0\zeta}}\, \theta(\zeta)\, ds_\zeta = g(\zeta_0).$$

2. Cette équation intégrale se ramène à une autre équation intégrale dont le

noyau est de la forme

$$P_1(\zeta_0, \zeta) + f(\zeta_0) P_2(\zeta_0, \zeta),$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions continues de leurs deux arguments. Bien que tous les noyaux itérés soient de la même forme et par suite ne soient pas bornés, on peut cependant appliquer complètement la théorie de Fredholm à l'équation intégrale considérée.

On obtient ainsi une fonction potentielle $u(z)$ qui satisfait en tous les points du contour, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, à la condition aux limites

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n} + f(\zeta) u(\zeta) = g(\zeta).$$

Cette solution est unique.

Horn (*J.*). — Équations intégrales de Volterra et équations aux sommes. Première Partie : Sur la théorie des singularités des équations intégrales de Volterra (120-158). Deuxième Partie : Sur les solutions de certaines équations aux sommes et leurs valeurs asymptotiques (159-174).

1. L'équation intégrale

$$\int_0^x H(x, y)(y)\, dy = f(x),$$

où le noyau $H(x, y)$ et $f(x)$ sont des fonctions données et où $\varphi(y)$ est la fonction inconnue, a été intégrée par Le Roux, Volterra, Picard et Lalesco dans l'hypothèse $H(0, 0) \neq 0$. Si $H(0, 0) = 0$, Volterra, Holmgren et Lalesco ont étudié l'équation intégrale dans l'hypothèse

$$a_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\lambda + \mu < m), \qquad a_{m0} + a_{m-1,1} + \ldots + a_{0m} \neq 0,$$

la quantité $a_{\lambda\mu}$ étant le coefficient de $x^\lambda y^\mu$ dans le développement de $H(x, y)$. Le cas $a_{00} = a_{10} + a_{01} = 0$ $(a_{10} \neq 0)$ n'a été qu'effleuré par Holmgren et Lalesco.

C'est à ce cas qu'est consacrée surtout la première Partie de ce Mémoire.

1. L'auteur expose d'abord les résultats relatifs au cas

$$a_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\lambda + \mu < m), \qquad a_{m0} + a_{m-1,1} + \ldots + a_{0m} = 0.$$

Il pose

$$H(x, y) = H_0(y) + H_1(y) \frac{y - x}{1!} + H_2(y) \frac{(y - x)^2}{2!} + \ldots,$$

où

$$H_0(y) = H(y, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda y^\lambda, \qquad a_\lambda = a_{\lambda 0} + a_{\lambda-1,1} + \ldots + a_{0\lambda};$$

$$H_1(y) = -a_{10} - (a_{11} + 2a_{20}) y - \ldots, \qquad H_2(y) = 2a_{20} + \ldots.$$

Si l'on suppose

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_k = 0, \qquad a_{k+1} \neq 0,$$

on peut poser

$$H_0(y) = y^{k+1}\mathcal{H}(y), \qquad \mathcal{H}(y) = a_{k+1} + a_{k+2}y + \ldots,$$

et l'on peut se ramener facilement au cas où $\mathcal{H}(y) = 1$. La nouvelle fonction $H_1(y)$ est de la forme

$$H_1(y) = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots, \qquad \alpha = -\frac{a_{10}}{a_{k+1,0} + a_{k1} + \ldots + a_{0,k+1}}.$$

L'auteur va substituer à l'équation intégrale donnée celle qu'on obtient en la dérivant deux fois par rapport à x, et il va intégrer cette nouvelle équation par la méthode des approximations successives.

2. L'auteur suppose d'abord $k = 0$ et considère l'équation intégrale *homogène*

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = 0.$$

Si $H(x, y)$ est régulière pour $|x| < r$, $|y| < r$, si $H(x, x)$ ne s'annule jamais pour $0 < |x| < r$ et si le nombre

$$\rho = -\frac{2a_{10} + a_{01}}{a_{10} + a_{01}}$$

a sa partie réelle supérieure à -1, l'équation intégrale admet une intégrale (définie à un facteur constant près),

$$\varphi(x) = x^{\rho}\,\mathfrak{p}(x),$$

où la fonction $\mathfrak{p}(x)$ est régulière pour $|x| < r$ et où $\mathfrak{p}(0) \neq 0$.

Si la partie réelle de ρ est inférieure à -1, l'équation intégrale ne possède aucune solution $\varphi(x)$ admettant une dérivée et telle que, pour les valeurs réelles de x,

$$0 \leq x \leq x_0,$$

on ait

$$|\varphi(x)| < Lx^{\delta-1} \qquad (\delta > 0).$$

3. L'auteur considère maintenant l'équation non homogène

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

où $H(x, y)$ satisfait aux mêmes conditions qu'au paragraphe précédent. Si $f(x)$ est régulière pour $|x| < r$ et si $f(0) = f'(0) = 0$, l'équation intégrale admet une solution régulière pour $|x| < r$, à condition que la partie réelle de ρ ne soit pas un entier positif ou nul.

Si $f(0)$ ou $f'(0)$ n'est pas nul, l'équation intégrale n'admet aucune solution régulière au voisinage de $x = 0$.

4. L'auteur énonce et démontre plusieurs lemmes utiles pour la suite. Pour donner une idée de la nature de ces lemmes, citons les deux suivants :

L'équation différentielle linéaire

$$\frac{d[x^{k+1}\varphi(x)]}{dx} - (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots)\varphi(x) = g(x),$$

où l'on a, pour x suffisamment petit et positif,

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

admet la solution

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\rho} p(x) \int_{\xi}^{x} \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\rho-k-1} g(y)}{p(y)} dy,$$

où l'on a posé

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{kx^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{x}, \qquad \rho = \alpha_k - k - 1,$$

$$p(x) = e^{\alpha_{k+1}x + \frac{1}{2}\alpha_{k+2}x^2 + \ldots}.$$

$\xi = 0$, si la partie réelle de α est négative; $\xi = x_0$, si la partie réelle de α est positive.

De plus, pour x suffisamment petit et positif, $\varphi(x)$ est représenté asymptotiquement par la série qui satisfait formellement à l'équation différentielle.

La même équation différentielle où l'on a, pour x suffisamment petit et positif,

$$g(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\rho+k+1}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots),$$

admet la solution

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\rho} p(x) \int_{0}^{x} \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\rho-k-1} g(y)}{p(y)} dy,$$

avec une représentation asymptotique de la forme

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\rho}(c_1 x + c_2 x^2 + \ldots).$$

5. L'auteur considère l'équation intégrale homogène

$$\int_0^x H(x, y)\varphi(y)\, dy = 0,$$

où l'on a

$$H(x, y) = y^{k+1} + H_1(y)\frac{y-x}{1!} + \ldots, \qquad H_1(y) = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots,$$

et il suppose d'abord la partie réelle de α positive. En dérivant deux fois et intégrant par approximations successives, on démontre l'existence d'une solution $\varphi(x)$, représentée pour des valeurs de x suffisamment petites et positives par une série convergente

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots.$$

Si l'on pose

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{kx^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{x},$$

$$\rho = \alpha_k - k - 1, \qquad p(x) = e^{\alpha_{k+1}x + \frac{1}{2}\alpha_{k+2}x^2 + \ldots},$$

on a

$$\varphi_0(x) = e^{\mathfrak{I}(x)} x^{\mathfrak{R}} p(x),$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -e^{\mathfrak{I}(x)} x^{\mathfrak{R}} p(x) \int_0^x \frac{e^{-\mathfrak{I}(y)} y^{-\mathfrak{R}-k-1} \Phi_\nu(y)}{p(y)} dy,$$

$$\Phi_\nu(x) = \int_0^x \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} \varphi_\nu(y) dy$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

La fonction $\varphi(x)$ admet, pour x suffisamment petit et positif, une représentation asymptotique

$$e^{\mathfrak{I}(x)} x^{\mathfrak{R}} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$$

qui satisfait formellement à l'équation intégrale donnée différentiée deux fois.

Si la partie réelle de α est négative, l'équation intégrale homogène donnée n'admet aucune solution $\varphi(x)$ satisfaisant pour $0 \leqq x \leqq x_0$ $(x_0 > 0)$ à la condition

$$|\varphi(x)| \leqq L x^{\delta - 1} \qquad (\delta > 0).$$

6, 7. L'auteur considère maintenant l'équation non homogène

$$\int_0^x H(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

avec les mêmes hypothèses sur le noyau $H(x, y)$. Si $f(x)$ est développable au voisinage de $x = 0$ en une série de puissances, avec $f(0) = f'(0) = 0$, et si la partie réelle de α est différente de zéro, l'équation intégrale admet une solution $\varphi(x)$ qui, pour $0 \leqq x \leqq x_0$ (x_0 positif et suffisamment petit) est représentée par une série convergente

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots,$$

où

$$\varphi_0(x) = e^{\mathfrak{I}(x)} x^{\mathfrak{R}} p(x) \int_\xi^x \frac{e^{-\mathfrak{I}(y)} y^{-\mathfrak{R}-k-1} f''(y)}{p(y)} dy,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -e^{\mathfrak{I}(x)} x^{\mathfrak{R}} p(x) \int_\xi^x \frac{e^{-\mathfrak{I}(y)} y^{-\mathfrak{R}-k-1} \Phi_\nu(y)}{p(y)} dy,$$

$$\Phi_\nu(x) = \int_0^x \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} \varphi_\nu(y) dy$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

La limite inférieure ξ des intégrales est 0 ou x_0 suivant que la partie réelle de α est négative ou positive.

Pour les petites valeurs positives de x, la solution $\varphi(x)$ est représentée asymptotiquement par une série de puissances satisfaisant formellement à l'équation obtenue en dérivant deux fois l'équation intégrale donnée.

8. Les résultats précédents s'étendent au cas où le point singulier $x = y = 0$ est rejeté à l'infini, ce qu'on peut obtenir en faisant le changement de variables

$x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{1}{y'}$. On obtient ainsi des équations intégrales de la forme

$$-\int_{\infty}^{x} \mathrm{H}(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

où H est développable suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et de $\frac{1}{y}$ et où $f(x)$ est régulière au voisinage de l'infini.

II. Dans la seconde Partie de son Mémoire, l'auteur s'occupe des équations aux sommes

$$-\sum_{v}^{\infty} \mathrm{H}(x, y)\, \varphi(y) = f(x),$$

dont les équations intégrales précédentes peuvent se déduire par un passage à la limite du discontinu au continu. Ces équations aux sommes peuvent être regardées comme définissant un système d'une infinité d'équations linéaires

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(0,0)\,\varphi(0) + \mathrm{H}(0,1)\,\varphi(1) + \mathrm{H}(0,2)\,\varphi(2) + \ldots &= -f(0), \\ \mathrm{H}(1,1)\,\varphi(1) + \mathrm{H}(1,2)\,\varphi(2) + \ldots &= -f(1), \\ \mathrm{H}(2,2)\,\varphi(2) + \ldots &= -f(2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \end{aligned}$$

à une infinité d'inconnues $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... Si $\mathrm{H}(x, y)$ est un polynome entier de degré n en x, l'équation aux sommes peut se ramener à une équation aux différences linéaire d'ordre n.

9. L'auteur considère l'équation

$$-\sum_{x}^{\infty} \mathrm{H}(x, y)\, \varphi(y) = f(x),$$

où x est un nombre réel positif supérieur à un certain nombre fixe x_0. Il suppose la fonction $\mathrm{H}(x, y)$ développable, pour x et y suffisamment grands, en une série de puissances en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$,

$$\mathrm{H}(x, y) = \sum_{\lambda, \mu} \frac{a_{\lambda\mu}}{x^{\lambda} y^{\mu}} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

On a alors

$$\mathrm{H}_0(x) = \mathrm{H}(x, x) = a_{00} + \frac{a_{10} + a_{01}}{x} + \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02}}{x^2} + \ldots,$$

$$\Delta\, \mathrm{H}(x, y) = \mathrm{H}(x+1, y) - \mathrm{H}(x, y) = \frac{1}{x^2}\left(-a_{00} + \frac{a_{10} - 2a_{20}}{x} - \frac{a_{11}}{y} + \ldots\right).$$

Si d'abord le coefficient a_{00} n'est pas nul, on peut poser

$$\frac{\Delta\, \mathrm{H}(x, y)}{\mathrm{H}_0(x)} = \frac{1}{x^2}\, \pi(x, y).$$

où $\pi(x, y)$ est une série de puissances en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. Si l'on pose encore

$$\frac{\Delta f(x)}{H_0(x)} = g(x),$$

la fonction inconnue $\varphi(x)$ est donnée par l'équation

$$(\alpha) \qquad \varphi(x) - \frac{1}{x^2}\sum_{x+1}^{\infty} \pi(x, y)\,\varphi(y) = g(x).$$

Si maintenant on a $a_{00} = 0$, $a_{01} + a_{10} \neq 0$, on pose

$$Q(x) = (x+1)[H_0(x+1) - H_1(x+1)] + H_0(x+1) + H_1(x+1),$$
$$H_1(x) = -\Delta H(x-1, x).$$
$$\frac{\Delta^2 x f(x)}{Q(x)} = h(x),$$
$$\frac{x H_0(x)}{Q(x)} = 1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots, \qquad \alpha_1 = -\frac{a_{01}}{a_{10} + a_{01}},$$
$$\frac{x\Delta^2 H(x, y) + 2\Delta H(x+1, y)}{Q(x)} = \frac{1}{x^3}\omega(x, y).$$

Alors $\varphi(x)$ est donnée par l'équation

$$(\beta) \quad \varphi(x+1) - \left(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right)\varphi(x) - \frac{1}{x^3}\sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\,\varphi(y) = h(x)$$

Si enfin on a $a_{00} = a_{01} + a_{10} = 0$, $a_{20} + a_{11} + a_{02} \neq 0$, on a

$$\frac{x H_0(x)}{Q(x)} = \alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots, \qquad \alpha = \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02}}{a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01}};$$

en supposant α différent de zéro, on pose

$$\frac{x\Delta^2 H(x, y) + 2\Delta H(x+1, y)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2}\omega(x, y).$$

La fonction $\varphi(x)$ est alors donnée par l'équation

$$(\gamma) \quad \varphi(x+1) - \left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right)\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\,\varphi(y) = h(x).$$

10. L'auteur énonce et démontre quelques lemmes utiles pour la suite.

11. L'auteur résout par approximations successives l'équation

$$(\alpha) \qquad \varphi(x) - \frac{1}{x^2}\sum_{x+1}^{\infty} \pi(x, y)\,\varphi(y) = g(x)$$

en supposant

$$|\pi(x, y)| \leq M \qquad \text{pour} \qquad y > x \geq x_0$$

et

$$|g(x)| \leqq \frac{N}{x^2} \qquad \text{pour} \qquad x \geqq x_0.$$

Il pose pour cela

$$\varphi_0(x) = g(x), \qquad \varphi_{\nu+1}(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{x+1}^{\infty} \pi(x, y)\,\varphi_\nu(y) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

La série

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots$$

est alors absolument et uniformément convergente pour x suffisamment grand et satisfait à l'équation (α).

Il en résulte que si $f(x)$ est développable en une série de puissances en $\frac{1}{x}$ sans terme constant et si $a_{00} = 0$, l'équation aux sommes primitives admet la solution qui vient d'être indiquée. De plus cette solution $\varphi(x)$ admet une représentation asymptotique de la forme

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{x^2} + \frac{c_1}{x^3} + \ldots,$$

12. L'équation

$$(\beta') \qquad \varphi(x+1) - \left(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right)\varphi(x) - \frac{1}{x^3}\sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\,\varphi(y) = 0$$

se résout au moyen d'une suite d'équations aux différences linéaires du premier ordre, ce qui donne, si la partie réelle de α_1 est inférieure à -1, la solution

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots,$$

convergente pour des valeurs suffisamment grandes de x. On a

$$\varphi_0(x) = x^\rho p(x), \qquad \rho = \alpha_1, \qquad p(x) = \frac{1}{\prod_n^{\infty}\left(1 + \frac{\beta_2}{y^2} + \frac{\beta_3}{y^3} + \ldots\right)},$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -x^\rho p(g)\sum_x^{\infty} \frac{y^{-\rho}\Phi_\nu(y)}{\left(1 + \frac{\alpha_1}{y} + \ldots\right)p(y)}, \qquad \Phi_\nu(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\,\varphi_\nu(y).$$

Cette solution satisfait à l'équation primitive dans l'hypothèse indiquée où la partie réelle de $\rho = -\frac{a_{01}}{a_{10} + a_{01}}$ est inférieure à -1, et elle admet une représentation asymptotique

$$\varphi(x) = x^\rho\left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\right).$$

13. L'équation

$$(\gamma') \qquad \varphi(x+1) - \left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right)\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\,\varphi(y) = 0$$

se résout d'une manière analogue dans le cas $|\alpha| < 1$, ce qui correspond à

$$\left|\frac{a_{20} + a_{11} + a_{02}}{a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01}}\right| < 1.$$

La solution obtenue admet une représentation asymptotique de la forme

$$\varphi(x) = \alpha^x x^2 \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\right).$$

Neuendorff (*R.*). — Sur les courbes tracées sur une surface admettant, pour images sphériques, des grands cercles (175-204).

Dans cet article, qui est l'Habilitationsschrift de l'auteur à la Faculté de Philosophie de Kiel, les courbes dont l'image sphérique est un grand cercle sont désignées sous le nom de *Hauptkreiskurven*. Ce mot étant difficile à traduire, nous appellerons les courbes en question des courbes (N).

1. *L'équation des courbes* (N). — On obtient l'équation différentielle (du second ordre) des courbes (N) en exprimant que leurs images sphériques sont des lignes géodésiques de la sphère.

2. *Les courbes* (N) *tracées sur les surfaces développables.* — Abstraction faite des génératrices, il n'existe sur une surface développable aucune courbe (N). Il y a exception pour les cylindres dont toutes les courbes sont des courbes (N). Les développables isotropes n'entrent pas en considération.

3. *Les courbes* (N) *des surfaces de révolution.* — Une surface de révolution étant définie par les équations

$$x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u),$$

ses courbes (N) sont évidemment connues sans intégration; ce n'est cependant pas ainsi que l'auteur procède. Il intègre l'équation différentielle du second ordre qui donne ces courbes et arrive à l'équation

$$\operatorname{tang}^2(v - u) = \frac{1 - q'^2}{bq'^2 - 1};$$

il suppose que u est l'arc de la méridienne.

4. *L'angle des normales en deux points d'une courbe* (N) *choisis sur deux courbes sphériquement orthogonales.* — Étant donnée une famille à un paramètre de courbes (N), l'auteur appelle *courbes sphériquement orthogonales de cette famille* les courbes dont l'image sphérique est orthogonale à l'image sphérique de ces courbes (N). Si l'on considère deux de ces courbes sphériquement orthogonales et les deux points où ces deux courbes coupent une courbe (N) quelconque de la famille donnée, l'angle des normales à la surface en ces deux points est constant.

5. *Une autre propriété des courbes* (N). — Si l'on prend pour courbes coordonnées sur la surface une famille de courbes (N) (u = const.) et la famille des courbes sphériquement orthogonales (v = const.), le ds^2 de la sphère est réductible à la forme

$$d\varphi^2 = \mathcal{E}\, du^2 + dv^2.$$

L'angle α que fait la perpendiculaire commune à deux normales, infiniment voisines le long des courbes (N) avec la perpendiculaire commune à deux nor-

males infiniment voisines le long d'une courbe $v = \text{const.}$ satisfait à la relation

$$\frac{dx}{du} = -\frac{\partial\sqrt{\overline{U}}}{\partial v}.$$

Les coordonnées curvilignes d'O. Bonnet, obtenues en rapportant une surface à ses méridiens et à ses parallèles, sont un cas particulier des coordonnées précédentes.

6. *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont des courbes* (N). — Si l'une des familles de lignes de courbure d'une surface est formée de courbes (N), ces courbes sont des lignes géodésiques planes. Réciproquement, toute ligne géodésique plane est en même temps ligne de courbure et courbe (N).

Si les deux familles de lignes de courbure sont formées de courbes (N) ces deux familles sont, sur la surface et sur la sphère, isothermes.

7. *Détermination de toutes les surfaces sur lesquelles les lignes minima sont en même temps courbes* (N). — En désignant par R_1 et R_2 les deux rayons de courbure principaux et en supposant que le ds^2 de la surface, rapportée a ses lignes de courbure, soit

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

les conditions pour que les deux familles de lignes minima soient formées de courbes (N) sont

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{R_1\sqrt{\overline{G}}}{R_2\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{i\,R_2\sqrt{\overline{E}}}{R_1\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} = 0.$$

Si l'on fait abstraction des sphères, des surfaces minima, des surfaces développables, des surfaces de Weingarten, on peut choisir le paramètre u et v de manière à avoir

$$R_1 = \frac{u^2 v}{u + v}, \qquad R_2 = \frac{v^2 u}{u + v}.$$

On obtient alors, pour les six quantités fondamentales, les expressions

$$E = \frac{1}{U}\frac{v - u}{v + u}, \qquad F = 0, \qquad G = \frac{1}{V}\frac{u - v}{u + v};$$

$$L = \frac{1}{U}\frac{v - u}{u^2 v}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{1}{V}\frac{u - v}{v^2 u},$$

où U et V sont des fonctions respectivement de u et de v, satisfaisant aux équations

$$U''' u^5 - 3U'' u^4 + 3U' u^3 - 48 = 0,$$
$$V'' v^5 - 3V' v^4 + 3V' v^3 - 48 = 0.$$

8. *Les surfaces de Weingarten sur lesquelles les lignes minima sont des courbes* (N). — Il doit exister entre les rayons de courbure principaux d'une telle surface une relation de la forme

$$\frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1} = a = \text{const.}$$

En posant

$$R_2 = \tau, \qquad R_1 = \frac{\tau^2}{a - \tau},$$

on obtient

$$ds^2 = \frac{\tau^2}{(2\tau - a)(\alpha\tau^2 - 2\tau + a)} d\tau^2 + (2\tau - a)\, dv^2.$$

Toutes ces surfaces sont de révolution. En posant

$$\tau = \frac{b(x^2 + y^2) + a}{2},$$

l'équation de ces surfaces peut se ramener à l'une des trois formes suivantes :

$$(\alpha) \qquad ab = 1 : \qquad z = \pm \frac{1}{b} \log [2(1 - b\tau)].$$

$$(\beta) \qquad ab > 1 : \qquad z = \pm \frac{1}{b} \log \frac{b\tau - 1 + \sqrt{b(b\tau^2 - 2\tau + a)}}{ab - 1},$$

$$(\gamma) \qquad ab < 1 : \qquad z = \pm \frac{1}{b} \log \frac{b\tau - 1 + \sqrt{b(b\tau^2 - 2\tau + a)}}{\pm\sqrt{1 - ab}}.$$

9. *Détermination de toutes les surfaces sur lesquelles les lignes géodesiques sont identiques aux courbes* (N). — Ces surfaces doivent satisfaire à deux relations de la forme

$$\frac{R_2^2}{R_1 + R_2} = a, \qquad \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1} = b.$$

On ne trouve que des sphères.

10. *Détermination de toutes les surfaces sur lesquelles les lignes asymptotiques sont en même temps des courbes* (N). — Si l'on rapporte la surface à ses lignes de courbure et si l'on fait abstraction des surfaces développables et des surfaces de Weingarten, les six quantités fondamentales sont, pour les surfaces cherchées, de la forme

$$E = \frac{1}{U}(u^2 - v^2), \qquad F = 0, \qquad G = \frac{1}{V}(v^2 - u^2);$$

$$L = \frac{1}{U}\frac{u^2 - v^2}{u^3 v}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{1}{V}\frac{v^2 - u^2}{v^2 u},$$

où U et V, fonctions respectivement de u et de v, satisfont aux équations

$$U'' u^3 - 3U'' u^6 - 3U' u^5 - 48 = 0,$$
$$V'' v^3 - 3V'' v^6 - 3V' v^5 - 48 = 0.$$

11. *Détermination de toutes les surfaces de Weingarten sur lesquelles les lignes asymptotiques sont en même temps des courbes* (N). — On doit avoir

$$\frac{R_2^3}{R_1} = \frac{1}{a} = \text{const}.$$

Le ds^2 de la surface est de la forme

$$ds^2 = \frac{\alpha^2\tau^4}{(\alpha\tau^2+1)(a\tau^2-1)}\,d\tau^2 \pm (a\tau^2-1)\,dv^2 \qquad (\tau = R_1).$$

La surface est de révolution et se réduit à une quadrique.

12. *Représentation d'une surface sur une autre avec conservation des courbes* (N). — L'auteur exclut d'abord le cas où à une et une seule des familles de génératrices rectilignes de la sphère dans la représentation sphérique de la première surface correspondrait une famille de génératrices rectilignes de la sphère dans la représentation sphérique de la seconde surface. Dans ces conditions deux cas sont possibles :

Ou bien les ds^2 de la sphère sont identiques dans les deux représentations sphériques;

Ou bien ces ds^2 sont réductibles à la forme

$$d\varphi^2 = (U+V)(du^2+dv^2),$$
$$d\overline{\varphi}^2 = -\left(\frac{1}{U}+\frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U}-\frac{dv^2}{V}\right).$$

Les courbes (N) sont, dans ce second cas, définies sur les deux surfaces par l'équation

$$\int\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int\frac{dv}{\sqrt{V+a}} = b.$$

13. *Cas particulier de la représentation de deux surfaces l'une sur l'autre avec correspondance des courbes* (N). — Ce cas est celui où les deux surfaces ont la même représentation sphérique; la représentation des deux surfaces l'une sur l'autre est dite, d'après Stackel, *conforme-conjonctive*. En général, une telle représentation se ramène à une transformation par similitude. Il y a exception pour les surfaces développables. Si l'on rapporte une surface développable à ses génératrices (v = const.) et à leurs trajectoires orthogonales (u = const.), la représentation est fournie par les formules

$$\overline{E} = \sigma^2(u)E; \qquad \overline{G} = \sigma^2(u)G; \qquad \overline{N} = \sigma(u)N.$$

14. *Conclusion.* — L'auteur indique quelques problèmes qu'on pourrait se poser pour généraliser la théorie précédente.

Hilb (*Emil*). — Sur des développements en série qui se présentent dans l'intégration d'équations différentielles ordinaires linéaires non homogènes avec certaines conditions aux limites (205-225).

Cet article, qui se rattache à des recherches antérieures de Kneser (*Math. Ann.*, t. LX et LXIII) et de l'auteur lui-même (*Math. Ann.*, t. LXXI) s'occupe de développements en séries de fonctions arbitraires suivant les fonctions fondamentales de noyaux non symétriques.

Dans un premier Chapitre, l'auteur considère l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} + \lambda u = K(x),$$

détermine les valeurs de λ pour lesquelles il existe une solution $u(\lambda, x)$ de cette équation, prenant pour $x = 0$ et $x = 1$ des valeurs données, et considère les solutions $v(\lambda, x)$ de l'équation

$$\frac{dv}{dx} - \lambda v = 0;$$

on a alors

$$\int_0^1 v(\lambda_i, x)\, u(\lambda_j, x)\, dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad \neq 0$$

suivant que λ_i et λ_j sont des valeurs fondamentales distinctes ou non. Le problème qui se pose est celui du développement de fonctions arbitraires suivant les $u(\lambda_i, x)$ ou les $v(\lambda_i, x)$.

Dans un deuxième Chapitre, l'auteur considère l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [\lambda^2 + q(x)]\, u = K(x),$$

et détermine les valeurs de λ pour lesquelles il existe une solution $u(\lambda^2, x)$ prenant, ainsi que leur dérivée, des valeurs données α, β pour $x = 0$ et satisfaisant pour $x = 1$ à une relation de la forme

$$h_1 u'(\lambda^2, 1) - h_2 u(\lambda^2, 1) = \gamma.$$

La fonction correspondante $v(\lambda^2, x)$ est l'une des solutions de l'équation différentielle sans second nombre qui prennent pour $x = 1$ la valeur h_1 et dont la dérivée prend pour $x = 1$ la valeur h_2.

Chapitre I. — *Équations différentielles du premier ordre :* 1. *La fonction de Green.* — Si les valeurs que doit prendre la fonction $u(\lambda, x)$ pour $x = 0$ et $x = 1$ sont respectivement γ et Γ, l'équation qui donne les valeurs fondamentales de λ est

$$N(\lambda) = \int_0^1 K(z)\, e^{\lambda z}\, dz + \gamma - e^{\lambda}\Gamma = 0.$$

L'auteur définit d'abord la fonction de Green $V(\lambda; x, \xi)$ par les conditions suivantes :

$$\frac{dV(\lambda; x, \xi)}{dx} - \lambda V(\lambda; x, \xi) = 0,$$

$$V(\lambda; \xi - 0, \xi) - V(\lambda, \xi + 0, \xi) = 1,$$

$$\int_0^1 K(x) V(\lambda; x, \xi)\, dx - \gamma V(\lambda; 0, \xi) = \Gamma V(\lambda; 1, \xi).$$

On obtient ainsi

$$N(\lambda; x, \xi) = \frac{\int_\xi^1 K(z)\, e^{\lambda z}\, dz - e^{\lambda}\Gamma}{N(\lambda)}\, e^{\lambda(x-\xi)}, \qquad \text{si} \qquad x < \xi,$$

$$V(\lambda; x, \xi) = -\frac{\int_0^\xi K(z)\, e^{\lambda z}\, dz + \gamma}{N(\lambda)}\, e^{\lambda(x-\xi)}, \qquad \text{si} \qquad x > \xi.$$

La fonction de Green satisfait en outre aux relations

$$\frac{dV(\lambda;\, x,\, \xi)}{d\xi} + \lambda V(\lambda;\, x,\, \xi) = -\frac{K(\xi)\, e^{\lambda x}}{N(\lambda)},$$

$$V(\lambda;\, x,\, x+0) - V(\lambda;\, x,\, x-0) = 1,$$

$$V(\lambda;\, x,\, 0) = -\frac{\gamma\, e^{\lambda x}}{N(\lambda)}, \qquad V(\lambda;\, x,\, 1) = -\frac{\Gamma\, e^{\lambda x}}{N(\lambda)}.$$

Les propriétés précédentes conduisent à la formule importante

$$(\lambda - \lambda_1)\int_0^1 V(\lambda;\, x,\, z)\, V(\lambda_1;\, y,\, z)\, dx = V(\lambda_1;\, y,\, z) - V(\lambda;\, y,\, z).$$

Si l'on suppose que $\lambda_1 = 0$ n'est pas une valeur fondamentale, on obtient pour $V(\lambda;\, x,\, z)$ un développement valable au voisinage de $\lambda = 0$

$$V(\lambda;\, y,\, z) = V(0;\, y,\, z) + \lambda V^{(2)}(0;\, y,\, z) + \ldots,$$

avec

$$V^{(2)}(0;\, y,\, z) = -\int_0^1 V(0;\, x,\, z)\, V(0;\, y,\, x)\, dx = \left[\frac{d}{d\lambda} V(\lambda;\, y,\, z)\right]_{\lambda=0}.$$

Si $f(x)$ est une fonction admettant une dérivée continue et satisfaisant aux conditions

$$f(0) = \gamma, \qquad f(1) = \Gamma; \qquad f'(x) = g(x) + K(x),$$

on a

$$f(x) = \int_0^1 g(z)\, V(0;\, z,\, x)\, dz.$$

Si, de plus, $g(x)$ admet une dérivée continue et si l'on a

$$g(0) = \gamma, \qquad g(1) = \Gamma, \qquad g'(x) = g_1(x) + K(x),$$

on a

$$f(x) = -\int_0^1 V^{(2)}(0;\, y,\, x)\, g_1(y)\, dy.$$

Si au contraire $f(x)$ admet deux dérivées continues avec

$$f(1)\Gamma - f(0)\gamma - \int_0^1 f(x)\, K(x)\, dx = 0,$$

$$f(1)\Gamma - f'(0)\gamma - \int_0^1 f'(x)\, K(x)\, dx = 0,$$

on a

$$f(x) = -\int_0^1 V^{(2)}(0;\, x,\, y)\, f''(y)\, dy.$$

2. *Représentation de fonctions arbitraires.* — L'auteur suppose que $K(x)$ admet entre 0 et 1 une dérivée à variation bornée. Il étudie alors les valeurs asymptotiques des racines de l'équation $N(\lambda) = 0$, dans les cinq cas :

$$\text{I. } \gamma \gtrless 0,\ \Gamma \lessgtr 0; \qquad \text{II. } \gamma = 0,\ \Gamma \gtrless 0; \qquad \text{III. } \gamma \lessgtr 0,\ \Gamma = 0;$$
$$\text{IV. } \gamma = 0,\ \Gamma = 0; \qquad \text{V. } K(x) = 0.$$

On a, par exemple, dans le cas I, les valeurs asymptotiques

$$\lambda_k = \pm 2ki\pi + \log\frac{\gamma}{\Gamma}.$$

L'auteur applique alors le théorème de Cauchy à certains contours d'intégration qui sont des rectangles Q_k s'étendant à l'infini quand λ augmente indéfiniment. Dans le cas I le rectangle Q_k a pour centre $\log\frac{\gamma}{\Gamma}$, ses côtés sont parallèles aux axes et égaux à $4k\pi$.

Si λ est à l'intérieur de Q_k, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_k}\left[\frac{V(\bar\lambda; x, \xi)}{\bar\lambda - \lambda} - \frac{V(\bar\lambda; x, \xi)}{\bar\lambda}\right]\frac{d\bar\lambda}{\lambda} = [V(\lambda; x, \xi) - V(0; x, \xi)]\frac{1}{\lambda} + \Sigma\rho(\lambda_k),$$

où $\rho(\lambda_k)$ désigne le résidu de la fonction sous le signe $\int$ par rapport au pôle λ_k, de $V(\bar\lambda; x, \xi)$. On a, si ce pôle est simple,

$$\rho(\lambda_k) = u(\lambda_k, \xi)\,v(\lambda_k, x)\left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right)\frac{1}{\lambda}$$

en posant

$$u(\lambda_k, \xi) = \left(\int_0^\xi K(z)\,e^{\lambda_k z}\,dz + \gamma\right)e^{-\lambda_k \xi},$$

$$v(\lambda_k, x) = -\frac{e^{\lambda_k x}}{N'(\lambda_k)}.$$

Quand Q_k s'étend à l'infini et que λ tend vers zéro, on obtient, en supposant qu'il n'y ait que des pôles simples, la formule

$$V^{(2)}(0; x, \xi) = -\sum_k{}' \frac{u(\lambda_k, \xi)\,v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}.$$

Les fonctions $f(x)$ dont il est question à la fin du paragraphe 1 sont alors représentables, dans le premier cas par la formule

$$f(x) = \sum_k \frac{u(\lambda_k, x)}{\lambda_k^3}\int_0^1 v(\lambda_k, y)\,g_1(y)\,dy = \sum_k u(\lambda_k, x\int_0^1 f(z)\,v(\lambda_k, z)\,dz;$$

dans le second cas par la formule

$$f(x) = \sum_k \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}\int_0^1 u(\lambda_k, y)\,f''(y)\,dy = \sum_k v(\lambda_k, x\int_0^1 f(z)\,u(\lambda_k, z)\,dz.$$

3. L'auteur, en vue d'étendre les développements précédents à des fonctions plus générales, discute la validité des formules

$$V(0; x, y) = -\sum_k \frac{u(\lambda_k, y)\,v(\lambda_k, x)}{\lambda_k} \qquad (x > y).$$

$$\frac{1}{2}V(0; y - 0, y) + V(0; y + 0, y) = -\sum_k \frac{u(\lambda_k, y)\,v(\lambda_k, y)}{\lambda_k}$$

et

$$\left(\frac{e^{\lambda x}}{N(\lambda)}\right)_{\lambda=0} = \sum_k \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k},$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{e^{\lambda x}}{N(\lambda)}\right)_{\lambda=0} = \sum_k \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}.$$

Ces formules sont vraies en général, à part quelques restrictions à faire sur les valeurs attribuées à x et y. Il y a exception pour la troisième formule qui n'a pas de sens dans le cas IV, comme le montre le cas particulier $K(x) = 1$.

4. *Simplification des hypothèses à faire sur les fonctions à développer.*— L'auteur considère une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $(0, 1)$ et telle que cet intervalle soit décomposable en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels la fonction admet une dérivée première et une dérivée seconde continues. Pour chacun (a, b) de ces intervalles partiels l'auteur étudie les deux séries

$$\Sigma S_k \quad \text{et} \quad \Sigma T_k$$

où

$$S_k = u(\lambda_k, x)\int_a^b f(y)\,v(\lambda_k, y)\,dy; \qquad T_k = v(\lambda_k, x)\int_a^b f(y)\,u(\lambda_k, y)\,dy.$$

Il obtient

$$\sum S_k = \left[f(y)\sum \frac{u(\lambda_k, x)\,v(\lambda_k, y)}{\lambda_k}\right]_{y=a}^{y=b} + [f(y)\,V(0; y, x)]_{y=a}^{y=b}$$
$$(0 < x < 1).$$

$$\sum T_k = -\left[f(y)\sum \frac{v(\lambda_k, x)\,u(\lambda_k, y)}{\lambda_k}\right]_{y=a}^{y=b} - [V(0; x, y)\,f(y)]_{y=a}^{y=b}$$
$$(0 < x < 1).$$

La seconde formule n'est pas valable dans le cas IV.

On déduit de là que le développement

$$\Sigma u(\lambda_k, x)\int_0^1 f(y)\,v(\lambda_k, y)\,dy$$

représente

$\bar{f}(x)$	dans les cas	I et V;
$\bar{f}(x) - \frac{1}{2}\frac{K(x)}{K(+0)}f(+0)$	»	II;
$\bar{f}(x) - \frac{1}{2}\frac{K(x)}{K(1-0)}f(1-0)$;	»	III;
$\bar{f}(x) - \frac{1}{2}K(x)\left[\frac{f(+0)}{K(+0)} + \frac{f(1-0)}{K(1-0)}\right]$	»	IV.

On a posé, pour abréger,

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)].$$

Il existe de même, dans les cas I, II, III et V, le développement

$$\bar{f}(x) = \Sigma v(\lambda_k, x) \int_0^1 f(y) u(\lambda_k, y)\, dy.$$

Chapitre II. — *Équations différentielles du second ordre.* — Dans ce Chapitre l'auteur suit une marche parallèle à celle du précédent, les calculs et les résultats étant naturellement un peu plus compliqués. Signalons simplement la définition de la fonction de Green $V(\lambda^2; x, \xi)$: cette fonction doit satisfaire aux relations

$$\frac{d^2}{dx^2} V(\lambda^2; x, \xi) + [q(x) + \lambda^2] V(\lambda^2; x, \xi) = 0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right]_{x=\xi-0} - \left[\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right]_{x=\xi+0} = 1,$$

$$\frac{V(\lambda^2; 1, \xi)}{h_1} = \frac{\left[\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right]_{x=1}}{h_2} = \rho,$$

$$\int^1 V(\lambda^2; z, \xi) k(z)\, dz - \rho\gamma + \beta V(\lambda^2; 0, \xi) - \alpha \left[\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right]_{x=0} = 0.$$

Kokott (*P.*). — Démonstration géométrique élémentaire des théorèmes d'addition des fonctions elliptiques (p. 230-234).

Étant donné un cercle de centre M et de rayon 1, on mène par un point C intérieur au cercle deux cordes AA′ et BB′. Soient α, β, γ les trois angles du triangle mixtiligne ABC. L'auteur introduit la quantité k définie par

$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2\gamma} = -\cos\gamma$$

où

$$k^2 = \frac{1 - \overline{CM}^2}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}.$$

Définissons une fonction elliptique $\varphi = am(u)$ par la formule

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}};$$

soit de plus

$$\alpha = am(a), \qquad \beta = am(b);$$

l'angle $\sigma = am(a + b)$ est l'angle formé par les perpendiculaires MD, ME abaissées du point M sur les cordes AA′, BB′. On a de plus

$$MD = \cos\alpha, \qquad ME = \cos\beta, \qquad CD = \sin\alpha\, \Delta\beta, \qquad CE = \sin\beta\, \Delta\alpha.$$

On peut de là et des propriétés géométriques de la figure déduire simplement les théorèmes d'addition des fonctions elliptiques.

Kober (*Hermann*). — Contributions à la résolution de certains problèmes du calcul des variations; recherche de foyers cinétiques conjugués (p. 235-246).

On sait le rôle important joué dans le calcul des variations par les points conjugués d'une extrémale et par l'enveloppe des extrémales qui passent par un point donné. Cet article est consacré à la recherche de ces points conjugués et de ces enveloppes dans des problèmes particuliers du calcul des variations qui se présentent lorsqu'on applique le principe de la moindre action à l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à une force conservative. Si U est la fonction des forces, h la constante de l'énergie supposée donnée, ds l'élément d'arc de la trajectoire, cette trajectoire est une extrémale pour l'équation

$$\delta \int \sqrt{U + h}\, ds = 0.$$

Les points conjugués s'appellent dans ce cas, d'après Thomson et Tait, foyers cinétiques conjugués.

I. L'auteur examine d'abord le cas d'une force centrale, avec la fonction des forces $U = -x^2$. Les trajectoires sont ici les ellipses de centre O pour lesquelles la somme des carrés des demi-axes est h. Étant donné un point P sur une de ces ellipses, les deux foyers conjugués de P sont les points de contact des tangentes perpendiculaires à la tangente en P.

L'enveloppe des extrémales qui passent par un point donné P est une ellipse ayant pour foyers le point P et son symétrique P′ par rapport au point O, le grand axe étant $2\sqrt{h}$.

II. L'auteur examine ensuite le cas $U = +y^{-2}$. L'équation générale des trajectoires est

$$(x - x_0)^2 \left(\frac{h - a^2}{a}\right)^2 - y^2(h - a^2) = 1.$$

Il ne peut y avoir de point conjugué à un point donné P d'une de ces trajectoires que si h est négatif et $a^2 < -h$. Dans ce cas l'extrémale est une ellipse dont le grand axe est parallèle à Oy. Si l'on appelle e la demi-distance focale, α le demi-axe porté sur Ox, β le demi-axe parallèle à Oy, et si l'on prend sur l'ellipse les deux points R et R′ d'abscisses $x_0 \pm \frac{\alpha^2}{e^2}$, le point P n'admet aucun conjugué s'il est situé sur l'arc RBR′; dans le cas contraire il admet un foyer conjugué Q; la projection de PQ sur Ox est alors vue sous un angle droit du point $\left(x_0, \frac{\alpha^2}{e}\right)$.

L'enveloppe des extrémales qui passent par un point donné est une ellipse qui admet pour foyers le point donné et son symétrique par rapport à Ox.

III. L'auteur examine ensuite le cas $U = -y^{-2}$. Les trajectoires sont des hyperboles admettant Ox pour axe imaginaire :

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} = 1$$

avec

$$\alpha^2 = \beta^2(h\beta^2 - 1).$$

Tout point P d'une de ces hyperboles admet un conjugué Q; la projection P′Q′ de PQ sur Ox est vue sous un angle droit du point $\left(x_0, \frac{\alpha^2}{e}\right)$.

L'enveloppe des extrémales qui passent par P est une hyperbole admettant

pour foyers le point P et son symétrique par rapport à Ox; son axe réel est $\frac{2}{\sqrt{h}}$.

L'auteur en terminant démontre que dans le cas $U = r^{-2}$, $h < 0$, l'enveloppe des extrémales tourne sa concavité vers l'origine.

Gravé (*Demétrius*). — Démonstration d'un théorème de Tchébychef généralisé (p. 247-251).

Dans une Note lue le 18 janvier 1856 à l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, Tchébychef a énoncé un théorème sur les cartes géographiques. Si l'on fait la carte géographique d'une portion de surface limitée par un certain contour, le logarithme du rapport d'agrandissement a un certain maximum et un certain minimum quand on se déplace à l'intérieur de ce contour et sur ce contour; si l'on appelle déviation la différence entre ce maximum et ce minimum, la carte géographique pour laquelle cette déviation est minimum est celle pour laquelle l'agrandissement a une valeur constante le long du contour.

Ce théorème, auquel M. Darboux a consacré deux Notes (*Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier et février 1911), n'a pas été démontré par Tchébychef, qui en avait d'ailleurs donné un énoncé quelque peu obscur. L'auteur en donne la démonstration en supposant simplement que la courbure de la surface est de signe constant à l'intérieur du contour donné. Il se sert pour cela des propriétés classiques des fonctions qui satisfont à l'équation de Laplace.

Schrutka (*Lothar von*). — Démonstration de la possibilité de décomposer un nombre premier de la forme $6n+1$ en une somme d'un carré et du triple d'un autre carré (p. 252-265).

1. Kästner et Jacobsthal se sont occupés de la détermination des deux entiers a et b qui s'introduisent dans la représentation

$$p = a^2 + b^2$$

d'un nombre premier de la forme $4n+1$. L'auteur se propose de déterminer d'une manière analogue les entiers a et b qui s'introduisent dans la représentation

$$p = a^2 + 3b^2$$

d'un nombre premier de la forme $6n+1$.

2. Étant donné un nombre premier impair p, on appelle somme de $n^{\text{ième}}$ espèce une somme de la forme

$$\sum_{0}^{p-1} i\left(\frac{f(i)}{p}\right)$$

où $f(i)$ désigne un polynome entier en i de degré n et où $\left(\frac{m}{p}\right)$ est le symbole de Legendre.

3. Jacobsthal a indiqué, pour les sommes de première espèce, la formule

$$\sum_{0}^{p-1} i\left(\frac{ui+v}{p}\right) = p\left(\frac{v}{p}\right)\left[1-\left(\frac{u}{p}\right)^2\right].$$

4. On a, pour les sommes de seconde espèce, la formule

$$\sum_{0}^{p-1} i\left(\frac{ui^2+vi+w}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right)\left[p-1-\left(\frac{D}{p}\right)^2\right] + p\left(\frac{w}{p}\right)\left[1-\left(\frac{u}{p}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{v}{p}\right)^2\right]$$

où l'on a posé

$$D = v^2 - 4uw;$$

l'auteur donne de cette formule due à Jacobsthal une nouvelle démonstration.

5. Si $p \equiv 5 \pmod 6$, tout nombre premier avec p est un résidu cubique. Si $p \equiv 1 \pmod 6$, les nombres premiers avec p et inférieurs à p se partagent en trois classes de $\frac{p-1}{3}$ nombres, dont la première (I) contient les résidus cubiques et les deux autres (II, III) les non-résidus cubiques. Si l'on désigne par j une racine primitive de la congruence

$$x^3 \equiv 1 \pmod p,$$

les nombres des deux dernières classes s'obtiennent en multipliant ceux de la première par j et j^2.

6. L'auteur introduit la somme de quatrième espèce

$$\varphi(u) = \sum_{0}^{p-1} i\left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i^3+u}{p}\right)$$

qui va jouer un rôle important. On a

$$\varphi(0) = p-1.$$

Si $p \equiv 5 \pmod 6$, on a

$$\varphi(u) \equiv 1 \pmod 2 \qquad (u \not\equiv 0).$$

Si $p \equiv 1 \pmod 6$, $\varphi(u)$ est congru à 1 ou à 0 (mod 2) suivant que u est résidu ou non-résidu cubique.

7. Les valeurs de $\varphi(u)$ sont les mêmes pour tous les nombres u d'une même classe. Il existe donc, si $p \equiv 1 \pmod 6$, trois valeurs de $\varphi(u)$, désignées par φ_{I}, φ_{II}, φ_{III}. On a

$$\varphi_{\mathrm{I}} \equiv 3, \qquad \varphi_{\mathrm{II}} \equiv 0, \qquad \varphi_{\mathrm{III}} \equiv 0 \pmod 6.$$

8. Si $p \equiv 5 \pmod 6$, on a

$$\varphi(u) = \varphi(1) = -1.$$

Si $p \equiv 1 \pmod 6$, on a

$$\frac{\varphi_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{\varphi_{\mathrm{II}}}{3} + \frac{\varphi_{\mathrm{III}}}{3} = -1.$$

9. Si $p \equiv 1 \pmod 6$, ce qu'on supposera dans tout ce qui va suivre, on a

$$\left(\frac{\varphi_{\mathrm{I}}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{II}}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{III}}}{3}\right)^2 = p - \frac{p-1}{3}.$$

10. L'auteur démontre la formule

$$\frac{\varphi_{\mathrm{II}}}{3}\,\frac{\varphi_{\mathrm{III}}}{3} + \frac{\varphi_{\mathrm{III}}}{3}\,\frac{\varphi_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{\varphi_{\mathrm{I}}}{3}\,\frac{\varphi_{\mathrm{II}}}{3} = -\frac{p-1}{3}$$

qui se déduit d'ailleurs des précédentes.

11. Les deux dernières formules écrites donnent

$$p = \left(\frac{2\varphi_{\mathrm{I}} - \varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{III}}}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{III}}}{3}\right)^2.$$

En posant donc,

$$a = \frac{2\varphi_{\mathrm{I}} - \varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{III}}}{3}, \qquad b = \frac{\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{III}}}{3},$$

le nombre premier p est mis sous la forme

$$p = a^2 + 3b^2.$$

On peut encore écrire

$$a = \frac{\varphi_{\mathrm{I}} + 1}{2} \equiv 2 \pmod 3.$$

12. L'auteur démontre les congruences

$$a \equiv -\frac{1}{2}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} \pmod p,$$

$$b \equiv \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}}\frac{j^2 - j}{6} \pmod p.$$

13. En faisant correspondre à chacun des nombres $1, 2, \ldots, p-1$ une des lettres R ou N, suivant que ce nombre est un résidu ou un non-résidu quadratique, l'autre définit des *séquences* telles que RRNR; on obtient une telle séquence si les lettres R, R, N, R correspondent respectivement à quatre indices de la forme i, $i+1$, $i+j$, $i+j^2$. Il y a 16 séquences possibles. Le nombre total des séquences est $p-4$.

14. Pour déterminer le nombre de fois que chacune des 16 séquences se présente, l'auteur introduit la somme

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = \sum f\left[1 + \varepsilon_1\left(\frac{f}{p}\right)\right]\left[1 + \varepsilon_2\left(\frac{f+1}{p}\right)\right]\left[1 + \varepsilon_3\left(\frac{f+j}{p}\right)\right]\left[1 + \varepsilon_4\left(\frac{f+j^2}{p}\right)\right].$$

On a alors

$$\psi(+1, +1, +1, +1) = 16\text{RRRR}.$$
$$\psi(+1, +1, -1, +1) = 16\text{RRNR}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La quantité $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est symétrique en $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. En posant

$$\tau_1 = \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-j}{p}\right) = \left(\frac{-j^2}{p}\right), \qquad \omega = \left(\frac{1-j}{p}\right) = \left(\frac{j-j^2}{p}\right) = \left(\frac{j^2-1}{p}\right),$$
$$\text{K} = \sum_0^{p-1} i\left(\frac{i^3-i^2+i}{p}\right), \qquad \text{L} = \sum_0^{p-1} i\left(\frac{i^3+1}{p}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = p - 4 - 3\tau_1\varepsilon_1 &- (1 + \omega + \tau_1\omega)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4)\\ &- (2 + \tau_1)(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 + \varepsilon_3\varepsilon_4) + (\text{K} - 1)(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4 + \varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4)\\ &+ (\text{L} - 1)\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4.\end{aligned}$$

15. L'auteur déduit de cette formule les nombres de fois que se présente chacune des 16 séquences.

16. Des résultats obtenus on déduit des conclusions intéressantes. Citons les congruences

$$\begin{aligned}&\text{K} \equiv \frac{p-7}{3} \pmod 8,\\ &p \equiv \tau_1 \pmod 4,\\ &\text{L} \equiv p - 3 \pmod{12},\\ &\text{L} \equiv 4 \pmod 6,\\ &\text{L} \equiv \tau_1 + 1 \pmod 4;\end{aligned}$$
$$\omega \equiv -a\frac{p-1}{2} \pmod 4 \quad \text{si} \quad p \equiv 1 \pmod{12},$$
$$a \equiv 2 \pmod 6 \quad \text{si} \quad p \equiv 7 \pmod{12}.$$

Jacobsthal (*Ernst*). — Sur la théorie des fonctionnels (p. 266-276).

Dans son *Lehrbuch der Algebra*, H. Weber fonde la théorie des idéaux sur la notion de fonctionnel. Un fonctionnel est une fonction rationnelle d'une ou plusieurs indéterminées, les coefficients étant des nombres appartenant à un corps algébrique donné. Dans ce corps algébrique, étendu par l'adjonction de tous les fonctionnels possibles, tout entier peut d'une manière et d'une seule être décomposé en un produit d'entiers premiers. Cette propriété importante tient au fond à ce que le plus grand commun diviseur de plusieurs entiers peut être représenté comme une fonction linéaire de ces entiers. L'auteur se propose de montrer la relation étroite qui existe entre cette propriété du plus grand commun diviseur et un théorème fondamental bien connu dû à Hurwitz.

1. L'auteur rappelle les définitions du fonctionnel rationnel, du fonctionnel rationnel entier, du fonctionnel entier, de la valeur absolue d'un fonctionnel rationnel, de la norme absolue d'un fonctionnel, d'un fonctionnel unité.

2. L'auteur commence son exposition par les deux lemmes suivants :

Un fonctionnel $\omega_0 t^r + \omega_1 t^{r-1} + \ldots + \omega_r$, *où les* ω_i *sont des fonctionnels qui ne contiennent pas la variable* t, *n'est entier que si les* ω_i *sont tous entiers.*

Si $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *sont des fonctionnels rationnels entiers dont les valeurs absolues sont des nombres premiers entre eux, si* t *est une variable qui n'entre dans aucun de ces fonctionnels, le fonctionnel* $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m$ *est une unité.*

De ces deux lemmes résulte le théorème fondamental :

Si $\mathfrak{F}$ *est un fonctionnel quelconque,* u *une variable n'entrant pas dans* $\mathfrak{F}$, *le fonctionnel* $\frac{1}{\mathfrak{F} + u}$ *est entier.*

Ce théorème entraîne comme conséquence immédiate le théorème suivant :

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *sont des fonctionnels entiers dans lesquels n'entrent pas les variables* $x_1, x_2, \ldots, x_r$, *le fonctionnel*

$$\delta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r$$

est divisible par chaque diviseur commun des α_i *et est lui-même un diviseur commun des* α_i. *Ce fonctionnel* δ *est le plus grand commun diviseur des* α_i.

Ce dernier théorème résulte du théorème fondamental appliqué au fonctionnel $\frac{1}{\mathfrak{F}_i + x_i}$ où l'on a posé $\mathfrak{F}_i = \frac{\delta - \alpha_i x_i}{\alpha_i}$.

On peut donner du plus grand commun diviseur une autre expression, à savoir $\alpha_0 y^r + \alpha_1 y^{r-1} + \ldots + \alpha_r$, en désignant par y une variable n'entrant dans aucun des α_i.

On déduit enfin de là que si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ sont des fonctionnels quelconques ne contenant pas la variable y, le fonctionnel $\frac{1}{y^r + \beta_1 y^{r-1} + \ldots + \beta_r}$ est entier. Le théorème fondamental est un cas particulier de ce dernier théorème.

3. L'auteur indique un autre théorème équivalent au théorème fondamental, c'est le suivant :

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *des fonctionnels entiers,* $\mathfrak{F}$ *un fonctionnel quelconque et* u *une variable n'entrant dans aucun des fonctionnels précédents. Soit* $G(u) = \alpha_0 u^r + \alpha_1 u^{r-1} + \ldots + \alpha_r$. *Si alors* $G(\mathfrak{F})$ *est un fonctionnel entier, le quotient* $\frac{G(u)}{u - \mathfrak{F}}$ *est à coefficients entiers. Il en est ainsi en particulier si* $G(\mathfrak{F}) = 0$.

L'auteur donne deux démonstrations de ce théorème, dont l'une est due à Steinitz. Combiné avec le deuxième lemme, il donne le théorème fondamental.

Signalons enfin le théorème suivant, généralisation du précédent :

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *des fonctionnels entiers;* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ *des fonctionnels quelconques, dont aucun ne contient la variable* u. *Si le polynome*

$$G(u) = \alpha_0 u^m + \ldots + \alpha_m$$

est divisible par le polynome

$$g(u) = u^r + \beta_1 u^{r-1} + \ldots + \beta_r,$$

le quotient $G(u) : g(u)$ *est à coefficients entiers.*

David (*Ludwig v.*) — Développements en séries et théorèmes de convergence se rapportant à l'itération de Schapira (p. 277-296).

Dans le Tome CXXXV du même Journal, l'auteur a étudié l'algorithme algébrique (non uniforme) qui, partant d'un système de n nombres complexes donnés quelconques

$$^{(0)}a_1,\ ^{(0)}a_2,\ \ldots,\ ^{(0)}a_n$$

permet d'en déduire une infinité d'autres, grâce à l'identité en x,

$$x^n - \frac{n}{1}\,^{(i+1)}a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1-2}\,^{(i+1)}a_2^2 x^{n-2} - \ldots$$
$$+ (-1)^n\,^{(i+1)}a_n^n = (x - {}^{(i)}a_1)(x - {}^{(i)}a_2)\ldots(x - {}^{(i)}a_n).$$

L'auteur avait démontré que $^{(i)}a_\nu$ tend vers une limite quand i augmente indéfiniment, et cela pour chaque valeur de ν, et qu'enfin on a

$$\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2 = \ldots = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_n.$$

I. *Convergence dans l'itération par bonds.* — L'auteur suppose plus généralement qu'on parte d'un système initial d'éléments et qu'on applique le procédé précédent i_1 fois. Il part alors de n nouveaux éléments choisis d'une manière quelconque parmi les ni_1 éléments qu'on vient de déterminer et on leur applique i_2 fois le procédé de l'itération. Il part ensuite de n nouveaux éléments choisis arbitrairement parmi les ni_2 éléments ainsi déterminés et ainsi de suite. Il obtient ainsi avec les éléments successivement choisis une matrice à un nombre infini de lignes

$$\begin{array}{llll} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n, \\ \alpha_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)}, & \ldots, & \alpha_n^{(1)}, \\ \alpha_1^{(2)}, & \alpha_2^{(2)}, & \ldots, & \alpha_n^{(2)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Ici encore $\alpha_\nu^{(i)}$ tend vers une limite pour i infini et l'on a

$$\lim_{i=\infty} \alpha_1^{(i)} = \lim_{i=\infty} \alpha_2^{(i)} = \ldots = \lim_{i=\infty} \alpha_n^{(i)}.$$

Pour démontrer ce théorème l'auteur désigne par M_i et m_i le plus grand et le plus petit module des nombres de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne. Le module M_i va en décroissant avec i, il tend donc vers une limite finie r. Si r n'est pas nul et si m_i ne tend pas vers r, il existe un nombre positif ρ tel que, pour une infinité d'indices, on ait

$$m_i < r - \rho;$$

mais de cette inégalité résulterait

$$M_i - M_{i+1} \geq \frac{\rho}{n},$$

ce qui est absurde. M_i et m_i tendant vers la même limite r, on a

$$\lim_{i=\infty} |\alpha_1^{(i)}| = \lim_{i=\infty} |\alpha_2^{(i)}| = \ldots = \lim_{i=\infty} |\alpha_n^{(i)}|.$$

En ce qui concerne la limite des arguments des $\alpha_\nu^{(i)}$, l'auteur renvoie à son premier Mémoire.

II. *Développements en séries.* — L'auteur revient à l'algorithme d'itération primitif en l'appliquant à n éléments qui soient des séries de puissances. Il suppose d'abord que ces séries sont à une variable z et que pour chacune d'elles le terme constant a la même valeur ω_0 différente de zéro. On peut alors choisir les radicaux qui se présentent dans l'itération de manière que tous les nouveaux éléments introduits soient des séries de puissances commençant par le même terme constant ω_0. Après i itérations, toutes les séries de puissances obtenues ont alors en commun les $i+1$ premiers coefficients. Il en résulte que les séries ${}^{(i)}a_\nu$ tendent, pour i infini, formellement vers une même série limite.

Ce théorème est étendu à des cas un peu plus généraux.

Il s'étend aussi au cas où l'on considère les inverses des séries de puissances ${}^{(i)}a_\nu$.

III. *Théorèmes de convergence.* — L'auteur se propose dans cette troisième Partie d'étudier les convergences des séries introduites dans la deuxième Partie. La démonstration est faite dans le cas $n=2$ et repose sur le lemme suivant :

Si

$$a_1(z), \quad a_2(z), \quad a_1(z)+a_2(z), \quad a_1(z)-a_2(z)$$

sont des séries de puissances convergentes dans le cercle de rayon ρ *et ne s'annulent pour aucune valeur de* z *située à l'intérieur du cercle de rayon* $\zeta \leqq \rho$, *la série* $\mu(z)$, *limite formelle des* ${}^{(i)}a_\nu(z)$, *est convergente dans le cercle de rayon* ζ *et est égale à la limite des fonctions* ${}^{(i)}a_\nu(z)$.

On retrouve, en supposant

$$a_1(z) = 1+z, \qquad a_2(z) = 1-z,$$

une série considérée par Gauss et dont la convergence a été démontrée par v. Mangoldt [*Zeitsch. Math. Phys.*, 20 (1875)].

Dans le cas général la démonstration précédente pourrait s'étendre, s'il était possible de trouver un nombre fini de relations algébriques entières entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui entraînât comme conséquence les relations en nombre infini

$$\varphi_1 a_n = \varphi_2 a_n = \ldots = \varphi_\nu a_n = \ldots = 0.$$

C'est une question sur laquelle l'auteur se réserve de revenir.

E. Cartan.

Tome CXLI; 1912.

Weyl (*H.*). — Sur la manière dont les vibrations fondamentales d'une membrane dépendent de son contour (p. 1-11).

1. Si I est un domaine plan quelconque, les nombres fondamentaux de I so les valeurs λ pour lesquelles l'équation des membranes vibrantes

$$\Delta u + \lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0$$

admet une solution u s'annulant sur la frontière de I. Soient

$$\lambda_n(\mathrm{I})\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ces nombres fondamentaux rangés par ordre de grandeur croissante.

H.-A. Schwarz a montré en 1885 (*Werke*, t. I, p. 261) que si $\mathrm{I}_1, \ldots$ est tout entier situé à l'intérieur de I, on a $\lambda_1(\mathrm{I}_1) \geqq \lambda_1(\mathrm{I})$. L'auteur se propose de démontrer le théorème beaucoup plus général suivant :

Si l'on considère un ensemble fini ou infini de domaines $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots$ *contenus dans* I *et n'ayant aucun point (intérieur) commun, le nombre des nombres fondamentaux de* I *inférieurs à une limite donnée est au moins égal au nombre total des nombres fondamentaux de* $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots$, *inférieurs à la même limite.*

Les nombres fondamentaux de I sont les nombres fondamentaux du noyau symétrique $\frac{1}{2\pi} \mathrm{G}(x, y; \xi, \eta)$, où G désigne la fonction de Green relative au domaine I. Soit G_k la fonction de Green relative au domaine I_k, G_k étant regardée comme nulle si l'un des points (x, y), (ξ, η) n'est pas intérieur à I_k. Les nombres fondamentaux du noyau

$$\frac{1}{2\pi}(\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \ldots + \mathrm{G}_h),$$

où l'on suppose d'abord le nombre des domaines I_k fini, sont les nombres fondamentaux des différents noyaux $\frac{1}{2\pi} \mathrm{G}_k$. La démonstration du théorème énoncé plus haut revient alors à celle des deux lemmes suivants :

I. *Le noyau* $\mathrm{L}' = \mathrm{G} - (\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \ldots + \mathrm{G}_h)$ *est, au sens de la théorie des équations intégrales, défini positif.*

II. *En ajoutant à un noyau quelconque* K *un noyau défini positif* K', *on ne peut pas diminuer le nombre des nombres fondamentaux inférieurs à une limite donnée.*

Il suffit, en effet, d'appliquer le dernier lemme à $\mathrm{K} = \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \ldots + \mathrm{G}_h$ et $\mathrm{K}' = \mathrm{L}'$.

2. L'auteur démontre d'abord le premier lemme en supposant chaque domaine $I, I_1, \ldots, I_h$ simplement connexe et limité par une courbe à courbure continue $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_h$. Ces $h+1$ courbes limitent un domaine $h+1$ fois connexe I_{h+1} et l'on a

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_h + I_{h+1} + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_h.$$

Soit encore G_{h+1} la fonction de Green relative à I_{h+1} et soit s l'abscisse curviligne d'un point qui décrirait le contour multiple $c = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_h$. Soit enfin $\varphi(x, y)$ une fonction fondamentale du noyau

$$L = G - (G_1 + G_2 + \ldots + G_h + G_{h+1}).$$

On a

$$\varphi(x, y) = \frac{\nu}{2\pi} \int\int_I L(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Les propriétés de cette fonction montrent qu'elle est identique à la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(c)} G(s; x, y)\, \beta(s)\, ds,$$

où l'on a désigné par $\beta(s)$ la variation brusque $-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_e}\right)$ le long du contour (c).

Le calcul des deux intégrales doubles

$$\int\int_I \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \frac{\nu}{4\pi^2} \int_c \int_c GG(s, \sigma)\, \beta(s)\, \beta(\sigma)\, ds\, d\sigma,$$

$$\int\int_I [\varphi(x, y)]^2\, dx\, dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_c \int_c GG(s, \sigma)\, \beta(s)\, \beta(\sigma)\, ds\, d\sigma$$

montre alors que ν est positif; c'est-à-dire que le noyau L est défini positif. Comme il en est de même de G_{h+1}, le premier lemme est démontré dans le cas particulier indiqué plus haut.

L'auteur, par un passage à la limite, se libère ensuite des restrictions mises aux contours des domaines $I, I_1, \ldots, I_h$.

3. L'auteur démontre le second lemme en substituant, pour simplifier l'écriture, un intervalle linéaire $(0, 1)$ à un domaine plan. Il s'appuie sur l'inégalité

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[K(s, t) - \frac{\varphi_1(s)\varphi_1(t)}{\lambda_1} - \ldots - \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n}\right] x(s)\, x(t)\, ds\, dt \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}},$$

où $K(s, t)$ est un noyau symétrique, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses n premiers nombres fondamentaux; $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ ses n premières fonctions fondamentales normales, $x(s)$ une fonction satisfaisant à la condition

$$\int_0^1 x^2\, ds = 1.$$

4. L'auteur rattache au théorème fondamental un autre théorème inté-

ressant qui donne la loi asymptotique du nombre h_N des nombres fondamentaux inférieurs à une limite donnée N. On a en effet

$$\lim_{N=\infty} \frac{h_N}{N} = \frac{I}{4\pi},$$

où I désigne l'aire (supposée exister, au sens de Jordan) du domaine I.

L'auteur démontre d'abord la formule pour un carré; les nombres fondamentaux, dans le cas d'un carré de côté a, sont en effet connus et donnés par la formule

$$\frac{\pi^2}{a^2}(m^2+n^2) \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il l'étend ensuite au cas d'un domaine quelconque (ayant une aire).

5. L'auteur considère enfin les nombres fondamentaux $\mu_1, \mu_2, \ldots$, qui se rapportent encore à l'équation

$$\Delta u + \mu u = 0,$$

mais avec la condition aux limites que $\frac{du}{dn}$ est nulle sur le contour. Il démontre qu'au-dessous d'une limite donnée il y a au moins autant de μ_n que de λ_n. Sa démonstration repose sur ce fait que, si l'on désigne par G et H les deux fonctions de Green relatives aux deux problèmes, le noyau $D = H - G$ est défini positif.

Lichtenstein (*L.*). — Sur l'intégrale de Poisson et sur les dérivées partielles du second ordre du potentiel logarithmique (p. 12-42).

Ce Mémoire se rattache à un Mémoire de Fatou (*Acta mathematica*, t. XXX, 1906, p. 335-400) dont il a pour but de compléter les résultats, ainsi qu'à un Mémoire de Petrini (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. V, 1909, p. 127-223) relatif à l'existence des dérivées partielles du second ordre du potentiel logarithmique.

1. Soient r et φ les coordonnées polaires d'un point d'un plan, K le cercle de rayon R ayant pour centre l'origine, R et θ les coordonnées courantes d'un point de la circonférence S du cercle, $f(\theta)$ une fonction sommable (au sens de Lebesgue), non nécessairement bornée. Dans le Mémoire cité plus haut, Fatou démontre quelques théorèmes remarquables sur la manière dont se comportent l'intégrale de Poisson

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} f(\theta)\, d\theta$$

et ses dérivées partielles $\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}$, quand le point (r, φ) tend vers un point de la circonférence S par une courbe non tangente à S. La fonction (r, φ) tend vers la valeur $f(\theta_0)$, si $f(\theta_0) = \lim \frac{1}{h}\int_{\theta_0}^{\theta_0+h} f(r)\, dr$, c'est-à-

dire en tous les points de S, sauf au plus en un ensemble de points de mesure nulle. De plus, si au point (R, θ_0) la fonction $f(\theta)$ admet une dérivée $f'(\theta_0)$, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ tend vers $f'(\theta_0)$. Quant aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

ou bien elles ne tendent en général vers aucune limite, ou bien elles augmentent indéfiniment.

Dans ce paragraphe, l'auteur démontre d'abord, en supposant l'existence au point θ_0 d'une dérivée $f'(\theta_0)$ et en supposant en outre, ce qui n'est pas une hypothèse restrictive, $f(\theta_0) = f'(\theta_0) = 0$, que, lorsque le point (r, φ) tend vers le point (R, θ_0), on a

$$\lim (R - r) \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \lim (R - r) \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} = \lim (R - r) \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} = 0.$$

La troisième propriété résulte des deux premières et d'un théorème qui est démontré dans le paragraphe suivant.

2. Soit maintenant $f(\theta)$ une fonction sommable, non nécessairement bornée. L'auteur démontre qu'*en tous les points* (R, θ_0) *où la fonction*

$$\Phi(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} f(\tau)\, d\tau$$

possède une dérivée finie, c'est-à-dire en tous les points de S, *sauf au plus en un ensemble de points de mesure nulle, on a*

$$\lim (R - r) \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} = 0, \qquad \lim (R - r) \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Pour la démonstration de ce théorème, l'auteur applique les résultats du paragraphe précédent à l'intégrale de Poisson $U(r, \varphi)$, relative à la fonction $\Phi(\theta)$; on a en effet

$$\frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial \varphi} = u(r, \varphi).$$

Si, de plus, la fonction $f(\theta)$ *est bornée, les deux expressions*

$$(R - r) \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r}, \qquad (R - r) \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \varphi}$$

sont des fonctions bornées de r *et* φ.

3. Soit $v(r, \varphi)$ la fonction complémentaire de $u(r, \varphi)$. Fatou a démontré que si $f(\theta)$ est bornée inférieurement, cette fonction $v(r, \varphi)$ tend vers une limite finie quand le point (r, φ) tend vers (R, θ_0), exception faite pour un ensemble de points (R, θ_0) de mesure nulle.

L'auteur démontre plus généralement que *si* $f(\theta)$ *est une fonction sommable ainsi que son carré,* $v(r, \varphi)$ *tend, exception faite au plus pour un*

ensemble de points de mesure nulle, vers une limite $g(\theta_0)$; de plus, la fonction $g(\theta)$ est sommable ainsi que son carré.

Pour démontrer ce théorème l'auteur pose, d'après Hurwitz,

$$f(\theta) \sim \frac{b_0}{2} + b_1 \cos\theta + b_2 \cos 2\theta + \ldots$$
$$+ a_1 \sin\theta + a_2 \sin 2\theta + \ldots,$$

où les b_i et les a_i sont les coefficients de Fourier relatifs à $f(\theta)$. Il existe alors une fonction $g(\theta)$, sommable ainsi que son carré, satisfaisant à la relation

$$g(\theta) \sim - a_1 \cos\theta - a_2 \cos 2\theta - \ldots$$
$$+ b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \ldots.$$

L'intégrale de Poisson $V(r, \varphi)$ relative à $g(\theta)$ n'est pas autre chose que $v(r, \varphi)$, ce qui démontre le théorème. L'auteur utilisera souvent dans la suite un procédé de démonstration analogue.

Aux points de la circonférence S exclus du théorème, $v(r, \theta)$ devient infinie pour $r = R$ au plus logarithmiquement.

4. L'auteur passe à l'étude de la dérivée $\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r}$ et démontre que *si $f(\theta)$ est continue et possède une dérivée $f'(\theta)$, non nécessairement bornée, sommable ainsi que son carré, la fonction $\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r}$ tend, dans les mêmes conditions que plus haut et exception faite au plus pour un ensemble de points (R, θ_0) de mesure nulle, vers une limite finie $\psi(\theta_0)$; de plus, la fonction $\psi(\theta)$ a son carré sommable.*

La démonstration repose sur la construction d'une intégrale de Poisson $W(r, \varphi)$ égale à $r \frac{\partial u}{\partial r}$.

5. Si maintenant $f(\theta)$ désigne une fonction continue quelconque, Fatou a démontré que, pour l'existence en un point (R_0, θ) d'une limite

$$\lim_{r=R} v(r, \theta),$$

il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\pi [f(\theta + t) - f(\theta - t)] \cot \frac{t}{2}\, dt \qquad (\varepsilon > 0)$$

ait une limite quand ε tend vers zéro.

L'auteur démontre d'abord que, si l'on suppose simplement la fonction intégrable, non nécessairement bornée, le théorème de Fatou subsiste en tout point θ de continuité de cette fonction. De plus, si $[f(\theta)]^2$ est sommable, la fonction $v(r, \theta)$ a une limite $g(\theta)$, sauf au plus pour un ensemble de points (R, θ) de mesure nulle, et le carré de $g(\theta)$ est sommable.

De ces deux théorèmes résulte une conséquence intéressante :

Si $[f(\theta)]^2$ est intégrable au sens de Riemann, l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\pi [f(\theta + t) - f(\theta - t)] \frac{dt}{t} \qquad (\varepsilon > 0)$$

tend, pour $\varepsilon = 0$, *vers une limite finie* $h(\theta)$, *exception faite pour un ensemble de valeurs de* θ *de mesure nulle et la fonction* $[h(\theta)]^2$ *est sommable.*

6. Les considérations précédentes conduisent naturellement à quelques théorèmes sur les dérivées partielles du potentiel logarithmique d'une simple couche dans le cas d'un domaine circulaire (de rayon 1).

En particulier, *le potentiel d'une simple couche dont la densité* $-\frac{1}{\pi} f(\theta)$ *est une fonction sommable ainsi que son carré, admet en tous les points de la circonférence* S. *sauf au plus en un ensemble de points de mesure nulle, une dérivée tangentielle et une dérivée normale; chacune de ces dérivées est sommable ainsi que son carré.*

Si en particulier la fonction $[f(\theta)]^2$ est intégrable au sens de Riemann, la dérivée tangentielle du potentiel en un point $(1, \theta_0)$ est

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cot\frac{\theta-\theta_0}{2}\,d\theta.$$

Soit $F(\theta)$ une fonction continue admettant la période 2π et soit $u_0(r, \varphi)$ la fonction potentielle régulière à l'intérieur du cercle K de rayon R et qui prend sur le bord les valeurs $F(\theta)$. Pour que $u_0(r, \varphi)$ puisse être regardée comme un potentiel de simple couche, il faut, d'après ce qui précède, que $F(\theta)$ possède une dérivée sommable ainsi que son carré. *Cette condition est suffisante si* $R \neq 1$. Si $R = 1$ *il faut encore que l'intégrale* $\int_{-\pi}^{+\pi} F(\theta)\,d\theta$ *soit nulle;* le problème admet alors une infinité de solutions.

La condition nécessaire et suffisante énoncée dans le cas $R \neq 1$ a été trouvée sous une autre forme par Picard (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXIX, 1910, p. 79-97).

7. L'auteur étudie maintenant les dérivées partielles du potentiel logarithmique. Soit $P(x, y)$ une fonction définie dans un domaine T_0 limitée par une courbe analytique, bornée et intégrable au sens de Riemann et continue au voisinage de (x, y) sur toute droite issue de ce point. Petrini a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ du potentiel logarithmique

$$U(x, y) = \frac{1}{4\pi}\iint_{T_0} P(\xi, \eta)\log[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\,d\xi\,d\eta$$

est l'existence d'une limite pour l'expression

$$\iint_{T_0-\tau} P(\xi, \eta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\,d\xi\,d\eta,$$

quand le cercle τ de centre (x, y) tend vers zéro; on a de plus la relation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = P(x, y).$$

Petrini a démontré un théorème analogue sur les dérivées partielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x}$.

L'auteur fait des hypothèses plus générales sur la fonction $P(x, y)$ et commence par supposer le domaine T défini par les inégalités

$$0 \leqq x \leqq \pi, \qquad 0 \leqq y \leqq \pi;$$

ses conclusions s'étendront ensuite finalement à un domaine T limité par une courbe analytique quelconque. Ses considérations reposent sur l'existence du système orthogonal complet normal, défini, dans le domaine ($0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$) par les fonctions

$$\frac{1}{4\pi^2}, \quad \frac{1}{2\pi^2}\cos px, \quad \frac{1}{2\pi^2}\sin px, \quad \frac{1}{2\pi^2}\cos qy, \quad \frac{1}{2\pi^2}\sin qy,$$

$$\frac{1}{\pi}\cos px \cos qy, \quad \frac{1}{\pi}\cos px \sin qy, \quad \frac{1}{\pi}\sin px \cos qy, \quad \frac{1}{\pi}\sin px \sin qy.$$

Soit d'après cela $P(x, y)$ une fonction définie dans le domaine T, sommable ainsi que son carré et prolongée dans tout le plan d'après les relations

$$P(-x, y) = -P(x, y), \qquad P(x + 2\pi, y) = P(x, y),$$
$$P(x, -y) = -P(x, y), \qquad P(x, y + 2\pi) = P(x, y).$$

On a alors

$$P(x, y) \sim \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} \frac{1}{\pi} \sin px \sin qy,$$

la série Σa_{pq}^2 étant convergente. La série infinie

$$U(x, y) = -\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} a_{pq} \frac{\sin px \sin qy}{p^2 + q^2}$$

est alors convergente et l'auteur démontre qu'elle est égale à

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T G(x, y; \xi, \eta) P(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

G désignant la fonction de Green relative à T.

Les deux fonctions, sommables ainsi que leurs carrés,

$$u_1(x, y) \sim \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{p^2 a_{pq}}{p^2 + q^2} \frac{1}{\pi} \sin px \sin qy,$$

$$u_2(x, y) \sim \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{q^2 a_{pq}}{p^2 + q^2} \frac{1}{\pi} \sin px \sin qy$$

sont respectivement égales à $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, sauf au plus en un ensemble de points d'aire nulle, et leur somme est égale à $P(x, y)$.

Comme on a

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2] + g(x, y; \xi, \eta),$$

g restant partout fini, les conclusions précédentes subsistent quand on substitue à $U(x, y)$ la fonction

$$W(x, y) = \frac{1}{4\pi}\iint P(x, \xi)\log[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\,d\xi\,d\eta.$$

Si donc $P(x, y)$ *est sommable ainsi que son carré, ce potentiel logarithmique admet partout, sauf au plus en un ensemble de points d'aire nulle, des dérivées partielles du second ordre* $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, *sommables ainsi que leurs carrés et satisfaisant à l'équation*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = P(x, y).$$

En comparant ce résultat à celui de Petrini, on voit que, *si* $P(x, y)$ *est continue dans tout le domaine* T, *l'expression*

$$\iint_{T-\tau} P(x, \xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\,d\xi\,d\eta$$

tend, sauf peut-être pour un ensemble de points d'aire nulle, vers une limite $k(x, y)$, *quand le cercle* τ *tend vers zéro.*

L'auteur démontre enfin, dans les mêmes hypothèses que tout à l'heure, l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$ en tous les points du domaine T exception faite d'un ensemble de points d'aire nulle.

Fraenkel (*Adolf*). — Le fondement axiomatique de la théorie des nombres p-adiques de Hensel (p. 43-76).

1. *Introduction.* — Cet Article ne s'occupe pas des nombres p-adiques introduits par Hensel, au point de vue de leurs applications à l'Algèbre. Il se rattache plutôt aux travaux de Peano, Hilbert, Huntington, Burali-Forti, Hölder, etc., qui se sont occupés de fonder l'arithmétique sur un système d'axiomes nécessaires et suffisants. Ce que ces géomètres ont fait pour les nombres entiers, pour les nombres réels, pour les nombres complexes ou pour certains domaines de ces nombres, l'auteur se propose de le faire pour les nombres p-adiques de Hensel.

Après avoir établi (§ 2) un système d'axiomes qui permet de caractériser le type d'ordre du système des nombres p-adiques, il établit (§ 3) les axiomes qui se rapportent aux opérations qu'on peut effectuer sur ces nombres, et enfin (§ 4), grâce à trois nouveaux axiomes, il démontre au moyen de la notion des valeurs

approchées que le système des nombres p-adiques de Hensel est essentiellement le seul qui satisfasse à tous les postulats énoncés.

2. *Le type d'ordre de l'ensemble des nombres p-adiques.* — L'auteur considère un système S *d'éléments*, se partageant en *classes* de telle sorte que chaque élément de S appartienne à une classe et à une seule.

Il énonce d'abord sept postulats se rapportant au type d'ordre de l'ensemble des classes du système S; ils sont fondés sur l'existence d'une relation qui peut exister entre deux classes C et C′, relation qu'on écrira

$$C < C',$$

et qui se lira C *plus petit* que C′. Ces postulats sont les suivants :

Γ_1. *Si* C *est une classe quelconque du système* S, *on n'a jamais* $C < C$.

Γ_2. *Si* C, C′, C″ *sont trois classes quelconques du système, les relations* $C < C'$, $C' < C''$ *entraînent* $C < C''$.

Γ_3. *Le système* S *contient une classe particulière* C_∞ *plus petite que toutes les autres classes du système (s'il y en a).*

Γ_4. *Si* S *contient une classe, il en contient au moins encore une autre.*

Γ_5. *Si* C *est une classe quelconque différente de la classe* $C\infty$ *qui peut éventuellement (d'après* Γ_3*) entrer dans* S, *le système* S *contient au moins une classe* $|C$, *différente de* $C\infty$, *telle que* $|C < C$ *et telle que toute autre classe* C′ *plus petite que* C *est aussi plus petite que* $|C$.

Γ_6. *Si* C *est une classe quelconque différente de* C_∞, *le système* S *contient au moins une classe* $|C$, *différente de* $C\infty$, *telle que* $C < |C$ *et telle que, pour toute autre classe* C′ *satisfaisant à* $C < C'$, *on ait aussi* $|C < C'$.

Γ_7. *Le système* S *ne contient pas d'autres classes que celles exigées par les postulats* Γ_3, Γ_4, Γ_5, Γ_6.

De ces postulats, il résulte immédiatement qu'étant données deux classes différentes C′ et C″, on a une et une seule des deux relations $C' < C''$, $C'' < C'$. L'ensemble des classes est ainsi ordonné linéairement par la relation $<$.

Le type d'ordre déterminé par les postulats Γ est bien déterminé : c'est le type de l'ensemble de tous les nombres rationnels entiers qu'on ferait précéder (ou suivre si l'on définit l'ordre par la relation $>$) d'un élément isolé. On peut donc (et d'une infinité de manières) noter les classes autres que $C\infty$ par un indice entier de manière que $C_i < C_k$ si i est supérieur à k au sens ordinaire du mot; cette propriété s'étend même si $i = \infty$.

L'auteur démontre ensuite l'indépendance des sept postulats Γ, en prouvant successivement l'existence de sept systèmes dont chacun satisfait à tous les postulats sauf un.

Il passe ensuite à l'étude du type d'ordre de l'ensemble des éléments d'une même classe. Il suppose l'existence d'une relation pouvant exister entre deux éléments α, β de cette classe, relation qu'on écrira $\alpha \prec \beta$ et qui se lira : α *plus bas* que β. Voici quels sont les postulats qu'il énonce :

Λ_1. *Si* S *contient une classe* $C\infty$ *jouissant de la propriété énoncée dans* Γ_3, *cette classe* $C\infty$ *ne contient qu'un élément.*

Λ_2. *Si* α *et* β *sont deux éléments différents quelconques d'une classe* C, *l'une au moins des relations* $\alpha \prec \beta$ *et* $\beta \prec \alpha$ *a lieu.*

Λ_3. *On n'a pour aucun élément* α *de* C *la relation* $\alpha \prec \alpha$.

Λ_4. *Si* α, β, γ *sont trois éléments quelconques de* C. *les relations* $\alpha \prec \beta$, $\beta \prec \gamma$ *entraînent la relation* $\alpha \prec \gamma$.

Λ_5. *Parmi les éléments d'une classe* C *il existe un ensemble infini dénombrable d'éléments* M *jouissant de la propriété suivante : Étant donné un élément quelconque* μ *de* M *qui ne soit pas plus bas que tous les autres éléments de* C, *il existe un élément* λ *de* C *non contenu dans* M, *tel que* $\lambda \prec \mu$ *et tel qu'il n'existe aucun élément de* C *satisfaisant aux deux relations* $\lambda \prec \nu$, $\nu \prec \mu$. Autrement dit la classe C contient un ensemble dénombrable M d'éléments qui possèdent des prédécesseurs immédiats.

Λ_6. *Si* α *et* β *sont deux éléments différents quelconques de* C *tels que* $\alpha \prec \beta$, *et qui ne jouent pas (dans le cas où le postulat* Λ_5 *est vrai) le rôle des éléments* λ *et* μ, *il existe dans* C *au moins un élément* γ, *appartenant à l'ensemble* M *(dans le cas où le postulat* Λ_5 *est vrai), et satisfaisant aux relations* $\alpha \prec \gamma$, $\gamma \prec \beta$. L'ensemble M est par conséquent contenu d'une manière partout dense dans l'ensemble de tous les éléments de la classe C.

Λ_7. *Si une classe* C *est décomposée en deux parties* C_1 *et* C_2, *dont chacune contient des éléments de manière que tout élément de* C *appartienne à une et à une seule de ces deux parties, que chaque élément de* C_1 *soit plus bas que chaque élément de* C_2, *alors il existe dans* C *au moins un élément* χ *tel que tout élément* χ *de* C *pour lequel on a* $\chi \prec \gamma$, *mais non* $\gamma \prec \chi$, *appartienne à* C_1, *et que tout élément* ψ *de* C *pour lequel on a* $\gamma \prec \psi$, *mais non* $\psi \prec \gamma$, *appartienne à* C_2. C'est le postulat de Dedekind.

Λ_8. *Chaque classe* C *différente de* $C\infty$, *contient au moins un élément* α_C, *appartenant à l'ensemble* M *(dans le cas où le postulat* Λ_5 *est vrai) et plus bas que tout autre élément de* C.

Λ_9. *Chaque classe* C, *différente de* $C\infty$ *contient au moins un élément* ω_C, *n'appartenant pas à l'ensemble* M *(dans le cas où le postulat* Λ_5 *est vrai) et tel que tout autre élément de* C *soit plus bas que lui.*

Il résulte de Λ_3 et Λ_4 que l'ensemble des éléments d'une même classe est bien ordonné par la relation $\prec$ (ou par la relation inverse $\succ$, *plus haut que*). Cet ensemble est parfait, mais nulle part dense, et admet des éléments extrêmes.

L'auteur convient de poser $\alpha < \beta$ si α et β appartiennent à deux classes différentes C et C' dont la première soit plus petite que la seconde.

Si α et β appartiennent à la même classe, ils sont dits *équivalents* et l'on écrit $\alpha \sim \beta$. Étant donnés deux éléments α et β quelconques de S, on a donc toujours une et une seule des relations

$$\alpha \sim \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta;$$

s'ils appartiennent à la même classe, on a toujours une et une seule des relations

$$\alpha = \beta, \quad \alpha \prec \beta, \quad \alpha \succ \beta.$$

Le système des nombres rationnels p-adiques, où p désigne un nombre naturel premier ou non, satisfait à tous les postulats I' *et* Λ. Un tel nombre peut se représenter par une série $\sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i$, où n est un nombre entier positif, nul ou négatif quelconque et où les a_i sont choisis arbitrairement dans la suite $0, 1, 2, \ldots, p-1$. L'indice n du premier des nombres a_i qui ne sont pas nuls s'appelle l'*ordre* du nombre p-adique.

Chaque classe est formée des nombres p-adiques d'un ordre donné: la classe $C\infty$ est formée du seul élément pour lequel tous les a_i sont nuls (d'ordre infini). De deux classes différentes, la plus petite est celle dont l'ordre est le plus grand (au sens ordinaire du mot); si C est la classe d'ordre n, $C|$ est la classe d'ordre $n+1$ et $|C$ la classe d'ordre $n-1$.

Dans une même classe (d'ordre n) le plus bas des deux éléments

$$\alpha = \sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i, \qquad \beta = \sum_{i=n}^{\infty} \beta_i p^i$$

est α, si le premier des nombres a_k qui n'est pas égal au nombre correspondant b_k est plus petit que lui.

Avec ces définitions des classes et des relations $<$, $\prec$, tous les postulats Γ et Λ sont vérifiés. L'ensemble M correspondant à la classe C d'ordre n est formé de tous les nombres p-adiques d'ordre n qui sont limités, c'est-à-dire tels qu'à partir d'un certain rang tous les a_i soient nuls. Le nombre de C immédiatement plus bas que le nombre

$$a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \ldots + a_r p^r$$

est alors

$$a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \ldots + a_{r-1} p^{r-1} + (a_r - 1) p^r + (p-1) p^{r+1} + (p-1) p^{r+2} + \ldots.$$

L'ensemble des nombres p-adiques d'ordre n fournit ainsi un exemple d'ensemble parfait, nulle part dense, avec éléments extrêmes; il a la puissance du continu.

L'auteur, pour terminer, démontre l'indépendance des postulats Λ.

3. *Le corps des nombres p-adiques. Les systèmes p-adiques et les systèmes g-adiques.* — L'auteur énonce douze postulats relatifs à l'addition et à la multiplication; ce sont les suivants :

Π_1. *Si α et β sont deux éléments quelconques de* M, *il existe une opération qui fait correspondre à ces deux éléments (rangés dans l'ordre α, β) un élément σ de* S. Cette opération s'appellera *addition*, on écrira $\sigma = \alpha + \beta$, et l'on donnera à σ le nom de *somme*.

Π_2. *L'addition est associative :* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Π_3. *S'il existe dans* S *un élément* o *tel que l'on ait, pour chaque élément α de* S, $\alpha + o = \alpha$, *alors à chaque élément α de* S *correspond au moins un autre élément α' tel que* $\alpha + \alpha' = o$.

Π_4. *Il existe une autre opération qui fait correspondre à deux éléments quelconques α, β un élément bien déterminé π qu'on écrira* $\alpha.\beta$; c'est la multiplication.

Π_5. *La multiplication est associative.*

Π_6. *Le système* S *contient au moins un élément ε (élément unité) tel qu'on ait, quel que soit α,* $\alpha.\varepsilon = \alpha$.

Π_7. *Si* S *contient un élément unité ε et si α est un élément quelconque de* S *qui ne soit pas un diviseur de* o (c'est-à-dire tel que la relation $\alpha.x = o$ ne puisse être vérifiée que par $x = o$), *il existe au moins un élément α'' tel qu'on ait* $\alpha.\alpha'' = \varepsilon$.

Π_8. *La multiplication est commutative.*

Π_9. *La multiplication est distributive par rapport à l'addition*

$$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma.$$

Π_{10}. *Si* S *contient un élément unité* ε, *il existe, parmi les multiples successifs de* ε, *à savoir* $2\varepsilon=\varepsilon+\varepsilon$, $3\varepsilon=2\varepsilon+\varepsilon$, 4ε, ..., *un premier multiple* $p\varepsilon$ *appartenant à la classe qui est immédiatement plus petite que celle de* ε. Le nombre naturel p s'appelle le *nombre fondamental* du système.

Π_{11}. *Si* α *est un élément de* S *qui ne soit pas un* o, *et si* γ *est tel qu'aucun de ses* $p-1$ *premiers multiples n'appartienne à la classe immédiatement plus petite que celle de* γ, *la relation* $\beta<\gamma$ *entraîne* $\alpha.\beta<\alpha.\gamma$.

Π_{12}. *Si* α *et* β *sont deux éléments quelconques de* S *et si* $\beta<\alpha$, *on a* $\alpha+\beta\sim\alpha$.

Il résulte de ces postulats que si α est un nombre de S qui ne soit pas un o, et si m est le plus petit nombre naturel pour lequel $m\alpha<\alpha$, m est un diviseur de p. Les systèmes S pour lesquels p est premier seront dits p-adiques; les systèmes S pour lesquels p est composé seront dits g-adiques.

Tout système S, p-adique ou g-adique possède un élément o et un seul : c'est l'élément unique de la classe C_∞.

Tout système p-adique ou g-adique forme, pour l'addition, un groupe.

L'auteur démontre un certain nombre de théorèmes relatifs à ces systèmes; signalons le suivant :

Si α *et* β *sont deux éléments équivalents quelconques d'un système* p-*adique ou* g-*adique, leur somme* $\alpha+\beta$ *est, ou bien équivalente à chacune de ses parties, ou bien plus petite que chacune d'elles. Si, en particulier,* α *et* β *sont deux éléments non équivalents quelconques* ($\alpha>\beta$), *il est impossible de trouver un nombre naturel* n *assez grand pour que* $n\beta$ *soit équivalent à* α *ou plus grand que* α. *Tout système* p-*adique ou* g-*adique est donc non archimédien, en ce qui concerne la relation de grandeur.*

Si S est un système p-adique, il est possible de définir une multiplication des classes. En appelant C_0 la classe qui contient l'unité ε, le produit des classes C_i et C_k est C_{i+k} (même si l'un des indices est ∞).

Le produit de deux éléments appartenant aux classes C_i et C_k appartient toujours à la classe C_{i+k}.

Une telle définition de la multiplication des classes est impossible pour les systèmes g-adiques.

4. *Détermination complète des systèmes* p-*adiques. Les valeurs approchées.* — Les postulats (Γ) et (Λ) définissent complètement le système S, en ce qui concerne les relations de grandeur et de hauteur.

En ajoutant aux postulats Γ, Λ et Π trois nouveaux postulats, on peut démontrer que tout système p-adique est isomorphe, au point de vue des relations de grandeur et de hauteur et des opérations de l'addition et de la multiplication, avec le système des nombres p-adiques rationnels de Hensel. Ces trois postulats sont les suivants :

Φ_1. *Si* α *et* β *sont deux éléments équivalents quelconques de* S ($\alpha\prec\beta$), *on a* $p\alpha\prec p\beta$, p *désignant le nombre fondamental.*

Φ_2. *Si* m *est un nombre naturel inférieur à* p *et si* α *et* β *sont deux éléments tels que* $\beta\prec\varepsilon$ *et que* $\alpha\prec\beta$ (*ou du moins* $\alpha\prec\beta$ *si* $\alpha\sim\beta$), *l'équivalence des éléments* $m\varepsilon+\alpha$ *et* $m\varepsilon+\beta$ *entraîne* $m\varepsilon+\alpha\prec m\varepsilon+\beta$.

Φ_3. *Si α est un élément quelconque équivalent à ε, il existe un nombre naturel m inférieur à p, ne dépendant que de la hauteur de α, et tel que $\alpha - m\varepsilon$ soit plus petit que α et ne dépende, en grandeur et hauteur, que de la hauteur de α.*

Ces postulats permettent de définir les valeurs approchées des différents ordres d'un élément α; ces valeurs approchées sont bien connues dans la théorie de Hensel.

Remak (*R.*). — Sur une fonction indiquée par M. H.-A. Schwarz (77-95).

Dans un travail *Sur les fonctions dérivées* (*Math. Ann.*, t. LXIII, 1907, p. 326), Pompeiu considère une fonction non constante, mais dont la dérivée est nulle en un ensemble dense de points d'un intervalle. En s'appuyant sur des théorèmes de Baire, il démontre qu'en dehors de l'ensemble dénombrable de zéros que la formation même de la fonction met immédiatement en évidence, la dérivée admet encore un autre ensemble non dénombrable de zéros. D'une manière générale, si l'ensemble des zéros de la dérivée d'une fonction est partout dense, cet ensemble a la puissance du continu.

Plus tard, Schwarz (*Sitzungsber.*, Berlin, 1910, p. 592) a indiqué un autre exemple de fonction jouissant de la même propriété que celle de Pompeiu. L'auteur se propose de montrer directement sur cette fonction, sans s'appuyer sur les théorèmes de Baire, que l'ensemble des zéros de la dérivée a la puissance du continu.

La fonction de Schwarz est

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x \pi)}{2^{mn}},$$

où m est un nombre donné supérieur à 1, et où l'on a posé

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}.$$

Si l'on différentie terme à terme la série qui définit $F(x)$, on obtient

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{m-1n}(\sin 2^n x \pi)^{\frac{2}{3}}}.$$

L'auteur se propose de montrer que, partout où $S(x)$ converge, $F(x)$ a une dérivée égale à $S(x)$, et que partout où $S(x)$ diverge (et, par suite, est infini), $F(x)$ a une dérivée infinie (§ 1). Il substituera ensuite à $S(x)$ une série plus simple $U(x)$, convergente et divergente en même temps que $S(x)$ (§ 2), montrera que l'ensemble des points de convergence, ainsi que l'ensemble des points de divergence de $U(x)$, ont la puissance du continu (§ 3), enfin passera à la fonction inverse de $F(x)$ (§ 4).

1. Dans le cas où $S(x)$ est infini, soit parce que $x = \frac{p}{2^q}$, soit parce que la

série est divergente, il est très facile de démontrer que l'on a

$$\lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0}} \frac{F(x+h_1)-F(x-h_2)}{h_1+h_2} = +\infty.$$

Dans le cas où $S(x)$ est convergente, l'auteur s'appuie, pour démontrer que $F'(x)$ existe et est égale à $S(x)$, sur la formule

$$\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x-h_2}^{x+h_1} \frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} < \frac{14}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}.$$

2. Dans le cas où x n'est pas de la forme $\frac{p}{2^q}$, l'auteur désigne par $\mathcal{A}(x)$ la différence entre x et l'entier le plus voisin. Si l'on écrit le nombre $\mathcal{A}(x)$ dans le système de numération de base 2, ce nombre commence par 0,0. Soit $\lambda(n)$ le nombre de chiffres égaux qui suivent le $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule, on a

$$2^{-\lambda(n)} > \mathcal{A}[2^n.x] > 2^{-[\lambda(n)+1]}.$$

Cette double inégalité permet de trouver une limite supérieure et une limite inférieure à la série $S(x)$. On a, en effet,

$$\pi^{\frac{1}{3}} T(x) < S(x) < \frac{24}{7} T(x),$$

en posant

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}\lambda(n)-m-1\,n}.$$

Soient $n_0 = 0$, n_1, n_2, ... les rangs des chiffres après la virgule, et qui sont immédiatement suivis d'un chiffre différent. Si l'on substitue à la série $T(x)$ la série plus simple

$$U(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{3}n_{\rho+1}-(m-\frac{1}{3})n_\rho},$$

on aura

$$\pi^{\frac{1}{3}} U(x) < S(x) < \frac{72}{7} U(x).$$

3. On aura certainement des points de divergence de $U(x)$ et, par suite, de $S(x)$ si l'on a

$$n_{\rho+1} > \frac{3m-1}{2} n_\rho,$$

ce qui peut s'obtenir en prenant pour $n_{\rho+1}$ le plus grand nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{3m-1}{2} n_\rho$, augmenté d'un entier *arbitraire* p_ρ. On a évidemment ainsi un ensemble de points de divergence qui a la puissance du continu.

On aura de même facilement des points de convergence en se donnant un entier fixe ψ et prenant

$$n_{\rho+1} = n_\rho + 1 + z_\rho,$$

où z_ϱ est l'un *quelconque* des entiers $0, 1, 2, \ldots, \psi - 1$. On a ainsi un ensemble de points de convergence qui a la puissance du continu.

4. Si l'on appelle $x = \chi(\xi)$ la fonction inverse de $\xi = F(x)$, cette fonction a partout une dérivée égale à $\frac{1}{S(x)} < \frac{1}{\pi}$. L'auteur démontre qu'en tout point ξ_0 où la dérivée est nulle, c'est-à-dire où $S(x_0) = \infty$, cette dérivée $\frac{d\chi}{d\xi}$ est continue. Il suffit pour cela de montrer que $S(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0; l'auteur y arrive facilement en se servant de la manière dont x est écrit dans le système dyadique.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur une classe de systèmes différentiels d'ordre quelconque à points critiques fixes (96-145).

Ce Mémoire se rattache, d'une part, aux travaux fondamentaux de L. Fuchs; d'autre part, aux recherches faites par l'auteur lui-même depuis plusieurs années sur ce qu'il appelle le problème de Riemann.

En 1884, L. Fuchs s'est proposé de caractériser les équations différentielles non linéaires dont les solutions n'admettent que des points de ramification fixes. Il a pu résoudre ce problème dans le cas des équations différentielles du premier ordre. Or, comme l'a montré Painlevé, les points singuliers mobiles d'une équation différentielle du premier ordre jouissent de la propriété que, dans leur voisinage, les solutions se comportent comme des fonctions algébriques : Fuchs a donc, en somme, déterminé les équations différentielles du premier ordre dont tous les points *critiques* sont fixes, en désignant sous le nom de *points critiques* les points de ramification et les points d'indétermination (points singuliers essentiels). C'est Painlevé qui a entrepris la résolution du même problème pour les équations différentielles d'ordre supérieur. Il a développé une méthode lui permettant, d'une part, d'indiquer les conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle n'admette que des points critiques fixes; d'autre part, de reconnaître si, pour une équation différentielle satisfaisant à ces conditions, les points singuliers mobiles sont de simples pôles. A l'aide de cette méthode, Painlevé a dressé un tableau des équations différentielles du second ordre de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

où f est rationnel en $\frac{dy}{dx}$, algébrique en y et analytique en x, qui n'admettent que des points critiques fixes et ne sont pas réductibles à des quadratures ou à des équations différentielles linéaires. Ce tableau contient une lacune : l'équation différentielle du second ordre, que Painlevé lui-même a montré plus tard être la plus importante et la plus générale, ne s'y trouve pas. Chazy et Garnier ont appliqué ensuite la méthode de Painlevé aux équations différentielles du troisième ordre.

Dans une série de Mémoires parus depuis 1888, L. Fuchs a traité le problème de la détermination des équations différentielles linéaires et homogènes, dont le groupe de monodromie est indépendant d'un paramètre entrant dans les coefficients de l'équation. Ce problème tire son importance de ce fait que si le groupe de monodromie satisfait à cette condition, les solutions de l'équation

différentielle, considérées comme fonctions du paramètre, ou comme fonctions des variables indépendantes, possèdent le même caractère analytique. Cela tient à ce que ces solutions, considérées comme fonctions des variables et du paramètre, satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires dont les coefficients sont formés au moyen des coefficients de l'équation différentielle linéaire. Dans ses deux premiers Mémoires sur le problème de Riemann (même *Journal*, t. CXXIII et CXXIV), l'auteur a rattaché le problème de Fuchs au problème de Riemann; il a pu ainsi étudier la manière dont les solutions d'une équation différentielle linéaire qui satisfait à la condition de Fuchs dépendent du paramètre. A ce moment, il ne pouvait résoudre le problème de Riemann que dans le cas où les conditions de convergence pour les séries zétafuchsiennes de Poincaré étaient réalisées. La substitution à l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre de Fuchs d'un système différentiel linéaire canonique à n inconnues lui a permis plus tard, d'abord de résoudre complètement le problème de Riemann, ensuite de donner au problème de Fuchs le haut degré de simplicité qui permettait de l'aborder d'une manière générale.

L'auteur a pu, en effet (même *Journal*, t. CXXIX, p. 287), établir d'une manière explicite les conditions nécessaires et suffisantes pour que les substitutions fondamentales d'un système différentiel linéaire canonique soient indépendantes de l'un des points singuliers; ces conditions se présentent sous la forme d'un système différentiel auquel doivent satisfaire les résidus considérés comme fonctions de ce point singulier. C'est à l'intégration de ce système différentiel qu'est consacré le présent Mémoire; sa propriété de n'admettre que des points critiques fixes le rattache aux travaux de Painlevé et Garnier.

Première Partie. — *Le problème de Fuchs.* — Soit

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\mathrm{A}_{\lambda k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

un système différentiel linéaire canonique, où l'on regarde a_λ comme un paramètre, les autres a_ν comme des constantes et les $\mathrm{A}_{\lambda k}^{(\nu)}$ comme des quantités indépendantes de x, mais fonctions du paramètre a_λ.

Une matrice intégrale (y_{ik}) est une matrice d'ordre n telle que les éléments de chaque ligne constituent une solution du système (A), les n solutions formées par les n lignes étant indépendantes. En posant

$$(y_{ik})^{-1}\left(\frac{dy_{ik}}{dx}\right) = \mathrm{D}_x(y_{ik}),$$

le système (A) peut s'écrire

$$\mathrm{D}_x(y_{ik}) = \frac{(\mathrm{A}_{ik}^{1})}{x - a_1} + \frac{(\mathrm{A}_{ik}^{2})}{x - a_2} + \ldots + \frac{(\mathrm{A}_{ik}^{\sigma})}{x - a_\sigma}.$$

Le problème de Fuchs est le suivant :

A quelles conditions doivent satisfaire les $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$, *considérées comme fonctions de* a_λ, *pour qu'il existe une matrice intégrale* (y_{ik}) *telle que la substitution fondamentale* $(\mathcal{A}_{ik})$ *subie par cette matrice, quand* x *décrit un contour fermé quelconque, soit indépendante de* a_λ?

Lorsque x tourne autour de a_ν, la matrice (y_{ik}) devient $(\mathcal{A}_{ik}^{\nu})(y_{ik})$; il

s'agit au fond d'exprimer que les $n^2\sigma$ éléments des σ matrices (A_{ik}^{ν}) sont indépendants de a_λ.

Une condition nécessaire est que les racines fondamentales des matrices (A_{ik}^{ν}), c'est-à-dire les racines de l'équation

$$|A_{ik}^{\nu} - \delta_{ik}\omega| = 0 \qquad (\delta_{ii} = 1 ; \delta_{ik} = 0, \text{ si } i \neq k),$$

soient indépendantes de a_λ. Mais cette condition n'est pas suffisante. L'auteur arrive aux équations

$$(B) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{dA_{ik}^{\lambda}}{da_\lambda}\right) = \displaystyle\sum_{(\mu \neq \lambda)} \dfrac{(A_{ik}^{\lambda})(A_{ik}^{\mu}) - (A_{ik}^{\mu})(A_{ik}^{\lambda})}{a_\lambda - a_\mu}, \\ \left(\dfrac{dA_{ik}^{\nu}}{da_\lambda}\right) = \dfrac{(A_{ik}^{\lambda})(A_{ik}^{\nu}) - (A_{ik}^{\nu})(A_{ik}^{\lambda})}{a_\nu - a_\lambda} \qquad (\nu \neq \lambda). \end{cases}$$

En réalité, ces équations ne représentent les conditions nécessaires et suffisantes que si l'on suppose le système (A) modifié (par une substitution linéaire effectuée sur les fonctions inconnues) de manière que les résidus relatifs à $x = \infty$ deviennent indépendants de a_λ, ce qui est toujours possible.

Toute matrice intégrale (y_{ik}) qui subit une substitution indépendante de a_λ, quand x décrit un contour fermé, satisfait alors au système différentiel

$$(C) \qquad D_{a_\lambda}(y_{ik}) = -\frac{(A_{ik}^{\lambda})}{x - a_\lambda},$$

et réciproquement.

Deuxième Partie. — *Équations intégrales du système différentiel* (B). — Les équations (B) donnent par addition

$$\frac{d}{da_\lambda}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{ik}^{\nu}\right) = 0,$$

ce qui montre que la matrice

$$(A_{ik}^{\sigma+1}) = -\sum_{\nu=1}^{\sigma} (A_{ik}^{\nu})$$

est constante : c'est la matrice des résidus relatifs à $x = \infty$.

Si l'on regarde la matrice $(A_{ik}^{(\lambda)})$ comme connue, l'intégrale générale de l'équation

$$\left(\frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda}\right) = (A_{ik}^{\nu})\left(\frac{A_{ik}^{\lambda}}{a_\lambda - a_\nu}\right) - \left(\frac{A_{ik}^{\lambda}}{a_\lambda - a_\nu}\right)(A_{ik}^{\nu})$$

est

$$(A_{ik}^{\nu}) = (z_{ik}^{\nu})^{-1}(\rho_{ik})(z_{ik}^{\nu}),$$

où $(z_{ik}^{(\nu)})$ est l'intégrale générale de

$$D_{a_\lambda}(z_{ik}^{\nu}) = \left(\frac{A_{ik}^{\lambda}}{a_\lambda - a_\nu}\right)$$

et où (ρ_{ik}) est une matrice canonique à éléments constants : ces éléments sont les racines de l'équation caractéristique de la matrice $(A_{ik}^{(\nu)})$. Il résulte de là que l'on connaît déjà $n\sigma + n^2$ intégrales premières algébriques du système (B).

En se donnant alors la matrice constante $(A_{ik}^{(\sigma+1)})$ qu'on peut supposer égale à

$$(A_{ik}^{(\sigma+1)}) = (\delta_{ik} r_i^{(\sigma+1)}),$$

et en se donnant les $n(\sigma - 1)$ constantes

$$r_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots, \sigma),$$

on pourra poser

$$(A_{ik}^{\nu}) = (B_{ik}^{\nu})^{-1} (\delta_{ik} r_i^{\nu}) (B_{ik}^{\nu}) \qquad (\nu \neq \lambda),$$

$$(A_{ik}^{\lambda}) = -(A_{ik}^{\sigma+1}) - \sum_{(\nu \neq \lambda)} (A_{ik}^{\nu}),$$

et les $(B_{ik}^{(\nu)})$ seront données par les équations

$$\text{(E)} \qquad \left(\frac{dB_{ik}^{\nu}}{da_\lambda}\right) = (B_{ik}^{\nu}) \left(\frac{A_{ik}^{\lambda}}{a_\lambda - a_\nu}\right)$$

ou

$$\text{(E')} \qquad D_{a_\lambda}(B_{ik}^{\nu}) = \left(\frac{A_{ik}^{\lambda}}{a_\lambda - a_\nu}\right).$$

On peut, d'après cela, arriver à l'intégrale générale du système (B) de deux manières bien différentes. Donnons-nous d'abord les valeurs initiales $\overline{A_{ik}^{(\nu)}}$ des $A_{ik}^{(\nu)}$ pour $a_\lambda = a_\lambda^0$ et intégrons le système (A) pour $a_\lambda = a_\lambda^0$ en cherchant la matrice intégrale $(y_{ik}^{(0)})$ qui, pour $x = x_0$, se réduit à la matrice unité. Intégrons ensuite le système (C) en partant, pour $a_\lambda = a_\lambda^0$, de la valeur initiale $(y_{ik}^{(0)})$. On a ainsi une matrice (y_{ik}) qu'on peut obtenir par une marche inverse. La comparaison des deux valeurs obtenues fournit une famille continue d'intégrales premières du système (B), puisque la quantité x, indépendante de a_λ, y figure. On obtient ainsi l'intégrale générale de (B) d'une manière analogue à celle dont on intègre certaines équations linéaires par des quadratures où la variable indépendante figure comme paramètre.

On obtient une deuxième forme de l'intégrale générale du système (B) en remarquant, avec Poincaré, que les éléments de la matrice intégrale (y_{ik}) sont des fonctions transcendantes entières des résidus A_{ik}^{ν}, les coefficients ne dépendant que des $a_1, \ldots, a_\sigma$ et du chemin d'intégration $\overline{x_0 x}$:

$$y_{ik} = E_{ik}(A_{11}^1, \ldots, A_{nn}^\sigma;\ a_1, \ldots, a_\sigma;\ \overline{x_0 x}).$$

Si l'on considère les deux contours fermés s_0 et s_ν partant de x_0 et y revenant, le premier n'entourant aucun point singulier, le second entourant le point a_ν, on a deux valeurs distinctes de la matrice intégrale

$$(y_{ik}) = (E_{ik}(A_{11}^1, \ldots, A_{nn}^\sigma;\ a_1, \ldots, a_\sigma;\ s_0))$$

et

$$(\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)})(\gamma_{ik}) = (E_{ik}(A_{11}^{1}, \ldots, A_{nn}^{\sigma}; a_1, \ldots, a_\sigma; s_\nu)).$$

On obtient ainsi les constantes $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$ représentées comme fonctions méromorphes des A_{ik}^{ν} et des a_ν :

$$\mathcal{A}_{ik}^{\nu} = G_{ik}^{\nu}(A_{11}^{1}, \ldots, A_{nn}^{\sigma}; a_1, \ldots, a_\sigma).$$

Ces équations donnent l'intégrale générale du système (B), les constantes d'intégration étant les $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$.

Troisième Partie. — *Les propriétés des fonctions méromorphes* $G_{ik}^{(\nu)}$. — A un système de valeurs des constantes d'intégration $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$ correspondent en général, pour $a_\lambda = a_\lambda^0$, une infinité de systèmes différents de valeurs initiales $A_{ik}^{[\nu]}$ et par suite une infinité d'intégrales du système (B). Mais tous ces systèmes donnent naissance à des systèmes différentiels (A) de la même *classe* (au sens de Riemann). Autrement dit, entre les matrices intégrales (y_{ik}) et (y'_{ik}) de deux de ces systèmes existe une relation

$$(y'_{ik}) = (y_{ik})(s_{ik})$$

où les s_{ik} sont des fonctions rationnelles de x, dont le déterminant $|s_{ik}|$ ne s'annule pour aucune valeur de x différente de $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$. Entre les racines caractéristiques $r_i^{(\nu)}$ de l'un de ces systèmes et celles $r_i^{(\nu)'}$ de l'autre existent des relations

$$r_i^{(\nu)'} - r_i^{\nu} = g_i^{\nu},$$

où les $g_i^{(\nu)}$ sont $n(\sigma+1)$ entiers dont la somme est nulle.

Les $A_{ik}^{(\nu)'}$ sont des fonctions des $A_{ik}^{(\nu)}$ *rationnelles* et réciproquement. Autrement dit, les fonctions G_{ik}^{ν} sont des fonctions *automorphes* pour un groupe T formé d'une infinité de transformations birationnelles portant sur les A_{ik}^{ν}. Chacune de ces transformations est associée à un système de $n(\sigma+1)$ entiers $g_i^{(\nu)}$; elles sont échangeables entre elles.

Les transformations du groupe T sont engendrées par des transformations fondamentales dont chacune correspond à un des entiers $g_i^{(\nu)}$ égal à 1, un autre à -1 et tous les autres à zéro. L'auteur détermine toutes ces transformations fondamentales.

Quatrième Partie. — *Discussion du système différentiel* (B) *au point de vue de la théorie des fonctions.* — L'automorphisme des fonctions $G_{ik}^{(\nu)}$, interprété comme une relation entre les différentes intégrales $A_{ik}^{(\nu)}$ du système (B) qui correspondent aux mêmes constantes d'intégration $\mathcal{A}_{ik}^{\nu}$ permet à l'auteur de démontrer que ce système différentiel (B) possède des pôles mobiles. De la résolubilité du problème de Riemann résulte alors qu'il ne peut avoir aucun point critique mobile. L'auteur discute d'une manière générale la manière dont les solutions se comportent au voisinage des points critiques fixes a_ν et il en déduit les relations auxquelles doivent satisfaire les constantes d'intégration pour que les solutions correspondantes soient des fonctions *uniformes* de x.

Dans le cas où les constantes d'intégration satisfont aux conditions de con-

vergence, ce qui arrive lorsque les $r_i^{(\nu)}$ sont réelles, l'auteur effectue sous forme explicite l'intégration du système différentiel au moyen des séries zéta-fuchsiennes de Poincaré. Il montre sur le cas $n = 2$, que sa théorie d'intégration embrasse les équations différentielles à points critiques fixes indiquées par R. Fuchs, Garnier et Painlevé. L'auteur pense que son système différentiel (B) doit jouer, à ce point de vue, pour n quelconque, un rôle aussi important que pour $n = 2$.

Busche (*E.*). — Sur la théorie des résidus biquadratiques (146-161).

L'auteur donne de la loi de réciprocité des résidus biquadratiques dans le corps $K(\sqrt{-1}) = K(i)$ une démonstration élémentaire tout à fait analogue à la troisième démonstration de Gauss pour les résidus quadratiques, sous la forme que lui a donnée Zeller.

Dans le cas des résidus quadratiques, le caractère quadratique $D(m, n)$, pris mod 2, du nombre positif m par rapport au nombre positif impair n premier avec m, est égal au nombre des produits xm $\left(x = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right)$ qui sont compris entre un multiple impair et le multiple pair immédiatement suivant de $\frac{n}{2}$. Si m et n sont impairs, la loi de réciprocité exprime que $D(m, n) + D(n, m)$ n'est impair que si m et n sont tous les deux des multiples de 4 plus 3.

Dans le cas des résidus biquadratiques on définit d'une manière analogue le caractère biquadratique $D(m, n)$, pris mod 4, du nombre entier complexe $m = c + di$ par rapport au nombre entier complexe impair $n = a + bi$, premier avec m. On considère ceux des multiples entiers complexes de m, de la forme

$$(x + iy)\, m = zm$$

qui sont intérieurs au carré de sommets $\left(0, \frac{1}{2} mn, \frac{1+i}{2} mn, \frac{i}{2} mn\right)$. Chacun de ces points zm est intérieur à un carré de centre $z'n$ et de sommets $\left(z'n - \frac{1+i}{2} n,\ z'n + \frac{1-i}{2} n,\ z'n + \frac{1-i}{2} n,\ z'n - \frac{1-i}{2} n\right)$; ce carré se partage lui-même en quatre carrés égaux ν_h de sommets

$$\left(z'n,\ z'n + \frac{i^h}{2} n,\ z'n + i^h \frac{1-i}{2} n,\ z'n + \frac{i^{h+1}}{2} n\right),$$

où h a l'une des valeurs 0, 1, 2, 3. On fait alors correspondre au point considéré zm l'indice h du carré ν_h dans lequel il se trouve. La somme des indices h correspondant aux $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 1)$ points zm considérés donne $D(m, n)$ (mod 4).

L'auteur détermine d'abord $D(1 + i, a + bi)$ qui est égal, par exemple dans le cas de a impair, à

$$D(1 + i, a + bi) \equiv (a - b) \cdot \left(\frac{a-1}{2} - \left[\frac{a+b}{4}\right] - \frac{b^2}{4}\right) \pmod 4.$$

Il passe ensuite au cas général en remplaçant successivement le carré ν_0 par deux autres polygones ν'_0 et ν''_0, auxquels correspondent les caractères $D'(m, n)$ et $D''(m, n)$, qu'il peut comparer facilement à $D(m, n)$. En ne considérant ensuite parmi les points zm que ceux qui sont à l'intérieur de certains carrés de centres zn et de côté égal à $|m|$, ces points fournissent dans le calcul de $D''(m, n)$ une partie $D''_\mu(m, n)$. Il lui est facile de comparer $D''_\mu(m, n)$ à $D''(n, m)$. C'est de cette manière qu'il arrive à former par comparaisons successives la différence $D(m, n) - D(n, m)$.

Finalement la loi de réciprocité biquadratique est fournie par la formule

$$D(c + di, a + bi) - D(a + bi, c + di)$$
$$\equiv 2\left(\frac{a-1}{2}\,\frac{c-1}{1} + \frac{a-b-1}{2}\,\frac{c+d-1}{2}\right) \pmod 4.$$

Weyl (*H.*). — Sur le spectre des radiations d'une cavité (163-181).

L'auteur applique la méthode dont il s'est servi dans la Note précédente (même *Journal*, même Tome, p. 1) pour démontrer un nouveau théorème sur le spectre de toutes les radiations possibles dans une cavité de forme quelconque à parois parfaitement réfléchissantes. Ce théorème qui donne une expression exacte du nombre des vibrations fondamentales, dont la fréquence est inférieure à une limite donnée quelconque, permet de démontrer d'une nouvelle manière la loi asymptotique du spectre qu'il a indiquée dans un Mémoire précédent (*Mathematische Annalen*, t. LXXI, p. 441). Le spectre de l'équation aux vibrations correspondant à la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ suit la même loi asymptotique que celui qui correspond à la condition aux limites $u = 0$.

1. L'auteur commence par démontrer quelques lemmes. Étant donné un noyau symétrique $K(s, t)$, soient

$$\overset{+}{l}_1, \overset{+}{l}_2, \ldots, \overset{+}{l}_n, \ldots$$

les inverses de ses nombres fondamentaux positifs, ces inverses étant rangés par ordre de grandeur décroissante; soient de même

$$\overset{-}{l}_1, \overset{-}{l}_2, \ldots, \overset{-}{l}_n, \ldots$$

les inverses des nombres fondamentaux négatifs, rangés par ordre de valeur absolue décroissante, et enfin

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$

les inverses des nombres fondamentaux, positifs et négatifs, rangés par ordre de valeur absolue décroissante.

Ces notations étant posées, il démontre d'abord que, si K est la somme des deux noyaux K′ et K″, on a les relations

$$\overset{+}{l}_{n+m+1} \leq \overset{+}{l}'_{m+1} + \overset{+}{l}''_{n+1}, \qquad \overset{-}{l}_{n+m+1} \geq \overset{-}{l}'_{n+1} + \overset{-}{l}''_{n+1};$$
$$l_{n+m+1} \leq l'_{m+1} + l''_{n+1}.$$

De ces relations l'auteur déduit en passant le théorème de Schmidt, d'après lequel l'intégrale du carré de la différence entre $K(s,t)$ et une somme quelconque de la forme $\sum_{i=1}^{h} \Phi_i(s)\Psi_i(t)$ est au moins égale à $l_{h+1}^2 + l_{h+2}^2 + \ldots$.

L'auteur considère ensuite une fonction $f(s)$ et transforme le noyau $K(s,t)$ en un noyau $K^*(s,t)$ orthogonal à $f(t)$ et tel que, pour toutes les fonctions $x(s)$ orthogonales à $f(s)$, on ait

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt = \int_0^1 \int_0^1 K^*(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt.$$

On a alors les inégalités

$$\overset{+}{l}_1 \geq \overset{+}{l}_1' \geq \overset{+}{l}_2 \geq \overset{+}{l}_2' \geq \overset{-}{l}_3 \geq \overset{+}{l}_3' \geq \ldots.$$

2. Étant donné un domaine J du plan des xy, limité par une courbe $\mathfrak{C}$ fermée à courbure continue, l'auteur désigne par q_i et r_i les inverses des nombres fondamentaux $\varkappa$ relatifs à l'équation aux vibrations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa u = 0,$$

suivant que l'on considère une intégrale satisfaisant, sur le contour $\mathfrak{C}$, à la condition aux limites $u = 0$ ou à la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Soit $G(p,p')$ la fonction de Green s'annulant sur $\mathfrak{C}$, et soit $H(p,p')$ la fonction de Green dont la dérivée normale sur $\mathfrak{C}$ est égale à $\frac{2\pi}{L}$, où L désigne la longueur du contour $\mathfrak{C}$. Soient enfin $G^*(p,p')$ et $H^*(p,p')$ les noyaux transformés de $G(p,p')$ et $H(p,p')$ de manière à les rendre orthogonaux à 1. Les q_i sont les inverses des nombres fondamentaux de $\frac{1}{2\pi} G(p,p')$ et les r_i sont les inverses des nombres fondamentaux de $\frac{1}{2\pi} H^*(p,p')$. Soient r_i', q_i^* les inverses des nombres fondamentaux de $\frac{1}{2\pi} H(p,p')$ et $\frac{1}{2\pi} G^*(p,p')$. On a

$$r_1' \geq r_1 \geq r_2' \geq r_2 \geq \ldots,$$
$$q_1 \geq q_1^* \geq q_2 \geq q_2^* \geq \ldots;$$

de plus, le noyau $H^* - G^*$ étant défini positif, on a

$$r_i \geq q_i^*$$

et par suite

$$r_i \geq q_{i+1}.$$

Enfin on a

$$\lim_{n=\infty} n q_n = \frac{J}{4\pi}.$$

3. L'auteur étend la loi asymptotique précédente, démontrée dans sa première Note (même Tome du même *Journal*, p. 1), aux r_n. La démonstration, faite dans le cas du plan, est étendue ensuite à l'espace.

4. Étant donnée une cavité J vide de matière, limitée par des parois parfaitement réfléchissantes; considérons, pour une radiation fondamentale, l'intensité $\mathcal{E}(x, y, z)\, e^{\nu t}$ du champ électrique et l'intensité $\mathfrak{M}(x, y, z)\, e^{\nu t}$ du champ magnétique à l'intérieur de la cavité; on a désigné par ν la fréquence de la vibration fondamentale. Soient de plus E_x, E_y, E_z les composantes du vecteur $\mathcal{E}$ et M_x, M_y, M_z celles du vecteur $\mathfrak{M}$.

La quantité $\mathcal{E}$ est déterminée par les conditions

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \Delta\mathcal{E} + \left(\dfrac{\nu}{c}\right)^2 \mathcal{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathcal{E} = 0, \text{ à l'intérieur de J.} \\ \mathcal{E} \text{ normal à la paroi,} \end{cases}$$

où c est la vitesse de la lumière.

Ces conditions définissent un problème dont les nombres fondamentaux $\left(\dfrac{\nu}{c}\right)^2$ seront désignés par σ.

Les quantités E_x, E_y, E_z satisfont aux conditions

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \Delta E_x + \left(\dfrac{\nu}{c}\right)^2 E_x = 0, \qquad \Delta E_y + \left(\dfrac{\nu}{c}\right)^2 E_y = 0, \qquad \Delta E_z + \left(\dfrac{\nu}{c}\right)^2 E_z = 0, \\ \qquad\qquad \text{à l'intérieur de J;} \\ E_x : E_y : E_z = X : Y : Z, \qquad X\dfrac{\partial E_x}{\partial n} + Y\dfrac{\partial E_y}{\partial n} + Z\dfrac{\partial E_z}{\partial n} = 0, \text{ sur la paroi,} \end{cases}$$

où X, Y, Z désignent les cosinus directeurs de la normale à la paroi. Ces conditions définissent un nouveau problème dont les nombres fondamentaux $\left(\dfrac{\nu}{c}\right)^2$ seront désignés par σ'.

Les σ forment une partie, mais une partie seulement, des σ'. La résolution du problème (II) se ramène à celle d'une équation intégrale, dont le noyau est un *tenseur de Green*.

L'auteur démontre qu'au-dessous d'une limite donnée, il y a au moins trois fois autant de nombres fondamentaux σ' que de nombres fondamentaux $\dfrac{1}{q}$ (avec les notations du n° 2, dans le cas de l'espace). De là on conclut qu'au-dessous de cette limite, *il y a au moins deux fois autant de nombres fondamentaux σ que de nombres fondamentaux correspondant à la condition aux limites $u = 0$.*

5. Les σ font aussi partie des nombres fondamentaux σ'' du problème défini par les conditions suivantes, où interviennent les composantes du champ magnétique :

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} \Delta M_x - \sigma'' M_x = 0, \qquad \Delta M_y + \sigma'' M_y = 0, \qquad \Delta M_z + \sigma'' M_z = 0, \\ \qquad\qquad \text{à l'intérieur de J :} \\ \dfrac{\partial M_x}{\partial n} : \dfrac{\partial M_y}{\partial n} : \dfrac{\partial M_z}{\partial n} = X : Y : Z, \qquad XM_x + YM_y + ZN_z = 0, \text{ sur la paroi.} \end{cases}$$

L'auteur démontre qu'au-dessous d'une limite donnée, il y a au plus trois fois autant de σ'' que de $\dfrac{1}{r}$. Par suite, *le nombre des nombres fondamentaux σ*

inférieurs à une limite donnée est au plus supérieur d'une unité au double du nombre des nombres fondamentaux correspondant à la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

De là résulte enfin la loi asymptotique suivante :

Le nombre des lignes spectrales du spectre de radiations de la cavité, dont la fréquence est inférieure à ν, *croît avec* ν *comme le cube de* ν. *D'une manière plus précise, le rapport de ce nombre à* ν^3 *tend, pour* ν *infini, vers le rapport du volume de la cavité à* $3\pi^2 c^3$.

Horn (*J.*). — Sur la théorie des équations différentielles et des équations aux différences non linéaires (182-216).

Dans cet article, l'auteur applique aux équations aux différences linéaires la méthode des approximations successives dont il s'est servi dans un Mémoire précédent (même *Journal*, t. CXXXVIII, 1910) pour étudier la manière dont les intégrales des équations aux différences linéaires se comportent pour de grandes valeurs de la variable.

Il considère un système d'équations aux différences de la forme

$$(\alpha) \qquad x^k y_i(x+1) = G_i[x, y_1(x), \ldots, y_m(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où k est un entier positif ou nul et G_i une fonction s'annulant au point $(x = \alpha, y_1 = 0, \ldots, y_m = 0)$ et régulière au voisinage de ce point; x prend les valeurs x_0, $x_0 + 1$, $x_0 + 2$, ..., où x_0 est un nombre réel, les autres quantités pouvant être complexes. L'auteur représente par des séries infinies celles des solutions du système qui tendent vers zéro pour x infini.

A ces recherches sur les équations aux différences correspondent des recherches sur les systèmes d'équations différentielles non linéaires de la forme

$$(\beta) \qquad x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = G_i(x, y_1, \ldots, y_m), \qquad (x = 1, 2, \ldots, m),$$

où k et G_i ont la même signification que plus haut; l'auteur étudie de quelle manière les solutions pour lesquelles y_i tend vers zéro pour x infini se comportent pour de grandes valeurs de x.

Dans la première partie de l'article il est traité des solutions du système (β) pour de grandes valeurs de x, ou ce qui revient au même des solutions, pour x réel positif et petit, du système

$$(\gamma) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx} = G_i(x, y_1, \ldots, y_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où k est un autre positif et G_i une fonction s'annulant au point

$$(x = 0, y_1 = 0, \ldots, y_m = 0)$$

et régulière au voisinage de ce point. La seconde partie est consacrée au système (α) pour $k = 0$ et la troisième partie au système (α) pour $k > 0$.

Première Partie. — On peut, en général, par une substitution linéaire effec-

tuée sur les y_i, mettre le système (γ) sous la forme

$$(A) \qquad x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = a_i y_i + f_i(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où f_i contient un terme en x et des termes du second degré au moins en x, $y_1, \ldots, y_m$; le nombre k est un entier supérieur ou égal à 1 et l'on suppose les parties réelles $\bar{a}_i$ des a_i satisfaire aux relations

$$\bar{a}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{a}_\mu > 0 > \bar{a}_{\mu+1} \geqq \ldots \geqq \bar{a}_m.$$

Le système (A) est équivalent au système des équations intégrales

$$(B) \qquad y_i = c_i e^{-\frac{a_i}{k x^k}} + e^{-\frac{a_i}{k x^k}} \int_{\xi_i}^{x} \frac{e^{\frac{a_i}{k x^k}}}{x^{k+1}} f_i(x, y_1, \ldots, y_m)\, dx$$

où $\xi_i = x_0$ (réel et positif) pour $i \leqq \mu$ et $\xi_i = 0$ pour $i \geqq \mu + 1$.

Si l'on suppose que, dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq x_0, \qquad |y_1| \leqq h, \ldots, |y_m| \leqq h,$$

on ait

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_m)| < M,$$

le système d'équations intégrales ne pourra avoir d'intégrales satisfaisant aux inégalités

$$|y_i| \leqq h \qquad \text{pour} \qquad 0 < x \leqq x_0$$

que si les constantes $c_i (i = \mu + 1, \ldots, m)$ sont toutes nulles.

L'auteur intègre le système (B) (où l'on suppose cette condition relative aux c_i réalisée) par la méthode des approximations successives. Il choisit alors x_0 et h de manière à avoir

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_m)| \leqq hq$$

pour $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y_1| \leqq h, \ldots |y_m| \leqq h$;

$$|f_i(x, y'_1, \ldots, y'_m) - f_i(x, y_1, \ldots, y_m)| \leqq g(|y'_1 - y_1| + \ldots + |y'_m - y_m|)$$

pour $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y_1| \leqq h, \ldots, |y'_1| \leqq h, \ldots$,

avec

$$q = \frac{\bar{a}_\mu}{k}, \quad q = -\bar{a}_{\mu+1}, \quad g < \frac{q}{m},$$

$$|c_i| e^{-\frac{\bar{a}_i}{k x^k}} \leqq \frac{h}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Dans ces conditions on a, pour $0 \leqq x \leqq x_0$,

$$|y_i^\nu| \leqq h, \qquad |y_i^\nu - y_i^{\nu-1}| \leqq h\left(\frac{mg}{q}\right)^{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

La fonction $y_i = \lim_{\nu = \infty} y_i^{(\nu)}$ tend vers zéro quand x tend vers zéro. On obtient

ainsi une intégrale du système (A); c'est la seule qui satisfasse aux conditions

$$|y_i| \leq h \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq x \leq x_0,$$

$$y_i = c_i e^{-\frac{a_i}{k x_0^k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu) \qquad \text{pour} \qquad x = x_0.$$

Enfin, en restreignant encore un peu les conditions auxquelles doivent satisfaire x_0 et h, on a

$$|y_i| \leq \frac{h}{x_0} x \qquad \text{pour} \qquad 0 < x \leq x_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Chacune des fonctions y_i obtenues admet, pour les petites valeurs positives de x, une représentation asymptotique

$$y_i \sim C_{i1} x + C_{i2} x^2 + \ldots + C_{in} x^n + \ldots$$

en ce sens que l'on a

$$\lim_{x = +0} \frac{y_i - C_{i1} x - C_{i2} x^2 - \ldots - C_{in} x^n}{x^n} = 0.$$

Les séries des seconds membres sont celles qui satisfont formellement au système (A). Ces représentations asymptotiques peuvent être dérivées autant de fois qu'on veut; en particulier on a

$$\lim_{x = +0} \frac{d^p y_i}{dx^p} = p!\, C_{ip}.$$

Deuxième Partie. — Le système d'équations aux différences

$$y_i(x+1) = G_i(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

peut en général être ramené à la forme

$$(\mathcal{A}) \qquad y_i(x+1) = a_i y_i(x) + f_i\left(\frac{1}{x}, y_1(x), \ldots, y_m(x)\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

où l'on suppose

$$|a_1| \geq \ldots \geq |a_\mu| < 1 < |a_{\mu+1}| \geq \ldots \geq |a_m|.$$

Pour toute solution du système $(\mathcal{A})$ satisfaisant à

$$|y_i| \leq h \qquad \text{pour} \qquad x \geq x_0,$$

le système $(\mathcal{A})$ est équivalent aux équations aux sommes

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} y_i = c_i a_i^x + a_i^x \displaystyle\sum_{x_0}^{x} a_i^{x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \ldots, y_m\right) & (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ y_i = a_i^x \displaystyle\sum_{\infty}^{x} a_i^{x-1} f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \ldots, y_m\right) & (i = \mu+1, \ldots, m). \end{cases}$$

L'auteur choisit x_0 et h de manière à avoir

$$\left|f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \ldots, y_m\right)\right| \leq hq \qquad \text{pour} \qquad x \geq x_0, |y_1| \leq h, \ldots, |y_m| \leq h;$$

$$\left|f_i\left(\frac{1}{x}, y'_1, \ldots, y'_m\right) - f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \ldots, y_m\right)\right| \leq g(|y'_1 - y_1| + \ldots + |y'_m - y_m|)$$

$$\text{pour} \qquad x \geq x_0, |y_1| \leq h, \ldots, |y'_1| \leq h, \ldots,$$

avec

$$q \leq \frac{1}{2}\sqrt{|a_i|}(1 - \sqrt{|a_i|}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu);$$

$$q \leq \sqrt{|a_i|}(\sqrt{|a_i|} - 1) \qquad (i = \mu + 1, \ldots, m),$$

$$g < \frac{q}{m},$$

$$|c_i||a_i|^{x_0} \leq \frac{h}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Dans ces conditions la méthode des approximations successives fournit pour y_i des séries absolument et uniformément convergentes pour $x \geq x_0$ satisfaisant aux conditions

$$|y_i| \leq h \qquad \text{pour} \qquad x \geq x_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$|y_i = c_i a_i^x \qquad \text{pour} \qquad x = x_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

et c'est la seule solution satisfaisant à ces conditions.

On a de plus

$$\lim_{x=\infty} y_i = 0,$$

et d'une manière plus précise, en restreignant les conditions relatives à x_0 et h,

$$y_i = \frac{hx_0}{x} \qquad \text{pour} \qquad x \geq x_0.$$

Il existe des séries (en général divergentes)

$$S_i = \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \ldots$$

satisfaisant formellement aux équations ($\mathfrak{A}$). Ces séries représentent asymptotiquement les fonctions y_i pour x très grand, en ce sens que l'on a

$$\lim_{x=\infty} x^n\left(y_i - \frac{C_{i1}}{x} - \frac{C_{i2}}{x^2} - \ldots - \frac{C_{in}}{x^n}\right) = 0.$$

Troisième Partie. — Le système d'équations aux différences qui reste à étudier peut en général être mis sous la forme

$$(\overline{\mathfrak{A}}) \qquad x^{-k} y_i(x+1) = a_i y_i(x) + f_i\left(\frac{1}{x}, y_1(x), \ldots, y_m(x)\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

où les a_i sont différents de zéro. Si une solution est telle que y_i reste finie

pour $x = x_0$, les y_i satisfont aux équations

$$(\overline{\mathfrak{B}}) \qquad y_i = -[\Gamma(x)]^k a_i^x \sum_x^{\infty} \frac{f_i\left(\frac{1}{x}, y_1, \ldots, y_m\right)}{[\Gamma(x)]^k a_i^{x+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Sous certaines conditions, analogues à celles qui ont été précédemment indiquées, l'application de la méthode des approximations successives conduit à des séries absolument et uniformément convergentes fournissant la solution unique du système $(\overline{\mathfrak{A}})$ pour laquelle on a

$$|y_i| \leqq h \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{pour} \qquad x \geqq x_0.$$

Pour cette solution on a

$$\lim_{x=\infty} y_i = 0$$

et, d'une manière plus précise,

$$|y_i| < \frac{hx_0}{x} \qquad \text{pour} \qquad x \geqq x_0.$$

Il existe des séries

$$S_i = \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

satisfaisant formellement au système $(\overline{\mathfrak{A}})$ et représentant asymptotiquement les fonctions y_i pour les valeurs réelles et positives très grandes de x.

Bohr (Harald). — Sur la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ (217-234).

Littlewood a démontré (*C. R. Acad. Sc.*, 29 janvier 1912) que, pour chaque valeur positive de δ, la fonction $\zeta(s)$ ou la fonction $\zeta'(s)$ ont une infinité de zéros dans le demi-plan $\sigma = \mathfrak{R}(s) > 1 - \delta$. Par suite, si la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction $\zeta(s)$ est inférieure à 1 (ce qui a lieu certainement si l'on admet avec Riemann que ces parties réelles sont au plus égales à $\frac{1}{2}$), la fonction $\zeta'(s)$ a dans le demi-plan $\sigma > 1 - \delta$ une infinité de zéros. Il est donc intéressant de vérifier si cette conclusion est exacte ou non. C'est ce que l'auteur se propose de faire dans cet article, où il démontre qu'effectivement *la fonction $\zeta'(s)$ admet une infinité de zeros dans le demi-plan $\sigma > 1$.*

Son raisonnement s'applique, non pas à la fonction $\zeta'(s)$ elle-même, mais à la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, ce qui n'a pas d'impo nce en l'espèce.

1. *Détermination de l'ensemble* $M(\sigma_0)$ *de toutes les valeurs que prend la série infinie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{\sigma_n e^{i\varphi_n}} \log p_n}{1 - p_n^{\sigma_n e^{i\varphi_n}}}$ *pour une valeur fixe* $\sigma_n = 1$, *lorsque les nombres réels* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ *prennent indépendamment les uns des autres*

toutes les valeurs possibles. — La série indiquée tire son importance de la formule

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0+it} \log p_n}{1 - p_n^{-\sigma_0+it}}$$

où la série du second nombre est convergente quel que soit t, p_n désignant le $n^{\text{ième}}$ nombre premier réel. En posant

$$\varphi_n = \pi - t \log p_n,$$

on a donc

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}.$$

Lorsque φ_n prend toutes les valeurs réelles possibles de 0 à 2π, le point

$$\frac{p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n} \log p_n}{1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}$$

décrit un cercle de centre $c_n = \frac{p_n^{-2\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}}$ et de rayon $\rho_n = \frac{p_n^{-\sigma_0} \log p_n}{1 - p_n^{-2\sigma_0}}$.
L'ensemble $M(\sigma_0)$ est donc l'ensemble des valeurs que prend la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \rho_n e^{i\theta_n})$$

quand les θ_n prennent toutes les valeurs réelles possibles.

D'après cela deux cas sont à distinguer:

α. Si l'on a

$$\rho_1 \geq \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n,$$

l'ensemble $M(\sigma_0)$ coïncide avec l'ensemble des points situés à l'intérieur d'un cercle K de centre $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ et de rayon $R = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$.

β. Si l'on a

$$\rho_1 > \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n,$$

l'ensemble $M(\sigma_0)$ coïncide avec l'ensemble des points situés entre deux cercles K et K_1 de centre C et de rayons $R = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ et $r = \rho_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n$.

Comme la quantité $\frac{\rho_n(\sigma_0)}{\rho_1(\sigma_0)}$ décroît quand σ_0 croît, il existe un nombre fixe D tel que

Si $1 < \sigma_0 < D$, on est dans le cas α;

Si $\sigma_0 \geq D$, on est dans le cas β.

Quand σ_0 augmente indéfiniment, C tend vers le point O, et les rayons R et r tendent vers zéro. Quand σ_0 tend vers 1, R augmente indéfiniment. L'origine O est toujours à l'intérieur du cercle K; de plus, si $\sigma_1 < \sigma_2$, le cercle $K(\sigma_2)$ est à l'intérieur du cercle $K(\sigma_1)$.

2. *Sur les valeurs de* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *sur la verticale* $(\sigma = \sigma_0 > 1)$. — La partie réelle σ_0 de s étant donnée, les différentes valeurs de $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it)$ appartiennent à l'ensemble $M(\sigma_0)$. L'auteur démontre en s'appuyant sur un théorème d'arithmétique de Kronecker que, si m est un nombre donné quelconque de l'ensemble $M(\sigma_0)$, à tout nombre positif ε aussi petit qu'on veut il correspond au moins un nombre réel t_0 tel qu'on ait

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it_0) - m \right| < \varepsilon.$$

Par suite, *les valeurs que prend la fonction* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *sur la verticale* $\sigma = \sigma_0 > 1$ *sont contenues, si* $\sigma_0 \geq D$, *à l'intérieur du cercle* $K(\sigma_0)$ *et forment dans ce cercle un ensemble partout dense, si* $\sigma_0 > D$ *dans la couronne limitée par les circonférences* $K(\sigma_0)$ *et* $k(\sigma_0)$ *et forment dans cette couronne un ensemble partout dense.*

3. *Détermination des valeurs que prend la fonction* $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ *au voisinage immédiat de la droite* $\sigma = \sigma_0 > 1$. — L'auteur démontre qu'au voisinage de la droite $\sigma = \sigma_0$, la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ prend rigoureusement toute valeur m de l'ensemble $M(\sigma_0)$. Il faut entendre par là que, quelque petit que soit le nombre positif δ, $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ prend la valeur m pour un point s compris entre les droites $\sigma = \sigma_0 - \delta$ et $\sigma = \sigma_0 + \delta$. La démonstration s'appuie sur les propriétés de la partie réelle de la fonction

$$F(s) = \log\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - m\right).$$

De là résulte qu'à chaque nombre positif E correspond un nombre

$$\sigma' = \sigma'(E) > 1$$

tel que la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ prenne une infinité de fois toute valeur de module inférieur à E lorsque s varie entre deux droites verticales quelconques $\sigma = a$ et $\sigma = b$ comprises entre les deux droites $\sigma = 1$ et $\sigma = \sigma'$. En particulier dans le demi-plan $\sigma > 1$ la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ prend une infinité de fois toute valeur donnée.

Enfin les propriétés indiquées plus haut du cercle K conduisent au théorème suivant :

Il existe une constante $D_1 > D$ *telle que tous les zéros de la fonction* $\zeta'(s)$ *situés dans le demi-plan* $\sigma > 1$ *sont compris entre les deux droites* $\sigma = 1$ *et* $\sigma = D_1$; *de plus, il y a toujours un zéro de* $\zeta'(s)$ *aussi voisin qu'on veut de toute droite verticale comprise entre ces deux droites limites.*

Jentzsch (Robert). — Sur les équations intégrales à noyau positif (235-244).

L'auteur démontre le théorème suivant, qui se rattache à des théorèmes analogues sur les matrices à éléments positifs, dus à Perron et à Frobenius :

Si la fonction réelle $K(s, t)$, *noyau de l'équation intégrale linéaire de seconde espèce*

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

est continue et positive dans le domaine $(a \leqq s \leqq b,\ a \leqq t \leqq b)$, *ce noyau possède des nombres fondamentaux; l'un de ces nombres est réel, positif, racine simple de la fonction de Fredholm* $D(\lambda)$ *et inférieur en valeur absolue à tous les autres nombres fondamentaux. La fonction fondamentale correspondante peut être supposée positive dans l'intervalle* $a \leqq s \leqq b$.

1. L'auteur rappelle les propriétés classiques des équations intégrales.

2. Si $K(s, t)$ est positif dans le domaine indiqué plus haut, la fonction $D(\lambda)$ de Fredholm a certainement des racines, sinon on aurait, quel que soit λ,

$$D(\lambda) = e^{-k_1\lambda - \frac{1}{2}k_2\lambda^2 \ldots}.$$

or les coefficients k_i sont ici tous positifs; cela est contradictoire avec la propriété connue de $D(\lambda)$ d'être de genre au plus égal à 2. Le rayon de convergence R de la série à termes positifs

$$k_1\lambda + \frac{1}{2}k^2\lambda^2 + \ldots$$

est alors une racine de $D(\lambda)$, et tout autre nombre fondamental est au moins égal en valeur absolue à R.

3. Si l'on fait tendre λ vers $\lambda_0 = R$ par des valeurs réelles et inférieures à λ_0 et si λ_0 est nombre fondamental multiple d'ordre m, la fonction

$$\chi_0(s, t) = \lim_{\lambda = \lambda_0}(\lambda_0 - \lambda)^m R(\lambda; s, t) = \lim_{\lambda = \lambda_0}(\lambda_0 - \lambda)^m [K(s, t) + \lambda K^2(s, t) + \ldots]$$

est positive ou nulle dans le domaine (a, b). Si l'on donne à t une valeur numérique telle que $\chi_0(s, t)$ ne soit pas identiquement nulle, on obtient une fonction $\varphi_0(s)$ satisfaisant à

$$\varphi_0(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\varphi_0(t)\,dt;$$

il en résulte que $\varphi_0(s)$ est une fonction fondamentale continue et positive.

En partant de l'inégalité

$$\varphi(s) \leqq |\lambda| \int_a^b K(s, t)\,|\varphi(t)|\,dt$$

vérifiée par toute fonction fondamentale non essentiellement positive correspondant au nombre fondamental λ, et l'orthogonalité de deux fonctions fonda-

mentales correspondant à deux nombres fondamentaux différents, l'auteur démontre que tout nombre fondamental λ différent de λ_0 est supérieur à λ_0 en valeur absolue.

Des considérations tout à fait analogues démontrent que λ_0 est racine simple de $D(\lambda)$.

4. Le théorème ainsi démontré peut être généralisé en supposant que $K(s, t)$ s'annule en un ensemble de points d'aire nulle, ou encore en supposant simplement que l'un des noyaux itérés est positif.

5. Comme conséquence intéressante, on peut signaler la suivante. Si φ_1, φ_2, ... forment un système quelconque de fonctions orthogonales normales, si de plus la série

$$a_1 \varphi_1(s) \varphi_1(t) + a_2 \varphi_2(s) \varphi_2(t) + \ldots$$

est uniformément convergente dans le domaine (a, b) et a une somme positive, l'un des coefficients a est positif et *supérieur* en valeur absolue à tous les autres.

Remak (R.). — Sur la décomposition des groupes commutatifs en facteurs cycliques premiers entre eux (245-250).

Frobenius et Stickelberger ont démontré (même *Journal*, t. LXXXVI, p. 217) que tout groupe commutatif peut être regardé comme le produit direct de sous-groupes cycliques premiers entre eux ayant pour ordres des puissances de nombres premiers et que, de plus, les ordres des facteurs sont indépendants de la manière dont on effectue la décomposition. L'auteur donne pour les deux parties de ce théorème de nouvelles démonstrations en supposant admis que le groupe donné peut d'une manière et d'une seule être regardé comme le produit de sous-groupes dont les ordres soient premiers entre eux, chacun d'eux étant une puissance de nombre premier.

Föppl (L.). — Les distributions stables d'électrons dans l'atome (251-302).

Introduction. — Cet article, qui est un extrait de la Dissertation de l'auteur (Göttingen, 1912), étudie au point de vue de la stabilité les distributions en équilibre des électrons. L'atome est supposé une sphère remplie d'électricité positive répartie d'une manière homogène et à l'intérieur de laquelle des électrons négatifs sont mobiles sans frottement. On suppose que tous les électrons qui constituent l'atome ont la même masse m et la même charge négative, qu'on peut prendre pour unité. On pourrait évidemment admettre que, dans un atome électriquement indifférent, le nombre ν des unités de quantité d'électricité positive est égal au nombre n des électrons. Mais cette hypothèse ne simplifie pas l'étude de la stabilité. Si l'on désigne par b le rayon de la sphère chargée d'électricité positive, par a la distance d'un électron au centre de cette sphère, la force qui attire l'électron vers le centre de la sphère est $\frac{\nu}{b^3} a$.

L'auteur suppose la charge électrique assez forte pour que, dans les structures en équilibre étudiées, les n électrons restent à l'intérieur de la sphère. Si l'on suppose que la charge positive vienne à décroître, les n électrons vont tendre

à s'éloigner du centre, et la stabilité subsistera tant qu'aucun des électrons ne sortira de la sphère : si un ou plusieurs sortent, le reste formera une nouvelle structure stable.

L'auteur rappelle les hypothèses faites par J.-J. Thomson (*Philosophical Magazine*, 6e série, t. VII, 1904). Ce physicien suppose les électrons animés d'une rotation autour d'un diamètre de la sphère, et cette rotation est supposée assez rapide pour que les électrons restent dans un plan passant par le centre de la sphère. Le problème mathématique est ainsi notablement simplifié. J.-J. Thomson l'a résolu en supposant que les électrons forment les sommets d'un polygone régulier dont le centre est le centre de la sphère et le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation. Il arrive au résultat intéressant que cet anneau d'électrons ne peut obtenir sa stabilité par une rotation suffisamment rapide que si n est au plus égal à 5. Pour $n = 6$ l'anneau est instable, quelque grande que soit la vitesse de rotation et il ne devient stable que si l'on ajoute un électron au centre de la sphère. J.-J. Thomson considère aussi des électrons distribués par anneaux concentriques. Il introduit d'ailleurs, dans ses calculs, des simplifications sujettes à la critique, de sorte que ses résultats ne peuvent être regardés que comme une première approximation.

L'auteur ne suppose aucune rotation de l'atome.

1. *Étude générale de la stabilité d'un anneau d'électrons.* — L'auteur applique, pour l'étude de la stabilité, la méthode des petites oscillations. Il suppose n électrons placés au sommet d'un polygone régulier de rayon a et concentrique à la sphère. La condition d'équilibre est

$$\frac{\nu}{b^3} a^2 = \frac{1}{4} \sum_1^{n-1} s \frac{1}{\sin \frac{s\pi}{n}}.$$

Dans un petit mouvement du système, les électrons ont des coordonnées cylindriques

$$r_s = a + \rho_s; \qquad \theta_s = \frac{2\pi}{n} s + (\varphi_s - \varphi_0); \qquad z_s = z_s \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1)$$

où ρ_s, φ_s, z_s sont des infiniment petits. Les équations de Lagrange donnent, pour le premier électron,

$$m \frac{d^2 \rho_0}{dt^2} - \rho_0 \left(\frac{\nu}{b^3} - A' \right) - \sum_1^{n-1} s \rho_s A_s - a \sum_1^{n-1} s \varphi_s B_s = 0,$$

$$m a^2 \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} - a^2 \varphi_0 C - a \sum_1^{n-1} s \rho_s B_s - a^2 \sum_1^{n-1} s \varphi_s C_s = 0,$$

$$m a^2 \frac{d^2 z_0}{dt^2} + z_0 \left(\frac{\nu}{b^3} - D \right) + \sum_1^{n-1} s z_s D_s = 0,$$

où $a^2 A'$, $a^2 A_s$, $a^2 C_s$, $a^2 D$, $a^2 D_s$ sont des constantes numériques qui ne dépendent que de n (et de s). En cherchant les oscillations fondamentales, dont on peut désigner la fréquence par $\sqrt{\frac{x}{m}}$, on obtient un système d'équations linéaires

qui entraine en particulier les équations

$$\left(-x - \frac{3\nu}{b^3}\right)(\rho_0 - \rho_1 + \ldots + \rho_{n-1}) = 0,$$

$$x(\varphi_0 - \varphi_1 - \ldots + \varphi_{n-1}) = 0,$$

$$\left(-x + \frac{\nu}{b^3}\right)(z_0 + z_1 + \ldots - z_{n-1}) = 0.$$

La valeur $x = \frac{3\nu}{b^3}$ est racine de l'équation caractéristique et correspond à une oscillation fondamentale dans laquelle les électrons sont animés de mouvements vibratoires le long de leurs rayons vecteurs. La racine $x = 0$ est une racine triple ; elle correspond au mouvement dans lequel les différents électrons sont animés de vibrations rectilignes toutes parallèles entre elles. Enfin la racine

$$x = \frac{\nu}{b^3}$$

est triple : elle correspond à une rotation d'ensemble autour d'un axe passant par le centre de la sphère.

Les autres oscillations fondamentales s'obtiennent en posant

$$\rho_s = \alpha^s \rho_0, \qquad \varphi_s = \alpha^s \varphi_0, \qquad z_s = \alpha^s z_0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où α désigne une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité autre que 1. Les équations qui déterminent ces oscillations se réduisent aux trois suivantes :

$$\rho_0\left(-x - \frac{\nu}{b^3} - A - \Sigma\alpha^s A_s\right) + a\varphi_0 \Sigma\alpha^s B_s = 0,$$

$$-\rho_0 a \Sigma\alpha^s B_s + a^2\varphi_0\left(-x + C - \Sigma\alpha^s C_s\right) = 0,$$

$$z_0\left(-x - \frac{\nu}{b} - D + \Sigma\alpha^s D_s\right) = 0.$$

La stabilité sera assurée si les racines de l'équation caractéristique sont toutes positives, ce qui donne, *pour chaque racine $n^{\text{ième}}$ α*, deux inégalités. Dans chacune des oscillations fondamentales, les électrons décrivent des ellipses égales.

Le calcul montre que la stabilité est assurée pour $n = 2$ et $n = 3$. Pour $n = 4$ l'instabilité provient de l'oscillation dans laquelle les électrons se déplacent parallèlement à l'axe de la figure, le premier et le troisième dans un sens, le deuxième et le quatrième dans le sens opposé. Les électrons tendent ainsi à se placer aux quatre sommets d'un tétraèdre. Cela conduit à étudier la stabilité de la structure pour laquelle les quatre électrons sont aux sommets d'un tétraèdre régulier.

2. *Étude de l'équilibre et de la stabilité des systèmes d'électrons constitués par un anneau et deux pôles.* — L'auteur considère maintenant

$$n = 1 + m + 1$$

électrons, dont m forment un anneau de rayon a_1, les deux autres étant situés sur l'axe de cet anneau, de part et d'autre du centre, à la distance a_2 de ce

centre. Les équations d'équilibre sont alors

$$\frac{S_m}{4a_1^4} - \frac{1}{4a_2^4} = \frac{m-2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},$$

$$(m-1)\frac{\nu}{b^3} = \frac{m S_m}{4a_1^7} - \frac{1}{2a_2^3}.$$

Dans les cas particuliers étudiés, le rapport $\frac{a_2 - a_1}{a_1}$ est assez petit pour qu'on puisse pratiquement négliger son carré : on a en effet

pour $m = 3$, $a_2 = 1,02\,a_1$;
» $m = 4$, $a_2 = a_1$;
» $m = 5$, $a_2 = 0,97\,a_1$;
» $m = 6$, $a_2 = 0,94\,a_1$.

Une méthode de calcul identique à celle du paragraphe précédent conduit à la conclusion qu'il y a stabilité pour $n = 5, 6, 7$. Au contraire dans le cas de $n = 8$ il y a instabilité et tendance des électrons à se ranger aux sommets d'un cube.

3. *L'étude de la stabilité des formes tétraédrique et cubique.* — Pour cette étude l'auteur se sert d'un nouveau système de coordonnées, chaque point P étant représenté par les projections rectangulaires du vecteur $\overline{OP}$ sur les quatre axes qui joignent l'origine O aux quatre sommets d'un tétraèdre régulier de centre O. La somme des quatre coordonnées d'un point est toujours nulle. La méthode de calcul adoptée est, à part cette modification, la même que précédemment et les oscillations fondamentales sont obtenues par un procédé analogue à celui qui a été indiqué plus haut. L'équation d'équilibre est, dans le cas du tétraèdre,

$$\frac{\nu}{b^3} a = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\,a^2},$$

et les racines de l'équation caractéristique sont, à part o et $\frac{\nu}{b^3}$ qui correspondent à des mouvements d'ensemble du système,

$$\frac{3\nu}{b^3}, \qquad \frac{3\nu}{2b^3}, \qquad \frac{3\nu}{4b^3},$$

la première est racine simple, la seconde triple et la troisième racine double. Il y a donc stabilité.

Dans le cas du cube l'équation d'équilibre est

$$\frac{\nu}{b^3} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{0,17}{a^3},$$

en désignant par a la distance commune des électrons au centre de la sphère. Ici l'une des quantités x est $-\frac{0,36}{a^3}$, de sorte qu'il y a *instabilité*, les électrons tendent à se ranger suivant deux anneaux parallèles, les carrés formés dans chaque anneau étant en croix l'un par rapport à l'autre.

4. *Étude de la stabilité du double anneau.* — L'auteur considère deux anneaux de m électrons situés dans des plans parallèles de même rayon, les électrons étant placés de manière que ceux du premier anneau se projettent sur le plan du deuxième anneau sur les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs qui aboutisssent aux électrons de ce deuxième anneau. Le calcul montre que pour $m = 4$ il y a stabilité; au contraire, il y a instabilité pour $m = 5$. L'atome tétraédrique et l'atome octaédrique rentrent dans ce type pour $m = 2$ et $m = 3$.

5. *Étude de la stabilité dans le cas d'un double anneau et de deux pôles.* — Supposons que l'atome comprenne

$$n = 1 + m + m + 1$$

électrons rangés suivant deux anneaux disposés comme dans le paragraphe précédent, auxquels s'ajouteraient deux électrons placés sur l'axe commun de part et d'autre des plans des deux anneaux. On obtient des oscillations fondamentales en supposant les deux pôles fixes et les anneaux mobiles comme s'il n'y avait pas de pôles; les autres oscillations fondamentales s'obtiennent en supposant les pôles mobiles le long de l'axe. Il y a stabilité dans les cas

$$m = 4, 5, 6,$$

ce qui correspond à

$$n = 10, 12, 14.$$

6. *Résumé et généralisation.* — On pourrait essayer de généraliser les résultats obtenus en admettant l'existence d'un axe de symétrie de l'atome avec plusieurs anneaux, accompagnés ou non de deux ou de trois pôles. Une structure stable vraisemblable serait par exemple caractérisée par la formule

$$N = 1 + p_2 + 2p_2 + p_2 + 1.$$

On peut espérer trouver ainsi des lois de périodicité analogues à la loi de périodicité du système des éléments.

Si l'on admet maintenant que ces atomes soient animés d'un mouvement de rotation autour de leur axe, la structure n'est pas essentiellement changée, certaines formes qui étaient instables peuvent devenir stables.

Vogt (*W.*). — Recherches métriques sur l'hyperbole cubique et en particulier l'hyperbole cubique équilatère (303-317).

A part un article de H. Schröter (*Math. Ann.*, t. XXV, p. 293), peu de recherches ont été faites sur la métrique des cubiques gauches. L'auteur se propose d'étudier, au point de vue de leurs propriétés métriques, l'hyperbole cubique, c'est-à-dire la cubique gauche admettant à l'infini trois points réels et distincts.

1. *Propriétés métriques de l'hyperbole cubique générale.* — Soient a, b, c les trois asymptotes d'une hyperbole cubique $\mathfrak{H}^3$. Soient de plus d, e, f les axes des cylindres hyperboliques circonscrits à la courbe et ayant leurs génératrices respectivement parallèles à a, b, c. Ces six droites forment un hexagone gauche à côtés opposés parallèles (a, d), (b, e) et (c, f). Les côtés de cet hexagone

sont les arêtes d'un parallélépipède, dit le parallélépipède *fondamental*, dont les six faces sont les trois couples de plans asymptotes des trois cylindres.

Soient M et M_1 les sommets opposés du parallélépipède qui ne se trouvent sur aucune des 6 arêtes a, b, c, d, e, f. Les plans osculateurs α, β, γ, de la courbe aux points à l'infini sur les asymptotes sont les plans menés par a, b, c parallèlement à la diagonale MM_1.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ les milieux des arêtes de l'hexagone $AA_1BB_1CC_1$ formé par les droites a, b, c, d, e, f, et soit O le centre du parallélépipède fondamental. Les six points $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ sont dans un même plan avec le point O ; c'est le plan principal μ de l'hyperbole. Les droites $\mathcal{A}\mathcal{D} = p$, $\mathcal{B}\mathcal{C} = q$, $\mathcal{E}\mathcal{F} = r$ sont des diamètres de la courbe respectivement pour les plans parallèles au plan α, β, γ; c'est-à-dire que le symétrique d'un point quelconque de la courbe par rapport à la droite p, la symétrie (oblique) étant prise parallèlement au plan α, appartient encore à la courbe.

Les droites p, q, r coupent chacune l'hyperbole en un point, et ces trois points P, Q, R sont les trois *sommets* de la courbe. Les tangentes à la courbe en ces points sont respectivement parallèles à α, β, γ et les plans osculateurs en ces points passent par le centre O du parallélépipède fondamental.

Tout plan parallèle au plan principal μ coupe l'hyperbole en trois points dont le centre de gravité est sur la diagonale MM_1.

Les trois asymptotes a, b, c déterminent un hyperboloïde de centre O, l'hyperboloïde des asymptotes. Son homothétique par rapport au point O, le rapport d'homothétie étant 3, contient l'hyperbole cubique; c'est l'hyperboloïde fondamental. L'une des familles de génératrices de cet hyperboloïde est formée de sécantes doubles de la cubique. Le milieu du segment déterminé sur une de ces sécantes par ses deux points d'intersection avec la cubique coïncide avec le milieu du segment déterminé par ses deux points d'intersection avec l'hyperboloïde des asymptotes.

Étant donné un point quelconque de la cubique, le parallélépipède, dont ce point et le point M sont deux sommets opposés et dont les arêtes sont parallèles aux asymptotes, a un volume constant et égal au volume du parallélépipède fondamental. Il en est de même si l'on remplace le point M par le point M_1. La cubique appartient ainsi à deux surfaces cubiques qui se coupent en outre suivant les trois droites à l'infini des faces du parallélépipède fondamental et suivant une seconde hyperbole cubique β_0^3, dite *conjuguée* de la première. Les asymptotes de β_0^3 sont les axes des cylindres de β^3 et réciproquement.

Les deux hyperboles conjuguées sont symétriques par rapport au point O. Elle ont même hyperboloïde fondamental. Chacune de ces hyperboles est le lieu des milieux de celles des sécantes doubles de l'autre qui sont situées sur l'hyperboloïde fondamental. Elles possèdent la même surface centrale du troisième ordre qui admet un centre en O, le plan tangent en ce centre étant le plan μ. Les deux hyperboles sont des lignes asymptotiques de cette surface centrale.

Un parallélépipède donné peut être regardé de quatre manières différentes comme le parallélépipède fondamental d'un couple d'hyperboles conjuguées.

II. *L'hyperbole équilatère.* — Une quadrique réglée est dite *équilatère* quand elle possède un système de trois génératrices rectangulaires, et alors elle en possède une infinité. L'hyperbole cubique β^3 sera dite *équilatère* quand son parallélépipède fondamental sera rectangle.

Par une hyperbole cubique il passe, en général, un faisceau d'hyperboloïdes équilatères. Pour qu'il puisse passer trois hyperboloïdes équilatères n'appar-

tenant pas à un même faisceau, il faut que l'hyperbole cubique soit équilatère.

Tout plan coupe une hyperbole équilatère β^3 suivant un triangle dont le point de concours des hauteurs est situé sur la sécante double perpendiculaire au plan du triangle. Il existe ∞^3 tétraèdres à hauteurs concourantes inscrits dans la courbe et le point de concours des hauteurs de l'un quelconque de ces tétraèdres est sur la courbe. Toutes les cubiques passant par cinq points tels que quatre quelconques d'entre eux forment un tétraèdre à hauteurs concourantes sont des hyperboles équilatères.

Étant donné un tétraèdre quelconque inscrit dans une cubique équilatère, l'hyperboloïde déterminé par les hauteurs contient la cubique et les génératrices du même système que les hauteurs sont des sécantes simples de cette cubique. Il existe ∞^1 hyperboles équilatères circonscrites à un tétraèdre donné.

L'auteur appelle hexagone *orthogonal* un hexagone gauche tel que le plan de trois quelconques de ses sommets soit perpendiculaire au plan des trois autres. Toute cubique circonscrite à un hexagone orthogonal est une hyperbole équilatère. Réciproquement, deux plans perpendiculaires quelconques déterminent sur une hyperbole équilatère les six sommets d'un hexagone orthogonal. Cinq des six sommets déterminent le sixième. Par suite, étant donnés cinq points quelconques sur une hyperbole équilatère, les dix plans obtenus en menant, par deux quelconques de ces cinq points, le plan perpendiculaire au plan déterminé par les trois autres coupent l'hyperbole en un même point.

E. Cartan.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXVII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
50980 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 48
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY